

**Algebra liniară, geometrie analitică,
geometrie diferențială și elemente de
algebră tensorială.**

Volumul 2

Geometrie Analitică, Geometrie
Diferențială și Elemente de Algebră
Tensorială

Constantin UDRIȘTE - coordonator

Vladimir BALAN

Camelia FRIGIOIU

Marcel ROMAN

Editura StudIS

adicenter@yahoo.com

Iasi, Sos. Stefan cel Mare, nr.5

Tel./fax: 0232 – 217.754

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

COORDONATOR: CONSTANTIN UDRIȘTE

Vladimir Balan, Camelia Frigioiu, Marcel Roman.

**Algebra liniară, geometrie analitică, geometrie diferențială și
elemente de algebră tensorială.**

**Vol. 2 Geometrie Analitică, Geometrie Diferențială și Elemente de
Algebră Tensorială / Constantin Udriște, Vladimir Balan, Camelia
Frigioiu, Marcel Roman - Vatra Dornei: StudIS, 2013**

Bibliogr.

ISBN: 978-606-624-313-1

ISBN vol.2: 978-606-624-315-5

- I. Constantin Udriște
- II. Vladimir Balan
- III. Camelia Frigioiu
- IV. Marcel Roman

Consilier editorial: Dranca Adrian

Secretar editorial: Moroșanu Paul

Pre-press, tipar digital și finisare:

S.C. ADI CENTER SRL

Șos. Ștefan ce Mare, nr. 5

Tel.: 217 754



Copyright © 2013

Toate drepturile asupra acestei ediții sunt rezervate autorului

Prefață

Cartea de față a fost elaborată în cadrul proiectului POSDRU/56/1.2/S/32768, “Formarea cadrelor didactice universitare și a studenților în domeniul utilizării unor instrumente moderne de predare-învățare-evaluare pentru disciplinele matematice, în vederea creării de competențe performante și practice pentru piața muncii”.

Finanțat din Fondul Social European și implementat de către Ministerul Educației, Cercetării, Tineretului și Sportului, în colaborare cu The Red Point, Oameni și Companii, Universitatea din București, Universitatea Tehnică de Construcții din București, Universitatea „Politehnica” din București, Universitatea din Pitești, Universitatea Tehnică „Gheorghe Asachi” din Iași, Universitatea de Vest din Timișoara, Universitatea „Dunărea de Jos” din Galați, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca, Universitatea “1 Decembrie 1918” din Alba-Iulia, proiectul contribuie în mod direct la realizarea obiectivului general al Programului Operațional Sectorial de Dezvoltare a Resurselor Umane – POSDRU și se înscrie în domeniul major de intervenție 1.2 Calitate în învățământul superior.

Proiectul are ca obiectiv adaptarea programelor de studii ale disciplinelor matematice la cerințele pieței muncii și crearea de mecanisme și instrumente de extindere a oportunităților de învățare.

Evaluarea nevoilor educaționale obiective ale cadrelor didactice și studenților legate de utilizarea matematicii în învățământul superior, masterate și doctorate, precum și analizarea eficacității și relevanței curriculelor actuale la nivel de performanță și eficiență, în vederea dezvoltării de cunoștințe și competențe pentru studenții care învață discipline matematice în universități, reprezintă obiective specifice de interes în cadrul proiectului. Dezvoltarea și armonizarea curriculelor universitare ale disciplinelor matematice, conform exigențelor de pe piața muncii, elaborarea și implementarea unui program de formare a cadrelor didactice și a studenților interesați din universitățile partenere, bazat pe dezvoltarea și armonizarea de curriculum, crearea unei baze de resurse inovative, moderne și funcționale pentru predarea-învățarea-evaluarea în disciplinele matematice pentru învățământul universitar sunt obiectivele specifice care au ca răspuns materialul de față.

Formarea de competențe cheie de matematică și informatică presupune crearea de abilități de care fiecare individ are nevoie pentru dezvoltarea personală, incluziune socială și inserție pe piața muncii. Se poate constata însă că programele disciplinelor de matematică nu au întotdeauna în vedere identificarea și sprijinirea elevilor și studenților potențial talentați la matematică. Totuși, studiul matematicii a evoluat în exigențe până a ajunge să accepte provocarea de a folosi noile tehnologii în procesul de predare-învățare-evaluare pentru a face matematica mai atractivă.

În acest context, analiza flexibilității curriculei, însoțită de analiza metodelor și instrumentelor folosite pentru identificarea și motivarea studenților talentați la matematică ar putea răspunde deopotrivă cerințelor de masă, cât și celor de elită.

Viziunea pe termen lung a acestui proiect preconizează determinarea unor schimbări în abordarea fenomenului matematic pe mai multe planuri: informarea unui număr cât mai mare de membri ai societății în legătură cu rolul și locul matematicii în educația de bază în instrucție și în descoperirile științifice menite să îmbunătățească calitatea vieții, inclusiv popularizarea unor mari descoperiri tehnice și nu numai, în care matematica cea mai avansată a jucat un rol hotărâtor. De asemenea, se urmărește evidențierea a noi motivații solide pentru învățarea și studiul matematicii la nivelele de bază și la nivel de performanță; stimularea creativității și formarea la viitorii cercetători matematicieni a unei atitudini deschise față de însușirea aspectelor specifice din alte științe, în scopul participării cu succes în echipe mixte de cercetare sau a abordării unei cercetări inter și multi disciplinare; identificarea unor forme de pregătire adecvată de matematică pentru viitorii studenți ai disciplinelor matematice, în scopul utilizării la nivel de performanță a aparatului matematic în construirea unei cariere profesionale.

Conținutul acestui manual se adresează studenților și profesorilor de la universitățile tehnice, acoperind principalele noțiuni de Geometrie Analitică, Geometrie Diferențială și elemente de Algebră Tensorială.

Capitolele și paragrafele acestei cărți se referă la:

- elemente de geometrie analitică, incluzând dreapta și planul în spațiu, conice în plan și quadrice în spațiul euclidian tridimensional;
- aspecte locale și globale ale teoriei curbelor și suprafețelor, elemente intrinseci ale unei curbe sau ale unei suprafețe, formule de calcul;
- bazele teoriei tensorilor, a derivării covariante și a operatorilor diferențiali (gradient, hessiană, divergență, rotor și laplacian);

Exemplele și problemele care însoțesc textul de bază asigură funcționalitatea manualului, oferindu-i un grad avansat de independență în raport cu bibliografia existentă.

Cuprins

I	Geometrie Analitică	9
1	Vectori liberi	11
1.1	Vectori liberi	11
1.2	Adunarea vectorilor liberi	13
1.3	Înmulțirea unui vector liber cu un scalar	14
1.4	Coliniaritate și coplanaritate	15
1.5	Proiecție ortogonală pe o dreaptă	18
1.6	Produs scalar	20
1.7	Produs vectorial	21
1.8	Produs mixt	24
1.9	Probleme propuse	25
2	Dreapta și planul în spațiu	29
2.1	Reper cartezian	29
2.2	Ecuatiile dreptei în spațiu	30
2.2.1	Dreapta determinată de un punct și un vector nenul	30
2.2.2	Dreapta determinată de două puncte	31
2.2.3	Dreapta orientată	31
2.3	Ecuția planului în spațiu	32
2.3.1	Planul determinat de un punct și un vector normal nenul	33
2.3.2	Plane particulare	34
2.3.3	Planul determinat de trei puncte necoliniare	34
2.3.4	Planul determinat de un punct și doi vectori necoliniari	35
2.3.5	Ecuția normală a planului (Hesse)	36
2.3.6	Plan orientat	36
2.3.7	Semispații	37
2.3.8	Reuniunea și intersecția a două plane	37
2.3.9	Fascicule de plane	38
2.4	Unghiuri în spațiu	39
2.4.1	Unghiul dintre două drepte orientate	39
2.4.2	Unghiul dintre două plane orientate	39
2.4.3	Unghiul dintre o dreaptă orientată și un plan orientat	40
2.5	Distanțe în spațiu	40
2.5.1	Distanța de la un punct la o dreaptă	41
2.5.2	Distanța de la un punct la un plan	41

2.5.3	Perpendiculara comună a două drepte oarecare din spațiu	42
2.5.4	Distanța dintre două drepte	42
2.6	Probleme rezolvate	43
2.7	Probleme propuse	46
3	Schimbări de repere în spațiu	47
3.1	Translația reperului cartezian	47
3.2	Rotația reperului cartezian	48
3.3	Trecerea de la reperul cartezian la reperul cilindric	50
3.4	Trecerea de la reperul cartezian la reperul sferic	51
3.5	Probleme propuse	53
4	Conice	55
4.1	Tipuri de conice	55
4.2	Reducerea la forma canonică a ecuației unei conice	59
4.2.1	Metoda valorilor proprii	59
4.2.2	Metoda roto-translației	60
4.3	Intersecția dintre o dreaptă și o conică	61
4.4	Pol și polară	63
4.5	Diametru conjugat cu o direcție dată	65
4.6	Axele unei conice	67
4.7	Probleme rezolvate	68
4.8	Probleme propuse	72
5	Cuadrice	75
5.1	Sfera	75
5.2	Elipsoidul	78
5.3	Hiperboloizii	80
5.4	Paraboloizii	83
5.5	Cilindri, perechi de plane etc.	84
5.6	Generatoare rectilinii	86
5.7	Cuadrice descrise prin ecuația generală	88
5.8	Reducerea la forma canonică a ecuației unei quadrice	91
5.9	Intersecția unei quadrice cu o dreaptă sau cu un plan	93
5.10	Probleme rezolvate	96
5.11	Probleme propuse	98
II	Geometrie diferențială	99
6	Noțiuni introductive	101
6.1	Funcții diferențiabile	101
6.2	Vectori tangenți. Câmpuri vectoriale	103
6.3	Derivata covariantă	108
6.4	Probleme propuse	110

7	Curbe în \mathbb{R}^n	111
7.1	Definiții și exemple	111
7.2	Tangenta și hiperplanul normal la o curbă	115
7.3	Câmpuri vectoriale pe o curbă	119
7.4	Ramuri infinite	122
7.5	Abscisa curbilinie	124
7.6	Probleme propuse	128
8	Curbe în \mathbb{R}^2	129
8.1	Tangenta și normala unei curbe plane	129
8.2	Curbe definite prin ecuații carteziene implicite	130
8.3	Forma unei curbe în vecinătatea unui punct al său	132
8.4	Trasarea curbelor plane	136
8.5	Formule Frenet în plan	139
8.6	Noțiuni de teoria contactului a două curbe	141
8.7	Curbe plane în coordonate polare	147
8.8	Probleme propuse	150
9	Curbe în \mathbb{R}^3	155
9.1	Tangenta și planul normal al unei curbe în spațiu	155
9.2	Curbe definite prin ecuații carteziene implicite	156
9.3	Planul osculator și binormala	159
9.4	Normala principală și planul rectificator	160
9.5	Triedrul lui Frenet	160
9.6	Formule Frenet pentru curbe cu viteza unu	161
9.7	Formulele Frenet pentru curbe cu viteza arbitrară	164
9.8	Aplicații ale formulelor Frenet	169
9.9	Probleme propuse	173
10	Suprafețe	175
10.1	Noțiunea de suprafață	175
10.2	Curbe coordonate	180
10.3	Suprafețe riglate	181
10.4	Suprafețe de rotație	186
10.5	Vectori tangenți la o suprafață	188
10.6	Normala și planul tangent la o suprafață	191
10.7	Aplicația Weingarten	198
10.8	Curbura normală	200
10.9	Curbura Gauss	207
10.10	Formele fundamentale ale unei suprafețe	211
10.11	Formule de calcul	213
10.12	Curbe speciale pe o suprafață	218
10.13	Aria unei porțiuni de suprafață	222
10.14	Subvarietăți ale lui \mathbb{R}^n	224
10.15	Probleme propuse	226

11 Algebră și analiză tensorială	231
11.1 Vectori contravarianți și vectori covarianți	231
11.2 Tensori	232
11.3 Ridicarea și coborârea indicilor	235
11.4 Câmpuri vectoriale	236
11.5 Câmpuri tensoriale	240
11.6 Conexiune liniară	241
11.7 Metrici riemanniene	243
11.8 Operatori diferențiali	245
11.9 Forme alternate	247
11.10 Forme diferențiale alternate	249
11.11 Probleme propuse	250
Bibliografie	252
Index de noțiuni	255

Partea I

Geometrie Analitică

Capitolul 1

Vectori liberi

1.1 Vectori liberi

Fie E_3 spațiul punctual tridimensional al geometriei elementare și \vec{AB} un segment orientat (figura 1).

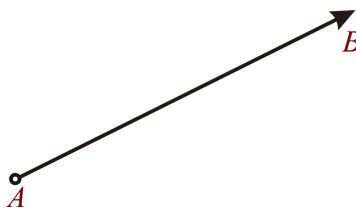


Fig. 1

Punctul A se numește *originea*, iar punctul B se numește *extremitatea* segmentului. În cazul când originea și extremitatea coincid, se obține *segmentul orientat nul*. Dreapta determinată de punctele A și B se numește *dreapta suport* a lui \vec{AB} și se notează cu AB . Această dreaptă este unic determinată numai dacă $A \neq B$. Dreapta suport a segmentului orientat nul este nedeterminată. Două segmente orientate se numesc *coliniare*, dacă dreptele suport sunt egale; respectiv *paralele*, dacă dreptele suport sunt paralele.

Lungimea (*norma* sau *modulul*) unui segment orientat \vec{AB} se definește ca fiind lungimea segmentului neorientat $[AB]$, adică distanța de la punctul A la punctul B . Un segment orientat are lungimea 0 dacă și numai dacă el este segmentul nul. Două segmente neorientate care au aceeași lungime se numesc *segmente congruente*.

Definiție 1. Două segmente orientate nenule se numesc echipolente dacă au aceeași direcție, același sens și aceeași lungime.

Dacă \vec{AB} este echipolent cu \vec{CD} , atunci vom scrie $\vec{AB} \sim \vec{CD}$. Se dovedește ușor că $\vec{AB} \sim \vec{CD}$

implică $\vec{AC} \sim \vec{BD}$ (figura 2).

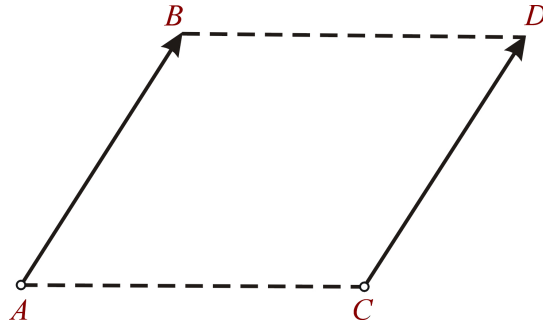


Fig. 2

Întrucât relația ”aceiași sens” implică relația ”aceiași direcție”, echipolența este sinonimă cu ”aceiași sens și aceeași lungime”. Există însă suficiente probleme concrete care impun explicitarea unei direcții fără a interesa sensul. De aceea am preferat definiția clasică pentru echipolență, deși conține și elemente superflue.

Teorema 2. *Relația de echipolență pentru segmente orientate nenule este o relație de echivalență.*

Demonstrație. Relația specificată este reflexivă, simetrică și tranzitivă. □

Prelungim relația de echipolență și la segmentele orientate nule: admitem că toate segmentele orientate nule sunt echipolente între ele. Astfel obținem o relație de echipolență pe mulțimea tuturor segmentelor orientate din spațiu, care este o relație de echivalență.

Definiție 3. Clasele de echivalență ale segmentelor orientate relativ la relația de echipolență se numesc vectori liberi. Direcția, sensul și lungimea care sunt comune segmentelor orientate care definesc un vector liber se numesc direcția, sensul și lungimea vectorului liber.

Vectorii liberi vor fi notați cu litere mici cu bară deasupra \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} , \dots , iar în desen vor fi reprezentați printr-unul dintre segmentele orientate echipolente care definesc clasa numită *vector liber*. În acest context vectorii liberi se mai notează și prin \overline{AB} , \overline{CD} , \dots ; evident $\vec{AB} \in \overline{AB}$ și fiecare segment orientat din clasa numită vector liber este un *reprezentant* al clasei. Corespunzător, pentru lungimea (norma) unui vector liber \bar{a} sau \overline{AB} , vom întrebuința notațiile $\|\bar{a}\|$, $\|\overline{AB}\|$ sau $d(A, B)$.

Un vector liber de lungime 1 se numește *versor* sau *vector unitate* și în general se notează cu \bar{e} .

Vectorul liber care are lungimea 0 se numește *vector nul* și se notează cu $\bar{0}$. Acest vector este reprezentat de segmentul orientat \vec{AA} (în acest caz, direcția și sensul sunt nedeterminate).

Doi vectori liberi \bar{a} și \bar{b} sunt egali și se scrie $\bar{a} = \bar{b}$, dacă reprezentanții lor sunt echipolenți sau, echivalent, dacă au aceeași direcție, același sens și aceeași lungime.

Vectorii liberi care au aceeași direcție se numesc *vectori coliniari*. Doi vectori coliniari care au aceeași lungime însă au sensuri opuse se numesc *vectori opuși*. Dacă unul dintre ei este notat cu

\bar{a} , atunci opusul său este notat cu $-\bar{a}$ (figura 3).

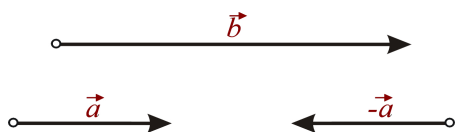


Fig. 3

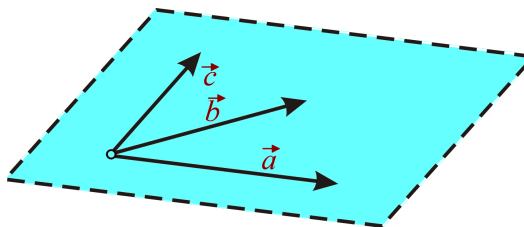


Fig. 4

Trei vectori liberi se numesc *coplanari* dacă segmentele orientate reprezentative sunt paralele cu un plan dat (figura 4).

Fie V mulțimea tuturor vectorilor liberi din spațiul E_3 . Fixăm în E_3 un punct O , numit *origine*. La orice alt punct M din E_3 îi corespunde un vector și numai unul $\bar{r} \in V$, al cărui reprezentant este \vec{OM} .

Reciproc, la orice vector \bar{r} corespunde un punct și numai unul M , astfel încât \vec{OM} să reprezinte pe \bar{r} . Rezultă că mulțimile E_3 și V sunt în corespondență biunivocă, bijecția fiind unic determinată prin fixarea originii O . Vectorul liber $\bar{r} = \vec{OM}$ se numește *vectorul de poziție al punctului M față de originea O* .

1.2 Adunarea vectorilor liberi

Mulțimea V a vectorilor liberi din spațiu se poate organiza ca un grup aditiv comutativ, definind adunarea prin regula triunghiului (regula paralelogramului).

Definiție 4. Fie \bar{a} și \bar{b} doi vectori liberi. Fie \vec{OA} un reprezentant al vectorului \bar{a} și \vec{AB} un reprezentant al vectorului \bar{b} . Vectorul liber \bar{c} reprezentat de segmentul orientat \vec{OB} se numește suma vectorilor \bar{a} și \bar{b} , care se notează $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$ sau $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}$ (figura 5).

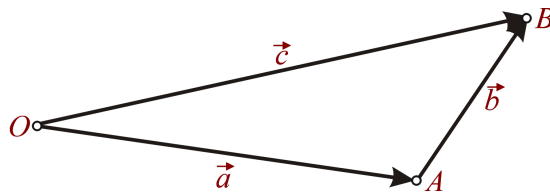


Fig. 5

Evident, \bar{a} , \bar{b} și $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$ sunt vectori coplanari. De asemenea, menționăm că regula cuprinsă în definiția 4 se numește *regula triunghiului*.

Adunarea vectorilor liberi $+: V \times V \rightarrow V$, $(\bar{a}, \bar{b}) \rightarrow \bar{a} + \bar{b}$ este o lege de compoziție internă bine definită deoarece vectorul liber $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$ nu depinde de alegerea punctului O (Temă!).

Teorema 5. Adunarea vectorilor liberi are următoarele **proprietăți**:

- 1) *asociativitatea*: $\forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in V$, $\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}$;
- 2) $\vec{0}$ este *element neutru*: $\bar{a} + \vec{0} = \vec{0} + \bar{a} = \bar{a}$, $\forall \bar{a} \in V$;
- 3) *opusul lui \bar{a} este simetricul lui \bar{a}* : $\forall \bar{a} \in V$, $\bar{a} + (-\bar{a}) = (-\bar{a}) + \bar{a} = \vec{0}$;
- 4) *comutativitatea*: $\forall \bar{a}, \bar{b} \in V$, $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$.

Demonstrație. Cazurile specifice coliniarității sunt lăsate drept teme.

1) Ținem seama de definiție și urmărim figura 6:

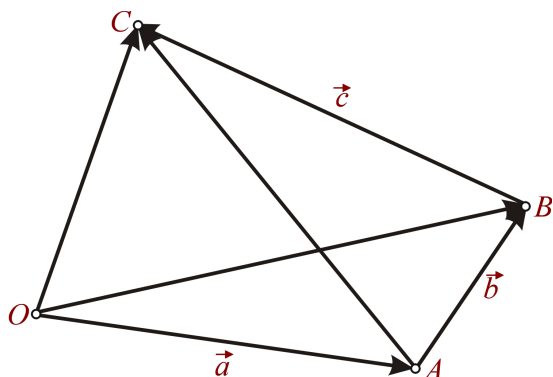


Fig. 6

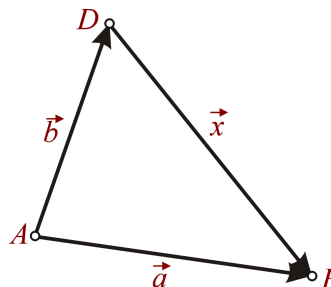


Fig. 7

\vec{OB} este reprezentantul sumei $\vec{a} + \vec{b}$, iar \vec{OC} este reprezentantul sumei $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$; \vec{AC} este reprezentantul sumei $\vec{b} + \vec{c}$, iar \vec{OC} este reprezentantul sumei $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$. Rezultă $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.
2)-4) Temă. \square

Comutativitatea adunării conduce la o nouă regulă pentru determinarea sumei a doi vectori necoliniari, numită *regula paralelogramului*. Se desenează $\vec{AB} \in \vec{a}$, $\vec{AD} \in \vec{b}$ și se fixează punctul C ca intersecția dintre paralela la AB dusă prin D și paralela la AD dusă prin B . Segmentul orientat \vec{AC} este reprezentantul lui $\vec{a} + \vec{b}$.

Asociativitatea adunării permite generalizarea regulii triunghiului la *regula poligonului plan* sau *strâmb*, utilizată când se adună cel puțin trei vectori.

Proprietățile 1), 2) și 3) arată că adunarea definește pe V o structură de grup, iar proprietatea 4) arată că acest grup este comutativ. În grupul V ecuația $\vec{b} + \vec{x} = \vec{a}$ are o soluție unică $\vec{x} = \vec{a} + (-\vec{b})$ pe care o notăm $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$ și pe care o numim *diferența dintre vectorul \vec{a} și vectorul \vec{b}* . Dacă \vec{AB} este reprezentantul lui \vec{a} , iar \vec{AD} este reprezentantul lui \vec{b} , atunci reprezentantul lui $\vec{a} - \vec{b}$ este \vec{DB} (figura 7).

1.3 Înmulțirea unui vector liber cu un scalar

Fie \mathbb{R} câmpul numerelor reale (câmpul scalarilor) și V grupul aditiv comutativ al vectorilor liberi. Vom introduce o lege de compoziție externă, adică o funcție definită pe $\mathbb{R} \times V$ cu valori în V , numită *înmulțirea unui vector liber cu un scalar*.

Definiție 6. Fie $t \in \mathbb{R}$ și $\vec{a} \in V$. Prin $t\vec{a}$ înțelegem vectorul liber definit astfel:

1) dacă $\vec{a} \neq \vec{0}$ și $t \neq 0$, atunci $t\vec{a}$ este vectorul care are aceeași direcție cu \vec{a} , același sens cu \vec{a} dacă $t > 0$, sens contrar lui \vec{a} dacă $t < 0$ și lungimea $|t||\vec{a}|$;

2) dacă $t = 0$ sau $\vec{a} = \vec{0}$, atunci $t\vec{a} = \vec{0}$.

Evident, $t\bar{a}$ este coliniar cu \bar{a} (figura 8).

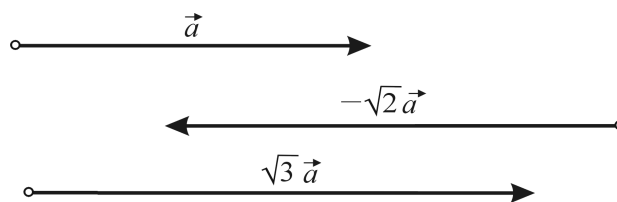


Fig. 8

Teorema 7. *Înmulțirea vectorilor liberi cu scalari are următoarele proprietăți:*

- 1) $1 \cdot \bar{a} = \bar{a}, \quad \forall \bar{a} \in V;$
- 2) $s(t\bar{a}) = (st)\bar{a}, \quad \forall s, t \in \mathbb{R}, \forall \bar{a} \in V;$
- 3) *distributivitatea față de adunarea scalarilor:*

$$(s + t)\bar{a} = s\bar{a} + t\bar{a}, \quad \forall s, t \in \mathbb{R}, \forall \bar{a} \in V;$$

- 4) *distributivitatea față de adunarea vectorilor:*

$$t(\bar{a} + \bar{b}) = t\bar{a} + t\bar{b}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall \bar{a}, \bar{b} \in V.$$

Demonstrație. 1)-3) Temă. 4) Fie \vec{OA} reprezentantul vectorului \bar{a} și \vec{AB} reprezentantul vectorului \bar{b} . Atunci \vec{OB} este reprezentantul vectorului $\bar{a} + \bar{b}$ (figura 9).

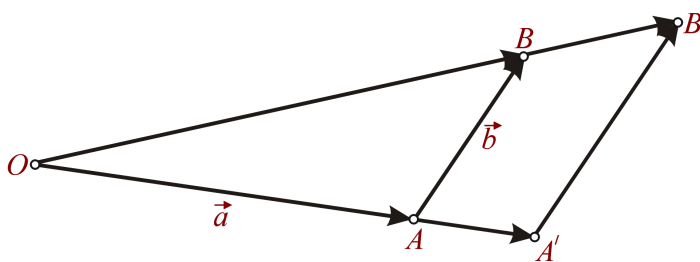


Fig. 9

Presupunem $t > 0$ și notăm cu \vec{OA}' reprezentantul vectorului $t\bar{a}$ și cu \vec{OB}' reprezentantul vectorului $t(\bar{a} + \bar{b})$. Se observă că $\Delta OAB \sim \Delta OA'B'$, având un unghi comun și laturile (care determină acest unghi) de lungimi proporționale. Rezultă $\vec{AB} \parallel \vec{A'B'}$ și $\vec{A'B'} = t \vec{AB}$, adică $\vec{A'B'}$ este reprezentantul vectorului $t\bar{b}$. Deci \vec{OB}' este reprezentantul sumei $t\bar{a} + t\bar{b}$, adică $t(\bar{a} + \bar{b}) = t\bar{a} + t\bar{b}$. Analog, se tratează cazul $t < 0$. \square

Proprietățile adunării vectorilor liberi și proprietățile înmulțirii vectorilor liberi cu scalari arată că V este un *spațiu vectorial peste câmpul numerelor reale*.

1.4 Coliniaritate și coplanaritate

Fie V spațiul vectorial real al vectorilor liberi. Noțiunile algebrice de subspațiu vectorial, dependență și independență liniară, bază și dimensiune, coordonate, izomorfism de spații vectoriale, le presupunem cunoscute de la partea de algebră liniară.

Pentru început, observăm că oricărui vector \bar{a} de lungime $\|\bar{a}\| > 0$, i se asociază un vector $\bar{a}_0 = \|\bar{a}\|^{-1}\bar{a}$ de lungime 1, numit *versorul* lui \bar{a} . Într-adevăr,

$$\|\bar{a}_0\| = \|\|\bar{a}\|^{-1}\bar{a}\| = \|\bar{a}\|^{-1}\|\bar{a}\| = 1.$$

Deoarece \bar{a}_0 este un vector unitate de același sens ca \bar{a} , putem scrie $\bar{a} = \|\bar{a}\|\bar{a}_0$. În plus, pentru orice versor \bar{a}_0 , avem $\bar{0} = 0 \cdot \bar{a}_0$.

Reamintim că doi vectori din V se numesc *coliniari* dacă au aceeași direcție. Care este echivalentul algebric al coliniarității?

Teorema 8. *Dacă \bar{a} și \bar{b} sunt coliniari și $\bar{a} \neq \bar{0}$, atunci există un număr real t unic astfel încât $\bar{b} = t\bar{a}$.*

Demonstrație. Presupunem că \bar{a} și \bar{b} sunt diferiți. Putem scrie $\bar{a} = \|\bar{a}\|\bar{a}_0$, $\bar{b} = \|\bar{b}\|\bar{b}_0$ și evident versorii \bar{a}_0 și \bar{b}_0 sunt sau egali sau opuși. Pentru $\bar{b}_0 = \bar{a}_0$, găsim

$$\bar{b} = \|\bar{b}\|\bar{b}_0 = \|\bar{b}\|\bar{a}_0 = \|\bar{b}\|\|\bar{a}\|^{-1}\bar{a},$$

deci $t = \|\bar{b}\|\|\bar{a}\|^{-1}$. □

Corolarul 9. *Mulțimea $V_1 = \{\bar{b} \in V \mid \exists t \in \mathbb{R}, \bar{b} = t\bar{a}, \bar{a} \neq \bar{0}\}$, a tuturor vectorilor coliniari cu un vector nenul \bar{a} , este un spațiu vectorial unidimensional.*

Demonstrație. V_1 este un subspațiu vectorial al lui V , iar \bar{a} este un vector liniar independent care generează pe V_1 .

Coliniaritatea a doi vectori liberi este echivalentă cu dependența liniară a acestora. De aceea, doi vectori liberi necoliniari sunt liniar independenți. □

Reamintim că trei vectori din V se numesc *coplanari* dacă reprezentanții lor sunt paraleli cu un plan dat. Care este traducerea algebrică a coplanarității?

Teorema 10. *Vectorii \bar{a} , \bar{b} și \bar{c} sunt coplanari dacă și numai dacă ei sunt liniar dependenți.*

Demonstrație. Presupunem că \bar{a} , \bar{b} și \bar{c} sunt liniar dependenți, adică $\exists r, s, t \in V$, cu $r^2 + s^2 + t^2 \neq 0$, astfel încât $r\bar{a} + s\bar{b} + t\bar{c} = \bar{0}$. Pentru $t \neq 0$, relația se transcrie $\bar{c} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b}$, unde $\alpha = -\frac{r}{t}$ și $\beta = -\frac{s}{t}$.

Rezultă că reprezentanții \vec{OA} , \vec{OB} și \vec{OC} ai vectorilor \bar{a} , \bar{b} , respectiv \bar{c} , satisfac relația

$$\vec{OC} = \vec{OE} + \vec{OF} = \alpha \vec{OA} + \beta \vec{OB},$$

adică \vec{OC} se află în planul determinat de \vec{OA} și \vec{OB} (figura 10).

Raționamentul reciproc este evident. □

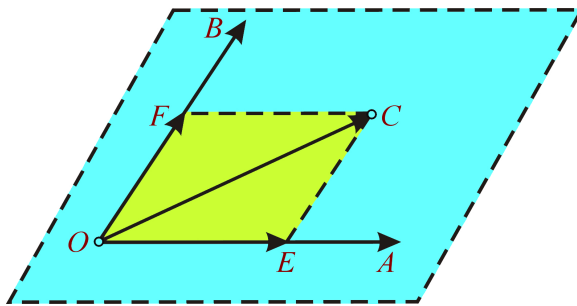


Fig. 10

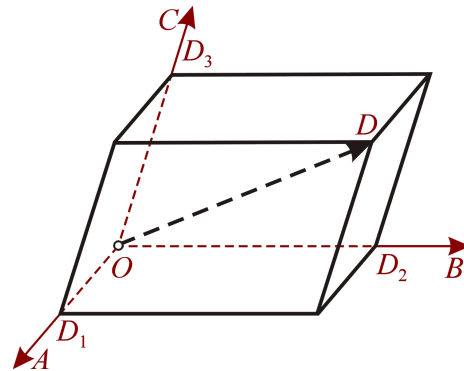


Fig. 11

Corolarul 11. *Mulțimea*

$$V_2 = \{\bar{c} \in V \mid \exists r, s \in \mathbb{R}, \bar{c} = r\bar{a} + s\bar{b}\},$$

a tuturor vectorilor coplanari cu doi vectori necoliniari \bar{a} și \bar{b} , este un spațiu vectorial bidimensional.

Demonstrație. V_2 este un subspațiu vectorial al lui V , iar $\{\bar{a}, \bar{b}\}$ este o mulțime liniar independentă care generează pe V_2 .

Deoarece dependența liniară a trei vectori liberi este echivalentă cu coplanaritatea, rezultă că orice trei vectori liberi necoplanari sunt liniar independenți. \square

Teorema 12. *Spațiul vectorial al vectorilor liberi din E_3 are dimensiunea 3.*

Demonstrație. În V există trei vectori liniar independenți și anume oricare trei vectori necoplanari \bar{a} , \bar{b} și \bar{c} . Să arătăm că aceștia generează pe V . Pentru aceasta, fie \bar{d} un al patrulea vector și \vec{OA} , \vec{OB} , \vec{OC} , \vec{OD} reprezentanții vectorilor \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} , respectiv \bar{d} (figura 11). Observăm că $\vec{OD} = \vec{OD}_1 + \vec{OD}_2 + \vec{OD}_3 = r\vec{OA} + s\vec{OB} + t\vec{OC}$, deci $\bar{d} = r\bar{a} + s\bar{b} + t\bar{c}$.

Dacă $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ este o bază fixată în V_3 și r, s, t sunt coordonatele lui \bar{d} în raport cu această bază, atunci se preferă scrierea $\bar{d}(r, s, t)$ sau identificarea $\bar{d} = (r, s, t)$. În acest context, pentru $\bar{d}_i = (r_i, s_i, t_i) \in V_3$, $i = \overline{1, 3}$, avem:

- 1) $\bar{d}_1 = \bar{d}_2 \Leftrightarrow r_1 = r_2, s_1 = s_2, t_1 = t_2$;
- 2) $\bar{d}_1 + \bar{d}_2 = (r_1 + r_2, s_1 + s_2, t_1 + t_2)$;
- 3) $k\bar{d}_1 = (kr_1, ks_1, kt_1)$;
- 4) \bar{d}_1 este coliniar cu \bar{d}_2 dacă și numai dacă coordonatele lor sunt proporționale;
- 5) vectorii \bar{d}_1 , \bar{d}_2 și \bar{d}_3 sunt coplanari dacă și numai dacă coordonatele unuia sunt combinații liniare de coordonatele celorlalți doi, de exemplu:

$$r_3 = \alpha r_1 + \beta r_2, s_3 = \alpha s_1 + \beta s_2, t_3 = \alpha t_1 + \beta t_2.$$

\square

1.5 Proiecție ortogonală pe o dreaptă

Fie D o dreaptă și \vec{a} un vector liber ce admite ca reprezentant vectorul \vec{AB} . Prin A și B ducem planele P și respectiv Q , perpendiculare pe D . Notând $\{A'\} = D \cap P$ și $\{B'\} = D \cap Q$, obținem proiecția $\vec{A'B'}$.

Teorema 13. Vectorul liber $\overrightarrow{A'B'}$ nu depinde de segmentul orientat \vec{AB} , care reprezintă pe \vec{a} .

Demonstrație. Die \vec{CD} un alt reprezentant al lui \vec{a} și $\vec{C'D'}$ proiecția sa pe dreapta D . Trebuie să arătăm că $\vec{A'B'} \sim \vec{C'D'}$ (figura 12). Pentru aceasta utilizăm paralelogramele $AA'B''B$, $CC'D''D$ și triunghiurile dreptunghice $A'B'B''$, $C'D'D''$.

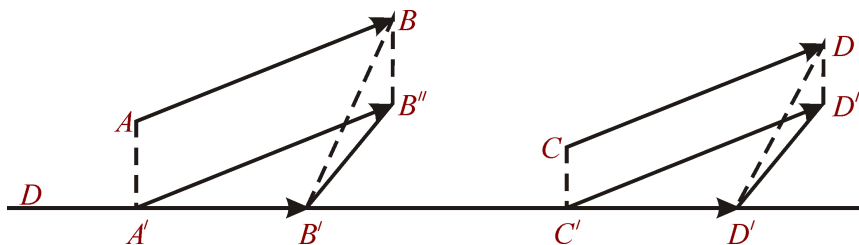


Fig. 12

Segmentele $\vec{A'B'}$ și $\vec{C'D'}$ au:

- 1) aceeași direcție, deoarece sunt situate pe D ;
- 2) același sens;
- 3) aceeași lungime, deoarece triunghiurile dreptunghice $\Delta A'B'B''$ și $\Delta C'D'D''$ sunt congruente.

□

Teorema 13 justifică următoarea:

Definiție 14. Vectorul liber $\overrightarrow{A'B'}$ se numește proiecție ortogonală a vectorului \vec{a} pe dreapta D și se notează $\pi_D(\vec{a})$.

Teorema 15. Dacă D_1 și D_2 sunt drepte paralele, atunci $\pi_{D_1}(\vec{a}) = \pi_{D_2}(\vec{a})$.

Demonstrație. Temă.

□

Rezultă că proiecția ortogonală a unui vector liber pe o dreaptă D depinde numai de direcția lui D . De aceea, dacă \vec{u} este un vector nenul care dă direcția lui D , atunci putem vorbi de proiecția ortogonală a lui \vec{a} pe \vec{u} , pe care o notăm cu $\pi_{\vec{u}}(\vec{a})$. Teorema care urmează arată că π este o transformare liniară.

Teorema 16. Fie $\vec{u} \in V_3 \setminus \{\vec{0}\}$. Pentru orice $\vec{a}, \vec{b} \in V_3$ și orice scalar $t \in \mathbb{R}$, avem:

$$\pi_{\vec{u}}(\vec{a} + \vec{b}) = \pi_{\vec{u}}(\vec{a}) + \pi_{\vec{u}}(\vec{b}); \quad \pi_{\vec{u}}(t\vec{a}) = t\pi_{\vec{u}}(\vec{a}).$$

Demonstrație. Temă.

□

Notăm cu \vec{u} un vector liber și \vec{u}_0 versorul său, adică $\vec{u} = \|\vec{u}\|\vec{u}_0$, cu $\|\vec{u}_0\| = 1$. Pentru orice \vec{a} , vectorul $\pi_{\vec{u}}(\vec{a})$ este coliniar cu \vec{u}_0 , deci există un număr real $\text{pr}_{\vec{u}}\vec{a}$ astfel încât $\pi_{\vec{u}}(\vec{a}) = (\text{pr}_{\vec{u}}\vec{a})\vec{u}_0$ (figura 13).

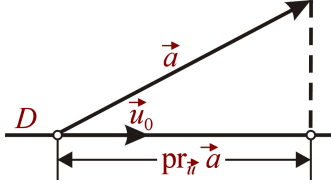


Fig. 13

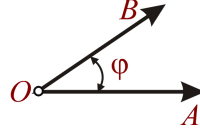


Fig. 14

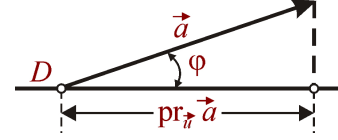


Fig. 15

Definiție 17. Numărul real $\text{pr}_{\vec{u}}\vec{a}$ definit prin relația $\pi_{\vec{u}}(\vec{a}) = (\text{pr}_{\vec{u}}\vec{a})\vec{u}_0$ se numește mărimea algebrică a proiecției ortogonale $\pi_{\vec{u}}(\vec{a})$.

Proprietățile lui π implică:

$$\text{pr}_{\vec{u}}(\vec{a} + \vec{b}) = \text{pr}_{\vec{u}}\vec{a} + \text{pr}_{\vec{u}}\vec{b}; \quad \text{pr}_{\vec{u}}(t\vec{a}) = t\text{pr}_{\vec{u}}\vec{a}.$$

Fie $\vec{a}, \vec{b} \in V_3 \setminus \{0\}$ și \vec{OA}, \vec{OB} segmentele orientate reprezentative. Unghiul $\varphi \in [0, \pi]$ determinat de \vec{OA} și \vec{OB} se numește *unghiul dintre vectorii \vec{a} și \vec{b}* (figura 14). Evident, definiția unghiului nu depinde de punctul O . Dacă cel puțin unul dintre vectorii liberi \vec{a} și \vec{b} este $\vec{0}$, atunci unghiul $\varphi \in [0, \pi]$ dintre \vec{a} și \vec{b} este nedeterminat.

Vectorii \vec{a} și \vec{b} se numesc *ortogonali* dacă unghiul dintre ei este $\frac{\pi}{2}$. Acceptăm că $\vec{0}$ este ortogonal pe orice vector.

Noțiunea de unghi permite să explicităm numărul $\text{pr}_{\vec{u}}\vec{a}$ în funcție de $\|\vec{a}\|$ și de unghiul φ dintre \vec{a} și \vec{u} , anume $\text{pr}_{\vec{u}}\vec{a} = \|\vec{a}\| \cos \varphi$ (figura 15).

Fie P un plan și $\vec{a} \ni \vec{AB}$ un vector liber. Prin A și B ducem drepte perpendiculare pe planul P și notăm cu A' și B' punctele în care aceste perpendiculare înțeapă planul P . Se arată ușor că vectorul liber $\vec{A'B'}$ nu depinde de segmentul \vec{AB} , ci numai de \vec{a} . Din acest motiv, vectorul liber $\vec{A'B'}$ se numește *proiecția ortogonală a vectorului \vec{a} pe planul P* și se notează $\pi_P(\vec{a})$.

Un vector liber are aceeași proiecție pe două plane paralele, adică $\pi_P(\vec{a})$ depinde doar de \vec{a} și de spațiul vectorial bidimensional atașat lui P . Mai mult, se dovedește că proiecția ortogonală a vectorilor liberi pe un plan este o transformare liniară.

1.6 Produs scalar

Definiție 18. Fie V un spațiu vectorial real. O aplicație $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ se numește produs scalar pe V dacă satisface următoarele proprietăți:

- 1) $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle \geq 0$, $\forall \bar{x} \in V$ și $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$; (nenegativitate)
- 2) $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \langle \bar{y}, \bar{x} \rangle$, $\forall \bar{x}, \bar{y} \in V$; (comutativitate)
- 3) $\langle \lambda \bar{x}, \bar{y} \rangle = \lambda \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall \bar{x}, \bar{y} \in V$; (omogenitate)
- 4) $\langle \bar{x} + \bar{y}, \bar{z} \rangle = \langle \bar{x}, \bar{z} \rangle + \langle \bar{y}, \bar{z} \rangle$, $\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in V$. (aditivitate)

Fie V_3 spațiul vectorilor liberi și $\bar{a}, \bar{b} \in V_3$. Pentru $\bar{a} \neq \bar{0}$ și $\bar{b} \neq \bar{0}$, notăm cu $\varphi \in [0, \pi]$ unghiul dintre \bar{a} și \bar{b} .

Teorema 19. *Funcția*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V_3 \times V_3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = \begin{cases} \|\bar{a}\| \|\bar{b}\| \cos \varphi, & \bar{a} \neq \bar{0}, \bar{b} \neq \bar{0} \\ 0, & \bar{a} = \bar{0} \text{ sau } \bar{b} = \bar{0} \end{cases}$$

este un produs scalar pe V_3 .

Demonstrație. Dovedim numai aditivitatea, $\langle \bar{a}, \bar{b} + \bar{c} \rangle = \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle + \langle \bar{a}, \bar{c} \rangle$, întrucât celelalte proprietăți sunt aproape evidente. Cazul $\bar{a} = \bar{0}$ este imediat. Pentru a verifica proprietatea în ipoteza $\bar{a} \neq \bar{0}$, ne folosim de noțiunea de mărime algebrică a unei proiecții ortogonale.

Fie \bar{e} un versor și \bar{b} un vector oarecare. Se observă că $\text{pr}_{\bar{e}} \bar{b} = \langle \bar{e}, \bar{b} \rangle \bar{e}$. Scriem $\bar{a} \neq \bar{0}$ în forma $\bar{a} = \|\bar{a}\| \bar{e}$, cu $\|\bar{e}\| = 1$. Relația $\text{pr}_{\bar{e}}(\bar{b} + \bar{c}) = \text{pr}_{\bar{e}} \bar{b} + \text{pr}_{\bar{e}} \bar{c}$ este echivalentă cu $\langle \bar{e}, \bar{b} + \bar{c} \rangle = \langle \bar{e}, \bar{b} \rangle + \langle \bar{e}, \bar{c} \rangle$. Înmulțind cu $\|\bar{a}\|$ și ținând seama de omogenitate, deducem $\langle \|\bar{a}\| \bar{e}, \bar{b} + \bar{c} \rangle = \langle \|\bar{a}\| \bar{e}, \bar{b} \rangle + \langle \|\bar{a}\| \bar{e}, \bar{c} \rangle$, ceea ce trebuia demonstrat. \square

Observații:

- 1) Teorema 19 arată că V_3 este un spațiu vectorial euclidian.
- 2) Relația $\langle \bar{a}, \bar{a} \rangle = \|\bar{a}\|^2 \geq 0$ este echivalentă cu $\|\bar{a}\| = \sqrt{\langle \bar{a}, \bar{a} \rangle}$, ultima permițând calculul lungimii vectorului liber \bar{a} dacă se cunoaște produsul scalar $\langle \bar{a}, \bar{a} \rangle$.
- 3) Relația $|\cos \varphi| \leq 1$ implică inegalitatea Cauchy-Schwarz, $|\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle| \leq \|\bar{a}\| \|\bar{b}\|$.
- 4) Doi vectori liberi sunt ortogonali dacă și numai dacă produsul lor scalar este nul.

Fie $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ o bază în V_3 și $\bar{u} = r_1 \bar{a} + s_1 \bar{b} + t_1 \bar{c}$, $\bar{v} = r_2 \bar{a} + s_2 \bar{b} + t_2 \bar{c}$. Proprietățile produsului scalar implică

$$\begin{aligned} \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle &= \langle r_1 \bar{a} + s_1 \bar{b} + t_1 \bar{c}, r_2 \bar{a} + s_2 \bar{b} + t_2 \bar{c} \rangle = \dots = r_1 r_2 \langle \bar{a}, \bar{a} \rangle + r_1 s_2 \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle + r_1 t_2 \langle \bar{a}, \bar{c} \rangle \\ &+ s_1 r_2 \langle \bar{b}, \bar{a} \rangle + s_1 s_2 \langle \bar{b}, \bar{b} \rangle + s_1 t_2 \langle \bar{b}, \bar{c} \rangle + t_1 r_2 \langle \bar{c}, \bar{a} \rangle + t_1 s_2 \langle \bar{c}, \bar{b} \rangle + t_1 t_2 \langle \bar{c}, \bar{c} \rangle. \end{aligned}$$

Deci produsul scalar $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$ este cunoscut dacă se dă tabelul de înmulțire scalară a vectorilor din baza $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$, adică

$\langle \cdot, \cdot \rangle$	\bar{a}	\bar{b}	\bar{c}
\bar{a}	$\langle \bar{a}, \bar{a} \rangle$	$\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$	$\langle \bar{a}, \bar{c} \rangle$
\bar{b}	$\langle \bar{b}, \bar{a} \rangle$	$\langle \bar{b}, \bar{b} \rangle$	$\langle \bar{b}, \bar{c} \rangle$
\bar{c}	$\langle \bar{c}, \bar{a} \rangle$	$\langle \bar{c}, \bar{b} \rangle$	$\langle \bar{c}, \bar{c} \rangle$

Pentru calcule este avantajos să alegem baze pentru care tabelul precedent să fie cât mai simplu posibil. Un exemplu îl constituie baza ortonormată a cărei existență în V_3 este evidentă.

O bază în V_3 formată din versori reciproc ortogonali se numește *bază ortonormată* și se notează cu $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$. Coordonatele unui vector în raport cu baza ortonormată se numesc *coordonate euclidiene*. Baza ortonormată $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ este caracterizată prin relațiile:

$$\begin{aligned} \langle \bar{i}, \bar{i} \rangle &= 1, & \langle \bar{i}, \bar{j} \rangle &= 0, & \langle \bar{i}, \bar{k} \rangle &= 0, \\ \langle \bar{j}, \bar{i} \rangle &= 0, & \langle \bar{j}, \bar{j} \rangle &= 1, & \langle \bar{j}, \bar{k} \rangle &= 0, \\ \langle \bar{k}, \bar{i} \rangle &= 0, & \langle \bar{k}, \bar{j} \rangle &= 0, & \langle \bar{k}, \bar{k} \rangle &= 1, \end{aligned}$$

sintetizate în următorul tabel:

$\langle \cdot, \cdot \rangle$	\bar{i}	\bar{j}	\bar{k}
\bar{i}	1	0	0
\bar{j}	0	1	0
\bar{k}	0	0	1

Acest tabel conduce la *expresia canonică a produsului scalar*. Într-adevăr, pentru $\bar{a} = r_1\bar{i} + s_1\bar{j} + t_1\bar{k}$ și $\bar{b} = r_2\bar{i} + s_2\bar{j} + t_2\bar{k}$ găsim

$$\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = r_1r_2 + s_1s_2 + t_1t_2.$$

Evident $\langle \bar{a}, \bar{i} \rangle = r_1$, $\langle \bar{a}, \bar{j} \rangle = s_1$, $\langle \bar{a}, \bar{k} \rangle = t_1$ și astfel coordonatele euclidiene ale vectorului \bar{a} sunt de fapt proiecțiile ortogonale ale lui \bar{a} pe cele trei axe de coordonate.

Din produsul scalar obținem norma vectorului \bar{a} și anume

$$a = \|\bar{a}\| = \sqrt{\langle \bar{a}, \bar{a} \rangle} = \sqrt{r_1^2 + s_1^2 + t_1^2}.$$

În consecință, unghiul dintre vectorii nenuli $\bar{a} = r_1\bar{i} + s_1\bar{j} + t_1\bar{k}$ și $\bar{b} = r_2\bar{i} + s_2\bar{j} + t_2\bar{k}$ este dat de formula

$$\cos \varphi = \frac{\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle}{\|\bar{a}\| \|\bar{b}\|} = \frac{r_1r_2 + s_1s_2 + t_1t_2}{\sqrt{r_1^2 + s_1^2 + t_1^2} \sqrt{r_2^2 + s_2^2 + t_2^2}}, \quad \varphi \in [0, \pi].$$

În particular, vectorii \bar{a} și \bar{b} sunt perpendiculari (ortogonali) dacă și numai dacă $r_1r_2 + s_1s_2 + t_1t_2 = 0$.

1.7 Produs vectorial

Fie V_3 spațiul vectorilor liberi și $\bar{a}, \bar{b} \in V_3$. Pentru $\bar{a} \neq \bar{0}$ și $\bar{b} \neq \bar{0}$, notăm cu $\varphi \in [0, \pi]$ unghiul dintre \bar{a} și \bar{b} .

Definiție 20. Vectorul

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{cases} \|\bar{a}\| \|\bar{b}\| \sin \varphi \bar{e}, & \bar{a}, \bar{b} \text{ necoliniari} \\ \bar{0}, & \bar{a}, \bar{b} \text{ coliniari,} \end{cases}$$

unde \bar{e} este un versor perpendicular pe \bar{a} și \bar{b} și cu sensul dat de regula mâinii drepte pentru tripletul $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{e})$, se numește produsul vectorial dintre \bar{a} și \bar{b} (figura 16).

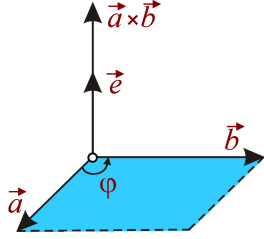


Fig. 16

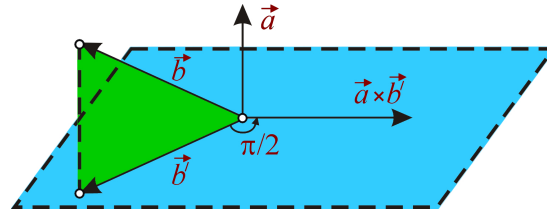


Fig. 17

Produsul vectorial dintre doi vectori liberi generează o aplicație biliniară definită pe $V_3 \times V_3$ cu valori în V_3 .

Pornind de la definiție, se deduc următoarele **proprietăți**:

- 1) $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$ (anticomutativitate);
- 2) $t(\bar{a} \times \bar{b}) = (t\bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (t\bar{b})$, $t \in \mathbb{R}$ (omogenitate);
- 3) $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$ (distributivitate);
- 4) $\bar{a} \times \bar{0} = \bar{0}$, $\bar{a} \times \bar{a} = \bar{0}$;
- 5) $\|\bar{a} \times \bar{b}\|^2 = \|\bar{a}\|^2\|\bar{b}\|^2 - \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle^2$ (identitatea Lagrange);

6) produsul vectorial a doi vectori nenuli este nul dacă și numai dacă vectorii sunt coliniari; dacă \bar{a} și \bar{b} nu sunt coliniari, atunci norma $\|\bar{a} \times \bar{b}\|$ reprezintă aria paralelogramului construit pe reprezentanții \vec{OA} și \vec{OB} ai vectorilor \bar{a} și \bar{b} (figura 16).

Demonstrație. Proprietățile 1), 2), 4) și 6) se demonstrează fără dificultate. Pentru a demonstra proprietatea 3) ne folosim de 2), de proprietățile înmulțirii unui vector cu un număr și de proiecția unui vector pe un plan. Fără a restrânge generalitatea, presupunem că \bar{a} este un versor. Notăm cu P un plan perpendicular pe \bar{a} și cu \bar{b}' , \bar{c}' proiecțiile lui \bar{b} , respectiv \bar{c} pe planul P . Atunci $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{a} \times \bar{b}'$, $\bar{a} \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c}'$, iar $\bar{a} \times \bar{b}'$, $\bar{a} \times \bar{c}'$ și $\bar{a} \times (\bar{b}' + \bar{c}')$ sunt obținute din \bar{b}' , \bar{c}' și respectiv $\bar{b}' + \bar{c}'$ prin rotația de unghi $\frac{\pi}{2}$ în jurul axei de versor \bar{a} (figura 17). Deoarece rotația sumei este suma rotațiilor, adică

$$\bar{a} \times (\bar{b}' + \bar{c}') = \bar{a} \times \bar{b}' + \bar{a} \times \bar{c}',$$

rezultă automat

$$\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}.$$

Pentru a obține identitatea Lagrange, pornim de la identitatea trigonometrică

$$\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi,$$

pe care o înmulțim cu $\|\bar{a}\|^2\|\bar{b}\|^2$. □

În raport cu baza ortonormată $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$, vectorii \bar{a} și \bar{b} admit respectiv descompunerile $\bar{a} = r_1\bar{i} + s_1\bar{j} + t_1\bar{k}$ și $\bar{b} = r_2\bar{i} + s_2\bar{j} + t_2\bar{k}$. Folosind definiția produsului vectorial și proprietățile 1), 2), 3) și 6), obținem tabelul

\times	\bar{i}	\bar{j}	\bar{k}
\bar{i}	$\bar{0}$	\bar{k}	$-\bar{j}$
\bar{j}	$-\bar{k}$	$\bar{0}$	\bar{i}
\bar{k}	\bar{j}	$-\bar{i}$	$\bar{0}$

care conduce la expresia canonică a produsului vectorial,

$$\bar{a} \times \bar{b} = (s_1t_2 - s_2t_1)\bar{i} + (r_2t_1 - r_1t_2)\bar{j} + (r_1s_2 - r_2s_1)\bar{k}$$

sau simbolic

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ r_1 & s_1 & t_1 \\ r_2 & s_2 & t_2 \end{vmatrix}.$$

Definiție 21. Vectorul $\bar{w} = \bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$ se numește dublu produs vectorial al vectorilor \bar{a} , \bar{b} și \bar{c} .

Exprimând pe \bar{a} , \bar{b} și \bar{c} în baza ortonormată $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ și folosind expresiile canonice ale produsului scalar și vectorial, se poate arăta că

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \langle \bar{a}, \bar{c} \rangle \bar{b} - \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle \bar{c}.$$

Această relație pune în evidență coplanaritatea vectorilor \bar{w} , \bar{b} și \bar{c} (figura 18), unde $\bar{d} = \bar{b} \times \bar{c}$ și $\bar{w} \perp \bar{a}$, $\bar{w} \perp \bar{d}$.

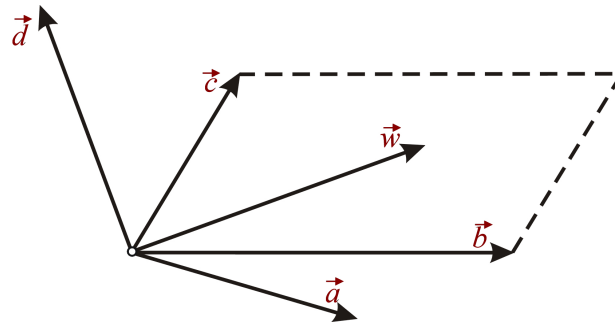


Fig. 18

Observații:

- 1) Avem $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) \neq (\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c}$.
- 2) Expresia dublului produs vectorial se reține mai ușor dacă este scrisă sub forma determinantului simbolic

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \begin{vmatrix} \bar{b} & \bar{c} \\ \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle & \langle \bar{a}, \bar{c} \rangle \end{vmatrix}.$$

Aplicații:

1. Dându-se punctele $M_i(\bar{r}_i)$, $i = \overline{1, 3}$, să se stabilească condiția ca aceste trei puncte să fie coliniare.

Soluție. Impunem anularea produsului vectorial $M_1\vec{M}_2 \times M_1\vec{M}_3$. Folosind vectorii de poziție ai punctelor și proprietățile produsului vectorial, obținem

$$(\bar{r}_2 - \bar{r}_1) \times (\bar{r}_3 - \bar{r}_1) = 0$$

sau

$$\bar{r}_1 \times \bar{r}_2 + \bar{r}_2 \times \bar{r}_3 + \bar{r}_3 \times \bar{r}_1 = \vec{0}.$$

2. Fiind dați vectorii $\overline{OA} = \bar{j} - 3\bar{k}$, $\overline{AC} = 4\bar{i} + 7\bar{j}$, $\overline{BC} = 4\bar{i} + 8\bar{j} - 8\bar{k}$, să se găsească vectorul de poziție al punctului B , respectiv C și să se calculeze lungimea înălțimii $[AA']$ a triunghiului ABC .

Soluție. Se constată că punctele A , B și C nu sunt coliniare, deoarece coordonatele vectorilor \overline{AC} și \overline{BC} nu sunt proporționale. Mai mult, $\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC} = 4\bar{i} + 8\bar{j} - 3\bar{k}$ și $\overline{OB} = \overline{OC} - \overline{BC} = 5\bar{k}$.

Înălțimea $[AA']$ a triunghiului ABC coincide cu înălțimea paralelogramului construit pe reprezentanții vectorilor \overline{BA} și \overline{BC} . Găsim:

$$\overline{BA} \times \overline{BC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 1 & -8 \\ 4 & 8 & -8 \end{vmatrix} = 4(14\bar{i} - 8\bar{j} - \bar{k}), \quad \|\overline{BA} \times \overline{BC}\| = 4\sqrt{261},$$

$$AA' = \frac{\|\overline{BA} \times \overline{BC}\|}{\|\overline{BC}\|} = \sqrt{29}.$$

1.8 Produs mixt

Definiție 22. Fiind dați vectorii liberi \bar{a} , \bar{b} și \bar{c} , numărul $\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \rangle = \langle \bar{a}, \bar{b} \times \bar{c} \rangle$ se numește produsul mixt al acestor vectori.

Dacă vectorii \bar{a} , \bar{b} și \bar{c} sunt necoplanari, atunci modulul produsului mixt reprezintă volumul paralelipipedului care se poate construi pe reprezentanții cu originea comună a celor trei vectori (figura 19). Într-adevăr, fie θ unghiul dintre vectorii \bar{b} și \bar{c} și fie φ unghiul dintre vectorii \bar{a} și $\bar{d} = \bar{b} \times \bar{c}$, atunci

$$\begin{aligned} \langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \rangle &= \langle \bar{a}, \bar{d} \rangle = \|\bar{a}\| \|\bar{d}\| \cos \varphi = \|\bar{b} \times \bar{c}\| \|\bar{a}\| \cos \varphi \\ &= (\|\bar{b}\| \|\bar{c}\| \sin \theta) \|\bar{a}\| \cos \varphi = \pm \mathcal{V}. \end{aligned}$$

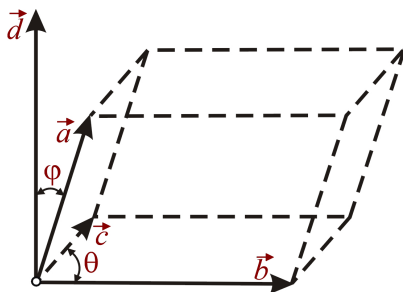


Fig. 19

Pornind de la definiție, se deduc următoarele **proprietăți**:

- 1) $\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \rangle = \langle \bar{c}, \bar{a}, \bar{b} \rangle = \langle \bar{b}, \bar{c}, \bar{a} \rangle$;
- 2) $\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \rangle = -\langle \bar{a}, \bar{c}, \bar{b} \rangle$;
- 3) $\langle t\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \rangle = \langle \bar{a}, t\bar{b}, \bar{c} \rangle = \langle \bar{a}, \bar{b}, t\bar{c} \rangle$, $t \in \mathbb{R}$;
- 4) $\langle \bar{a}_1 + \bar{a}_2, \bar{b}, \bar{c} \rangle = \langle \bar{a}_1, \bar{b}, \bar{c} \rangle + \langle \bar{a}_2, \bar{b}, \bar{c} \rangle$;
- 5) $\langle \bar{a} \times \bar{b}, \bar{c} \times \bar{d} \rangle = \begin{vmatrix} \langle \bar{a}, \bar{c} \rangle & \langle \bar{a}, \bar{d} \rangle \\ \langle \bar{b}, \bar{c} \rangle & \langle \bar{b}, \bar{d} \rangle \end{vmatrix}$ (identitatea Lagrange);
- 6) $\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \rangle = 0$ dacă și numai dacă:
 - i) cel puțin unul dintre vectorii \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} este nul;
 - ii) doi dintre vectori sunt coliniari;
 - iii) vectorii \bar{a} , \bar{b} și \bar{c} sunt coplanari.

Demonstrație. Se demonstrează proprietatea 5), iar restul le lăsăm ca exercițiu pentru cititor. Notând $\bar{m} = \bar{c} \times \bar{d}$, obținem

$$\begin{aligned} \langle \bar{a} \times \bar{b}, \bar{c} \times \bar{d} \rangle &= \langle \bar{a} \times \bar{b}, \bar{m} \rangle = \langle \bar{a}, \bar{b} \times \bar{m} \rangle = \langle \bar{a}, \bar{b} \times \langle \bar{c} \times \bar{d} \rangle \rangle = \langle \bar{a}, \langle \bar{b}, \bar{d} \rangle \bar{c} - \langle \bar{b}, \bar{c} \rangle \bar{d} \rangle \\ &= \langle \bar{a}, \bar{c} \rangle \langle \bar{b}, \bar{d} \rangle - \langle \bar{a}, \bar{d} \rangle \langle \bar{b}, \bar{c} \rangle = \begin{vmatrix} \langle \bar{a}, \bar{c} \rangle & \langle \bar{a}, \bar{d} \rangle \\ \langle \bar{b}, \bar{c} \rangle & \langle \bar{b}, \bar{d} \rangle \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

□

Fie $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ o bază ortonormată. Dacă $\bar{a} = r_1\bar{i} + s_1\bar{j} + t_1\bar{k}$, $\bar{b} = r_2\bar{i} + s_2\bar{j} + t_2\bar{k}$ și $\bar{c} = r_3\bar{i} + s_3\bar{j} + t_3\bar{k}$, atunci produsul mixt capătă expresia canonică

$$\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \rangle = \begin{vmatrix} r_1 & s_1 & t_1 \\ r_2 & s_2 & t_2 \\ r_3 & s_3 & t_3 \end{vmatrix}.$$

În consecință, proprietățile produsului mixt se pot justifica cu ajutorul proprietăților determinantilor de ordinul 3.

Baza vectorială $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ se numește *orientată pozitiv (negativ)* dacă produsul mixt $\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \rangle$ este pozitiv (negativ). Prin urmare, baza ortonormată $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$, cu $\bar{i} = (1, 0, 0)$, $\bar{j} = (0, 1, 0)$ și $\bar{k} = (0, 0, 1)$ este orientată pozitiv întrucât $\langle \bar{i}, \bar{j}, \bar{k} \rangle = 1$.

Aplicație. Să se arate că vectorii \bar{a} , \bar{b} și \bar{c} sunt coplanari dacă și numai dacă determinantul lor Gram este nul.

Soluție. Prin determinant Gram al vectorilor \bar{a} , \bar{b} și \bar{c} înțelegem numărul

$$G = \begin{vmatrix} \langle \bar{a}, \bar{a} \rangle & \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle & \langle \bar{a}, \bar{c} \rangle \\ \langle \bar{b}, \bar{a} \rangle & \langle \bar{b}, \bar{b} \rangle & \langle \bar{b}, \bar{c} \rangle \\ \langle \bar{c}, \bar{a} \rangle & \langle \bar{c}, \bar{b} \rangle & \langle \bar{c}, \bar{c} \rangle \end{vmatrix}.$$

Vectorii \bar{a} , \bar{b} și \bar{c} sunt coplanari dacă și numai dacă $\mathcal{V} = \langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \rangle = 0$ sau dacă și numai dacă $\mathcal{V}^2 = \langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \rangle^2 = 0$. Pe de altă parte, relația $\det A = \det {}^t A$ conduce la

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^2 &= \begin{vmatrix} r_1 & s_1 & t_1 \\ r_2 & s_2 & t_2 \\ r_3 & s_3 & t_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} r_1^2 + s_1^2 + t_1^2 & r_1r_2 + s_1s_2 + t_1t_2 & r_1r_3 + s_1s_3 + t_1t_3 \\ r_2r_1 + s_2s_1 + t_2t_1 & r_2^2 + s_2^2 + t_2^2 & r_2r_3 + s_2s_3 + t_2t_3 \\ r_3r_1 + s_3s_1 + t_3t_1 & r_3r_2 + s_3s_2 + t_3t_2 & r_3^2 + s_3^2 + t_3^2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \langle \bar{a}, \bar{a} \rangle & \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle & \langle \bar{a}, \bar{c} \rangle \\ \langle \bar{b}, \bar{a} \rangle & \langle \bar{b}, \bar{b} \rangle & \langle \bar{b}, \bar{c} \rangle \\ \langle \bar{c}, \bar{a} \rangle & \langle \bar{c}, \bar{b} \rangle & \langle \bar{c}, \bar{c} \rangle \end{vmatrix} = G. \end{aligned}$$

1.9 Probleme propuse

1. Fie trapezul dreptunghic $ABCD$ în care avem $AD \parallel BC$, $\overline{AD} = \bar{a}$, $\overline{AB} = \bar{b}$ și $m(\widehat{ABC}) = \frac{5\pi}{6}$. Să se descompună vectorii \overline{BC} , \overline{DC} , \overline{AC} și \overline{BD} după vectorii \bar{a} și \bar{b} .

2. Se dau vectorii:

$$\bar{d}_1 = \bar{a} - \alpha\bar{b} + 3\bar{c}, \quad \bar{d}_2 = \alpha\bar{a} - \bar{b} + \bar{c}, \quad \bar{d}_3 = 3\bar{a} + \bar{b} - \bar{c},$$

unde $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ este o bază din V_3 . Să se determine $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii \bar{d}_i , $i = \overline{1, 3}$, să fie coplanari.

Pentru α astfel găsit, să se descompună vectorul \bar{d}_2 după vectorii \bar{d}_1 și \bar{d}_3 .

3. Se dau vectorii $\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j} + \mu\bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k} \in V_3$, unde $\mu \in \mathbb{R}$.

a) Aflați produsul vectorial $\bar{a} \times \bar{b}$.

b) Este $S = \{\bar{a}, \bar{b}\}$ familie de vectori linear independentă? Sunt cei doi vectori necoliniari? Dacă da, completați S la o bază a spațiului V_3 .

c) Pentru $\mu = 2$ aflați ariile paralelogramului și triunghiului determinate de \bar{a} și \bar{b} ca muchii adiacente.

4. Se dau vectorii $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$, $\bar{b} = \mu\bar{k} + \bar{j}$, $\bar{c} = \bar{k} + \bar{j} \in V_3$, unde $\mu \in \mathbb{R}$.

a) Calculați produsul mixt $\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \rangle$.

b) Sunt cei trei vectori linear independenți? Dar necoplanari? În cazul independenței liniare, determină acești vectori o bază pozitiv orientată în V_3 ?

c) Pentru $\mu = 0$ aflați volumele tetraedrului, prismei triunghiulare și paralelipipedului determinate de \bar{a} , \bar{b} și \bar{c} ca muchii adiacente.

5. Se dau punctele A , B și C prin vectorii lor de poziție:

$$\overline{OA} = 14\bar{i} - 7\bar{j} + 2\bar{k}, \quad \overline{OB} = 2\bar{i} + 2\bar{j} - 7\bar{k}, \quad \overline{OC} = -2\bar{i} + 7\bar{j} + 2\bar{k}.$$

Să se arate că triunghiul AOB este dreptunghic și triunghiul BOC este isoscel. Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC și măsura unghiului BAC și să se scrie expresia analitică (în coordonate) a versorului bisectoarei unghiului BAC .

6. Se dau vectorii:

$$\bar{a} = \bar{i} + 2\lambda\bar{j} - (\lambda - 1)\bar{k}, \quad \bar{b} = (3 - \lambda)\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

și se cere valoarea lui λ pentru care \bar{a} și \bar{b} sunt ortogonali. Pentru λ astfel găsit, să se calculeze mărimea algebrică a proiecției vectorului \bar{a} pe vectorul $\bar{a} + \bar{b}$.

7. Să se calculeze aria paralelogramului construit pe reprezentanții cu originea comună ai vectorilor

$$\bar{r}_1 = \frac{1 + \cos v}{\cos^2 u} \bar{j} + \frac{\sin u \sin v}{\cos^2 u} \bar{k} \quad \text{și} \quad \bar{r}_2 = -\sin v \bar{i} - \sin v \tan u \bar{j} + \frac{\cos v}{\cos u} \bar{k},$$

folosind identitatea Lagrange.

8. Fiind dați vectorii:

$$\bar{a} = \bar{i} - 5\bar{j} - 7\bar{k}, \quad \bar{b} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + 6\bar{k}, \quad \bar{c} = -\bar{i} + 2\bar{j} - 2\bar{k},$$

să se calculeze $\bar{w} = \bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$ și să se verifice linear dependența vectorilor \bar{w} , \bar{b} și \bar{c} .

9. Se dau vectorii $\bar{a} = \bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}$, $\bar{c} = \bar{k} + \bar{j}$.

a) Aflați dublul produs vectorial $\bar{w} = \bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$.

b) Recalculați \bar{w} folosind formula de calcul prescurtat $\bar{w} = \langle \bar{a}, \bar{c} \rangle \bar{b} - \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle \bar{c} = \begin{vmatrix} \bar{b} & \bar{c} \\ \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle & \langle \bar{a}, \bar{c} \rangle \end{vmatrix}$.

c) Arătați că \bar{w} este perpendicular pe \bar{a} și coplanar cu \bar{b} și \bar{c} .

10. Fie triedrul $\{O; \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$. Vectorii definiți prin:

$$\bar{a}' = \frac{\bar{b} \times \bar{c}}{\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \rangle}, \quad \bar{b}' = \frac{\bar{c} \times \bar{a}}{\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \rangle}, \quad \bar{c}' = \frac{\bar{a} \times \bar{b}}{\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \rangle}$$

se numesc *reciprocii* vectorilor \bar{a} , \bar{b} și \bar{c} , iar triedrul $\{O; \bar{a}', \bar{b}', \bar{c}'\}$ se numește *triedrul reciproc*. Să se arate că:

a) $\bar{a} \cdot \bar{a}' = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3.$

b) $(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})(\bar{a}' + \bar{b}' + \bar{c}') = 3.$

c) $\langle \bar{a}' \times \bar{b}', \bar{b}' \times \bar{c}', \bar{c}' \times \bar{a}' \rangle = \frac{1}{\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \rangle^2}.$

11. Demonstrați următoarele identități:

a) $\langle \bar{a} \times \bar{b}, \bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) \rangle = -\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle \langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \rangle;$

b) $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) + \bar{b} \times (\bar{c} \times \bar{a}) + \bar{c} \times (\bar{a} \times \bar{b}) = 0;$

c) $\langle \bar{a} \times \bar{b}, \bar{b} \times \bar{c}, \bar{c} \times \bar{a} \rangle = \langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \rangle^2;$

d) $\bar{a} \times [\bar{b} \times (\bar{c} \times \bar{d})] = \begin{vmatrix} \bar{a} \times \bar{c} & \bar{a} \times \bar{d} \\ \langle \bar{b}, \bar{c} \rangle & \langle \bar{b}, \bar{d} \rangle \end{vmatrix}.$

12. Se dau vectorii:

$$\bar{a} = \bar{i} - \alpha \bar{j} + 3\bar{k}, \quad \bar{b} = \alpha \bar{i} - \bar{j} + \bar{k}, \quad \bar{c} = 3\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}.$$

Să se găsească valoarea lui α astfel încât vectorii \bar{a} , \bar{b} și \bar{c} să fie coplanari. Pentru $\alpha = 2$, să se afle înălțimea paralelipipedului construit pe reprezentanții vectorilor \bar{a} , \bar{b} și \bar{c} , știind că ea corespunde bazei formate de reprezentanții vectorilor \bar{a} și \bar{b} .

13. Să se arate că punctele $A(1, 1, 1)$, $B(3, -1, 4)$, $C(0, 7, -3)$ și $D(5, 7, 2)$ sunt coplanare.

Capitolul 2

Dreapta și planul în spațiu

2.1 Reper cartezian

Este cunoscut faptul că spațiile E_3 și V_3 sunt în corespondență biunivocă, bijecția fiind unic determinată prin fixarea originii, iar spațiile vectoriale V_3 și \mathbb{R}^3 sunt izomorfe, izomorfismul fiind unic determinat prin fixarea bazelor în cele două spații. Într-adevăr, în ipoteza că am fixat un punct O , numit *origine* în E_3 și o bază ortonormată $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ în V_3 , fiecărui punct M din E_3 îi corespunde în mod unic un vector $\bar{r} = \overline{OM}$, numit *vector de poziție* al punctului M . Acestui vector îi corespunde în mod unic tripletul ordonat de numere reale $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, numite *coordonatele euclidiene* ale vectorului \overline{OM} în raport cu baza $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$; scriem $\overline{OM} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$.

Ansamblul $\{O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ se numește *reper cartezian* în E_3 . Punctul O se numește *originea reperului*, iar $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ se numește *baza reperului*. Coordonatele euclidiene (x, y, z) ale vectorului de poziție $\bar{r} = \overline{OM}$ se numesc *coordonatele carteziene ale punctului M* față de reperul ortonormat $\{O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$, cu $x = \langle \bar{i}, \bar{r} \rangle = p\bar{r}_{\bar{i}}$ \bar{r} =abscisa, $y = \langle \bar{j}, \bar{r} \rangle = p\bar{r}_{\bar{j}}$ \bar{r} =ordonata și $z = \langle \bar{k}, \bar{r} \rangle = p\bar{r}_{\bar{k}}$ \bar{r} =cota.

Bijecția dintre E_3 și \mathbb{R}^3 determinată prin fixarea reperului cartezian se numește *sistem de coordonate cartezian* și se notează prin $M(x, y, z)$. Aceste bijecții permit deseori identificarea spațiilor E_3 , V_3 și \mathbb{R}^3 .

Versorilor \bar{i} , \bar{j} și \bar{k} le atașăm axele de coordonate Ox , Oy , respectiv Oz care au același sens cu sensul pozitiv al acestor versori. Coordonatele carteziene ale punctului M reprezintă mărimile algebrice ale proiecțiilor ortogonale ale vectorului \overline{OM} pe cele trei axe de coordonate (figura 1).

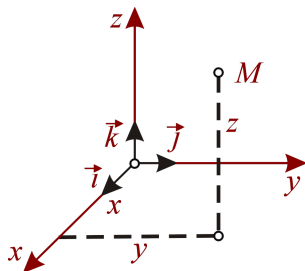


Fig. 1

Axele sunt formate din punctele (x, y, z) caracterizate respectiv prin ecuațiile:

$$Ox: \begin{cases} y = 0 \\ z = 0; \end{cases} \quad Oy: \begin{cases} z = 0 \\ x = 0; \end{cases} \quad Oz: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0. \end{cases}$$

Cele trei axe determină planele xOy , yOz și zOx , numite *plane de coordonate*. Ele sunt caracterizate respectiv prin ecuațiile $xOy: z = 0$, $yOz: x = 0$, $xOz: y = 0$. Cele trei plane de coordonate împart spațiul în opt regiuni numite *octante* (sau octanți).

Uneori reperul cartezian este indicat prin notația $Oxyz$, prin aceasta înțelegându-se că s-au fixat originea O și axele reciproc ortogonale Ox , Oy și Oz . Evident, versorii reciproc ortogonali \bar{i} , \bar{j} și \bar{k} rezultă din context.

În cele ce urmează, presupunem cunoscute noțiunile elementare din geometria euclidiană ca punct, dreaptă, plan, perpendiculară etc. De asemenea, presupunem că V_3 este raportat la baza ortonormată $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$, iar E_3 la reperul cartezian $\{O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$.

2.2 Ecuațiile dreptei în spațiu

O dreaptă în spațiu poate fi determinată de:

- un punct și un vector nenul;
- două puncte;
- intersecția a două plane.

Ne propunem să transformăm aceste condiții din E_3 în ecuații în V_3 sau în \mathbb{R}^3 .

2.2.1 Dreapta determinată de un punct și un vector nenul

Punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\bar{r}_0 = x_0\bar{i} + y_0\bar{j} + z_0\bar{k}$ și un vector nenul $\bar{a}(\ell, m, n)$ din V_3 fixează o dreaptă D care trece prin M_0 și are direcția lui \bar{a} (figura 2).

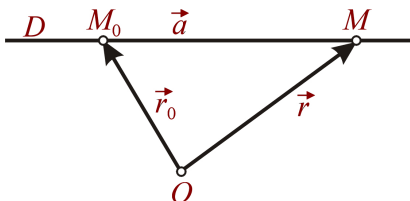


Fig. 2

Punctul generic $M(x, y, z)$ aparține dreptei D dacă și numai dacă vectorii $\overline{M_0M}$ și \bar{a} sunt coliniari, adică $(\bar{r} - \bar{r}_0) \times \bar{a} = 0$. Această ecuație în V_3 se numește *ecuația vectorială* a dreptei definită de un punct și o direcție. Vectorul $\bar{a}(\ell, m, n) \neq 0$ care dă direcția dreptei D , se numește *vector director*, iar vectorul $k\bar{a}$, $k \neq 0$, joacă același rol ca \bar{a} .

Coliniaritatea vectorilor $\bar{r} - \bar{r}_0$ și \bar{a} se pune în evidență și prin ecuația vectorială

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{a}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Această ecuație vectorială este echivalentă cu trei ecuații în \mathbb{R}^3 ,

$$x = x_0 + t\ell, \quad y = y_0 + tm, \quad z = z_0 + tn, \quad t \in \mathbb{R},$$

numite *ecuații parametrice ale dreptei D*. Aceste ecuații se pot înlocui cu două *ecuații carteziene* în \mathbb{R}^3 ,

$$\frac{x - x_0}{\ell} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

cu convenția că dacă un numitor este nul, atunci numărătorul respectiv trebuie egalat cu 0.

Observație. Deoarece $\bar{a}(\ell, m, n) \neq \bar{0}(0, 0, 0)$, cel mult două dintre numerele ℓ , m și n se pot anula.

1) Dacă $\ell = 0$ și $mn \neq 0$, atunci ecuațiile carteziene precedente sunt echivalente cu

$$x = x_0, \quad \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

și reprezintă o dreaptă paralelă cu planul yOz .

2) Dacă $\ell = m = 0$ și $n \neq 0$, atunci ecuațiile carteziene precedente se reduc la

$$x = x_0, \quad y = y_0$$

și reprezintă o dreaptă paralelă cu Oz .

2.2.2 Dreapta determinată de două puncte

Două puncte distincte $M_1(x_1, y_1, z_1)$ și $M_2(x_2, y_2, z_2)$ determină o dreaptă D și numai una. Pentru a scrie ecuațiile acestei drepte ne folosim de explicațiile anterioare și anume, vom considera dreapta ca fiind determinată de punctul M_1 și de vectorul director \bar{a} reprezentate în figura 3.

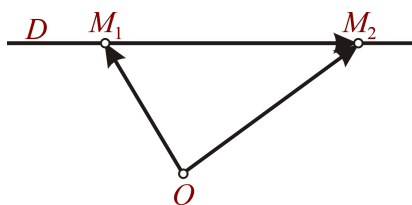


Fig. 3

Astfel, *ecuațiile carteziene* ale dreptei D sunt

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

2.2.3 Dreapta orientată

Fie D o dreaptă în spațiu. Pe D se pot stabili două sensuri de parcurs, corespondente relațiilor de ordine pe mulțimea punctelor dreptei, pe care convenim să le notăm cu $(+)$ și $(-)$. O dreaptă D împreună cu o alegere a unui sens de parcurs se numește *dreaptă orientată*.

Dacă \bar{a} este un vector director al dreptei D , atunci se acceptă ca sens pozitiv pe D sensul vectorului director \bar{a} și vom nota acest sens cu $+$. De aceea, dreapta orientată este de fapt perechea (D, \bar{a}) . Acest lucru va fi admis în continuare.

Fie dreapta orientată (D, \bar{a}) și punctul $M_0 \in D$. Mulțimea

$$D' = \{M \mid \overline{M_0M} = s\bar{a}, s \geq 0\}$$

se numește *partea pozitivă a lui D*, iar mulțimea

$$D'' = \{M \mid \overline{M_0M} = s\bar{a}, s \leq 0\}$$

se numește *partea negativă a lui D*.

Axele de coordonate Ox , Oy și Oz sunt exemple de drepte orientate. Dacă O este originea, atunci $\{M \mid \overline{OM} = t\bar{i}, t \geq 0\}$ este semiaxa pozitivă Ox .

Vectorului director $\bar{a} \neq \bar{0}$ al dreptei D i se poate atașa versorul $\bar{e} = \|\bar{a}\|^{-1}\bar{a}$, numit *versor director* sau *direcție orientată*. Prin urmare, dreapta D poate fi gândită ca fiind mulțimea

$$D = \{M \mid \overline{M_0M} = t\bar{e}, t \in \mathbb{R}\}.$$

Versorul director \bar{e} formează cu axele de coordonate unghiurile α , β , respectiv γ , numite *unghiurile directoare* ale dreptei D (figura 4).

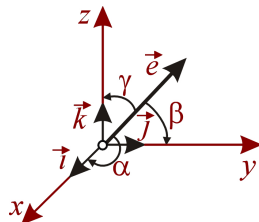


Fig. 4

Coordonatele lui \bar{e} față de baza ortonormată $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ se numesc *cosinusurile directoare* ale dreptei D . Putem scrie

$$\bar{e} = \langle \bar{e}, \bar{i} \rangle \bar{i} + \langle \bar{e}, \bar{j} \rangle \bar{j} + \langle \bar{e}, \bar{k} \rangle \bar{k}$$

sau

$$\bar{e} = \cos \alpha \bar{i} + \cos \beta \bar{j} + \cos \gamma \bar{k}.$$

Relația $\|\bar{e}\| = 1$ este echivalentă cu

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Observație. Relația dintre sinusurile directoare de mai sus este generalizarea relației fundamentale a trigonometriei $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$. În plan, în raport cu baza ortonormată $\{\bar{i}, \bar{j}\}$ versorul director \bar{e} formează cu axele de coordonate unghiurile α și β , acestea fiind unghiuri complementare, $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$. De aici, $\cos \beta = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha$.

Dacă $\bar{a} = \ell\bar{i} + m\bar{j} + n\bar{k}$, atunci

$$\cos \alpha = \frac{\ell}{\sqrt{\ell^2 + m^2 + n^2}}, \quad \cos \beta = \frac{m}{\sqrt{\ell^2 + m^2 + n^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{n}{\sqrt{\ell^2 + m^2 + n^2}}.$$

2.3 Ecuația planului în spațiu

Un plan în spațiu este determinat de condiții geometrice ca: trei puncte necoliniare, două drepte concurente, două drepte paralele, o dreaptă și un punct exterior dreptei, un punct și un vector normal la plan, precum și distanța de la origine la plan împreună cu versorul normal la plan. Impunând condiții de acest tip, ne propunem să stabilim ecuația planului sub formă vectorială, carteziană sau normală.

2.3.1 Planul determinat de un punct și un vector normal nenul

Fiind dată dreapta D care trece prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ și care are direcția vectorului $\vec{n}(a, b, c)$, există un singur plan P perpendicular pe D în M_0 (figura 5).

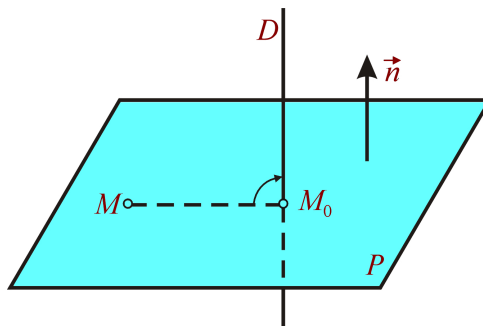


Fig. 5

Dreapta D se numește *normala* la planul P , iar vectorul nenul \vec{n} se numește *vectorul normal* al planului P . Ecuațiile normalei sunt

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Apartenența $M \in P$ este echivalentă cu $\overline{M_0M} \perp \vec{n}$. De aceea, planul P este mulțimea

$$P = \{M \mid \langle \overline{M_0M}, \vec{n} \rangle = 0\}.$$

Folosind $M(x, y, z)$ și

$$\overline{M_0M} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k},$$

ecuația vectorială $\langle \overline{M_0M}, \vec{n} \rangle = 0$ se transcrie ca o ecuație în \mathbb{R}^3 ,

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

numită *ecuația carteziană* a planului care trece prin M_0 , perpendicular pe \vec{n} .

Prelucrând membrul stâng al ecuației precedente și notând $ax_0 + by_0 + cz_0 = -d$, obținem transcrierea $ax + by + cz + d = 0$.

Reciproc, să arătăm că orice ecuație de forma $ax + by + cz + d = 0$, cu $a^2 + b^2 + c^2 > 0$, reprezintă un plan. Într-adevăr, o soluție (x_0, y_0, z_0) a acestei ecuații ne dă $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$ și reinlocuind obținem

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

care reprezintă ecuația planului care conține punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ și este perpendicular pe vectorul nenul (a, b, c) .

Ecuația $ax + by + cz + d = 0$ în \mathbb{R}^3 , cu $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$, se numește *ecuația carteziană generală a unui plan*. Evident, această ecuație este atașată funcției liniar affine

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = ax + by + cz + d.$$

2.3.2 Plane particulare

1) Planul xOy are ecuația $z = 0$ și vectorul normal $\bar{k} = (0, 0, 1)$. Orice plan paralel cu xOy are ecuația $z = c$ (figura 6).

Analog, $x = 0$ reprezintă ecuația planului yOz al cărui vector normal este $\bar{i} = (1, 0, 0)$. Un plan paralel cu yOz are ecuația $x = a$. Ecuația planului xOz este $y = 0$, a cărei normală are direcția $\bar{j} = (0, 1, 0)$. Un plan paralel cu yOz are ecuația $y = b$.

2) Ecuațiile planelor perpendiculare pe planele de coordonate xOy , yOz și xOz sunt de forma $ax + by + d = 0$, $by + cz + d = 0$, respectiv $ax + cz + d = 0$.

3) Ecuațiile planelor care trec prin axele de coordonate Ox , Oy și Oz sunt de forma $by + cz = 0$, $ax + cz = 0$, respectiv $ax + by = 0$.

4) Ecuația unui plan care trece prin origine este de forma $ax + by + cz = 0$. Un astfel de plan este un subspațiu vectorial bidimensional al lui \mathbb{R}^3 .

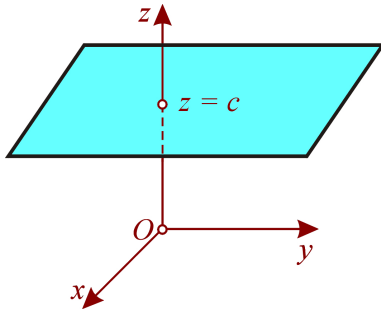


Fig. 6

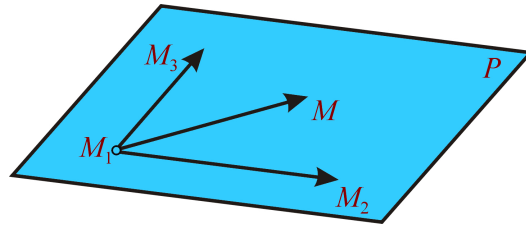


Fig. 7

2.3.3 Planul determinat de trei puncte necoliniare

Pentru a stabili ecuația planului determinat de punctele necoliniare $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = \overline{1, 3}$ (figura 7), procedăm după cum urmează:

1) Folosim ecuația generală a planului și ecuațiile obținute prin înlocuirea coordonatelor punctelor M_i în ecuația generală, ca ecuații în necunoscutele a , b , c și d . Rezultă sistemul linear omogen

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ ax_i + by_i + cz_i + d = 0, \quad i = \overline{1, 3}, \end{cases}$$

cu soluții nebanale (a, b, c, d) , deoarece a , b și c nu se pot anula simultan. Condiția de soluții nebanale,

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

este chiar ecuația carteziană a planului $(M_1M_2M_3)$. Într-adevăr, ecuația de mai sus este o ecuație de gradul întâi în x , y , z și oricare dintre punctele (x_i, y_i, z_i) , $i = \overline{1, 3}$, o satisface. De asemenea, această ecuație reprezintă *condiția de coplanaritate* a punctelor M_1 , M_2 , M_3 și M .

Ca un caz particular, găsim *ecuația planului prin tăieturi* (figura 8). Dacă tăieturile sunt $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ și $C(0, 0, c)$, atunci ecuația planului (ABC) este

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0.$$

2) Fie M un punct care generează planul. Condiția de coplanaritate a vectorilor $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$ și $\overline{M_1M_3}$ este chiar ecuația vectorială a planului și anume

$$\langle \overline{M_1M}, \overline{M_1M_2} \times \overline{M_1M_3} \rangle = 0.$$

Dacă introducem vectorii de poziție $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, $\bar{r}_i = x_i\bar{i} + y_i\bar{j} + z_i\bar{k}$, $i = \overline{1, 3}$, atunci obținem transcrierea

$$\langle \bar{r} - \bar{r}_1, (\bar{r}_2 - \bar{r}_1) \times (\bar{r}_3 - \bar{r}_1) \rangle = 0$$

sau, sub formă de determinant,

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

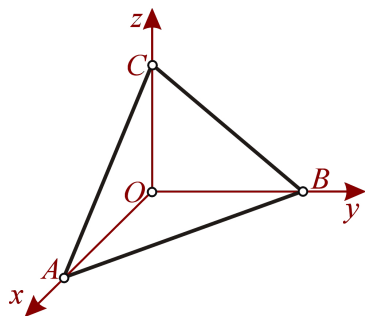


Fig. 8

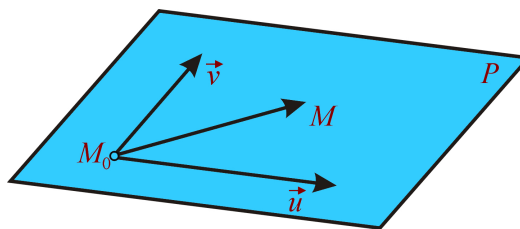


Fig. 9

2.3.4 Planul determinat de un punct și doi vectori necoliniari

Doi vectori necoliniari $\bar{u} = (\ell_1, m_1, n_1)$, $\bar{v} = (\ell_2, m_2, n_2)$ și un punct M_0 determină un plan unic P (figura 9). Ne propunem să găsim ecuațiile parametrice sau ecuația carteziană ale acestui plan.

Fie $\overrightarrow{M_0M_1}$ și $\overrightarrow{M_0M_2}$ reprezentanții vectorilor \bar{u} , respectiv \bar{v} . Un punct $M \in E_3$ aparține planului P dacă și numai dacă vectorii $\overline{M_0M}$, $\overline{M_0M_1}$ și $\overline{M_0M_2}$ sunt coplanari. Exprimăm coplanaritatea acestor vectori astfel:

a) $\overline{M_0M} = r\bar{u} + s\bar{v}$, adică

$$\begin{cases} x = x_0 + r\ell_1 + s\ell_2 \\ y = y_0 + rm_1 + sm_2 \\ z = z_0 + rn_1 + sn_2, \quad r, s \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Aceste relații sunt numite *ecuațiile parametrice* ale planului P , iar numerele arbitrare r și s se numesc *parametri*.

b) $\langle \overline{M_0M}, \bar{u} \times \bar{v} \rangle = 0$, adică

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \ell_1 & m_1 & n_1 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Precizăm că toate ecuațiile carteziene obținute pentru plan sunt echivalente cu ecuația generală a planului $ax + by + cz + d = 0$. Se observă că această ecuație depinde de patru *parametri neesențiali* a, b, c, d și trei *parametri esențiali*. Dacă $a \neq 0$, atunci cei trei parametri esențiali sunt $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$ și $\frac{d}{a}$.

De asemenea, precizăm că numerele a, b și c , adică coeficienții lui x, y și z din ecuația generală, reprezintă coordonatele vectorului normal \bar{n} .

2.3.5 Ecuatia normală a planului (Hesse)

Putem determina ecuația planului atunci când cunoaștem versorul normalei la planul P și distanța de la origine la planul P . Această ecuație ne va conduce la o formulă de calcul a distanței de la un punct la un plan.

Dacă distanța de la origine la planul P este $p > 0$ și versorul normalei este exprimat cu ajutorul cosinusurilor directoare, $\vec{n} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$, atunci ecuația normală a planului (ecuația lui Hesse) se scrie

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0.$$

Notând cu M_0 punctul de intersecție al direcției versorului normalei din origine cu planul P și cu $M(x, y, z)$ un punct generic din planul P atunci $M_0(p \cos \alpha, p \cos \beta, p \cos \gamma)$ iar ecuația planului ce trece prin M_0 și are normala \vec{n} este chiar ecuația căutată.

Ne interesează în continuare legătura dintre ecuația generală a planului $ax + by + cz + d = 0$ și cea normală. Spunem că normalizăm ecuația generală a planului atunci când aceasta o transformăm în ecuație normală. Normalizata ecuației generale a planului (forma normală dedusă din ecuația generală) este

$$\frac{ax + by + cz + d}{\pm \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0.$$

Din punct de vedere practic, obținem normalizata ecuației generale a planului prin înmulțirea cu $\frac{1}{\pm \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$, semnul fiind semnul opus lui d .

2.3.6 Plan orientat

Referitor la reprezentarea intuitivă a unui plan în spațiu, sunt evidente următoarele afirmații:

- 1) planul are două fețe;
- 2) elementul de bază în studiul planului în raport cu spațiul este normala;
- 3) alegerea unui sens pe normală este echivalentă cu alegerea unei fețe a planului;
- 4) alegerea unui sens de rotație în plan este echivalentă cu alegerea unui sens pe normală.

Un plan P împreună cu o alegere a sensului pe normală se numește *plan orientat* (figura 10). Dacă sensul pe normală este fixat prin vectorul \vec{n} , atunci perechea (P, \vec{n}) este un plan orientat.

Evident, este natural să alegem acel sens pe normală care să ne conducă la o orientare a planului coerentă cu orientarea spațiului. În continuare vom subînțelege o asemenea orientare (acceptăm regula mâinii drepte).

În aplicații, fața care corespunde sensului ales pe normală se notează cu (+), iar fața opusă cu (-).

Evident, planele de coordonate xOy , yOz și zOx sunt orientate.

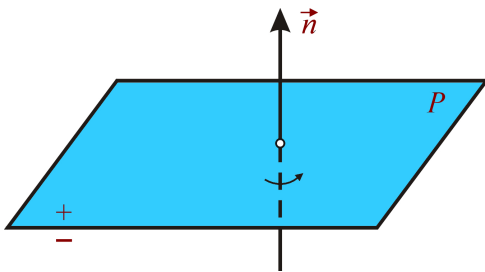


Fig. 10

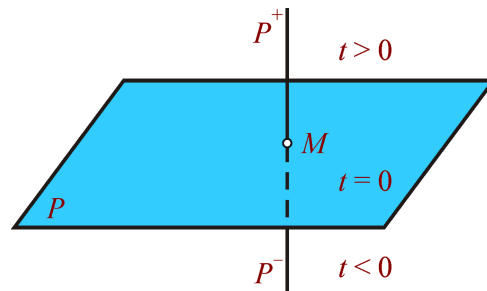


Fig. 11

2.3.7 Semispații

Fie planul $P: f(x, y, z) = ax + by + cz + d = 0$. Acest plan separă spațiul în două submulțimi convexe (figura 11):

$$\begin{aligned} P^- &= \{(x, y, z) \mid f(x, y, z) \leq 0\}; & P^+ &= \{(x, y, z) \mid f(x, y, z) \geq 0\}; \\ P^- \cap P^+ &= P; & P^- \cup P^+ &= \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Pentru a dovedi această afirmație, fie $M_0(x_0, y_0, z_0) \in P$ și

$$D: x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct, \quad t \in \mathbb{R},$$

normala la planul P în punctul M_0 . Punctele lui D pot fi împărțite în trei submulțimi caracterizate prin $t < 0$, $t = 0$, respectiv $t > 0$. Să ne închipuim că punctul M_0 descrie planul P . Regiunea din spațiu măturată de semidreapta $t \leq 0$ este caracterizată prin

$$f(x, y, z) = (a^2 + b^2 + c^2)t \leq 0$$

și o notăm cu P^- . Regiunea din spațiu descrisă de semidreapta $t \geq 0$ o notăm prin P^+ și este caracterizată prin

$$f(x, y, z) = (a^2 + b^2 + c^2)t \geq 0.$$

Problema convexității o lășăm drept temă pentru cititor.

Submulțimile P^- și P^+ se numesc *semispații închise*. Având în vedere că funcția f păstrează semn constant pentru punctele unui semispațiu, pentru aflarea acestui semn este suficient să alegem un punct particular (x_1, y_1, z_1) și să vedem ce semn are numărul $f(x_1, y_1, z_1)$.

2.3.8 Reuniunea și intersecția a două plane

Considerăm P_1 și P_2 două plane de ecuații $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, respectiv $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. *Reuniunea* celor două plane este mulțimea (*cuadrică degenerată*)

$$Q = \{(x, y, z) \mid (a_1x + b_1y + c_1z + d_1)(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0\}.$$

Presupunem că planele P_1 și P_2 nu sunt paralele sau confundate. *Intersecția* $P_1 \cap P_2$ este *dreaptă de ecuații* (figura 12):

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, \end{cases} \quad \text{rang} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 2.$$

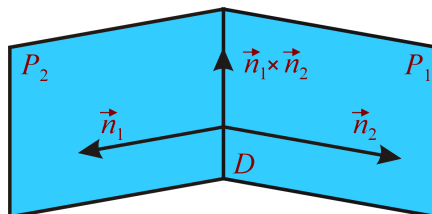


Fig. 12

Sistemul de ecuații liniare prin care este reprezentată dreapta D este simplu nedeterminat. Sistemul admite o infinitate simplă de soluții care sunt tocmai punctele dreptei. Un punct M_0 al dreptei D se obține fixând valoarea uneia dintre variabile și calculându-le pe celelalte două.

Direcția dreptei D este dată de vectorul $\bar{n}_1 \times \bar{n}_2$, unde $\bar{n}_1(a_1, b_1, c_1)$ și $\bar{n}_2(a_2, b_2, c_2)$ sunt vectorii normali la planele P_1 și P_2 . Deoarece

$$\bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

parametrii directori ℓ , m și n ai dreptei D sunt:

$$\ell = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}; \quad m = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}; \quad n = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Dacă presupunem că $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, atunci sistemul precedent este echivalent cu

$$\begin{cases} x = az + p \\ y = bz + q \end{cases}$$

(*ecuații canonice ale dreptei D*).

Constatăm că o dreaptă în spațiu este exprimată cu ajutorul a două ecuații de gradul unu în (x, y, z) , care depind de patru parametri esențiali, a , b , p și q . Prin urmare, pentru determinarea unei drepte sunt suficiente două condiții, care vor produce patru ecuații liniare în necunoscutele a , b , p și q .

Pentru a determina poziția relativă a unor drepte sau plane se alcătuiește sistemul format de ecuațiile lor, se discută și se rezolvă algebric acest sistem și apoi se interpretează geometric rezultatul. De asemenea, precizăm că din punct de vedere topologic, dreptele și planele sunt submulțimi închise în spațiu.

2.3.9 Fascicule de plane

Printr-o dreaptă dată trec o infinitate de plane. Mulțimea tuturor planelor care trec printr-o dreaptă dată D se numește *fascicul de plane*. Dreapta D se numește *axa fasciculului*.

Considerăm planele de ecuații

$$P_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \quad \text{și} \quad P_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

care determină dreapta $D = P_1 \cap P_2$ (figura 12). Deoarece orice vector nenul \bar{n} perpendicular pe D se scrie în forma $\bar{n} = r\bar{n}_1 + s\bar{n}_2$, $r^2 + s^2 \neq 0$, rezultă că ecuația unui plan oarecare din fasciculul de axă D are ecuația

$$\mathcal{F}: r(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + s(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0, \quad r^2 + s^2 \neq 0.$$

Cum cel puțin unul din coeficienții r și s sunt nenuli putem presupune $r \neq 0$ și ecuația fasciculului se poate scrie:

$$\mathcal{F}_\lambda: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 + \lambda(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (\text{formal: } (P_1) + \lambda(P_2) = 0).$$

Mulțimea planelor de forma $\mathcal{F}_\parallel: a_1x + b_1y + c_1z + \lambda = 0$ se numește *fascicul de plane paralele*.

Folosind fasciculele de plane, putem justifica și pe această cale ecuațiile planelor particulare din subsecțiunea 2.3.2. Astfel, știind că axa absciselor este $Ox: y = 0, z = 0$, ecuația unui plan care trece prin Ox este $by + cz = 0$, iar ecuația unui plan paralel cu acesta este $by + cz + d = 0$ etc.

2.4 Unghiuri în spațiu

În acest paragraf ne propunem să găsim formule pentru determinarea următoarelor unghiuri: unghiul dintre două drepte orientate, unghiul dintre două plane orientate și unghiul dintre o dreaptă orientată și un plan orientat.

2.4.1 Unghiul dintre două drepte orientate

Fie D_1 și D_2 două drepte orientate prin vectorii directori $\vec{a} = \ell_1\vec{i} + m_1\vec{j} + n_1\vec{k}$ și $\vec{b} = \ell_2\vec{i} + m_2\vec{j} + n_2\vec{k}$ (figura 13).

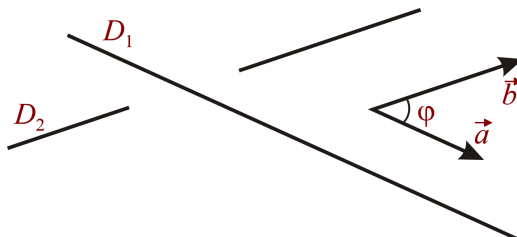


Fig. 13

Prin unghiul dintre dreptele orientate (D_1, \vec{a}) și (D_2, \vec{b}) vom înțelege unghiul dintre \vec{a} și \vec{b} , adică unghiul φ definit prin formula

$$\cos \varphi = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} = \frac{\ell_1\ell_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{\ell_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \sqrt{\ell_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}, \quad \varphi \in [0, \pi].$$

Constatăm echivalențele:

- $D_1 \perp D_2$ dacă și numai dacă $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$ sau $\ell_1\ell_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$;
- $D_1 \parallel D_2$ dacă și numai dacă $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ sau $\frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$.

2.4.2 Unghiul dintre două plane orientate

Considerăm planele P_1 și P_2 având ecuațiile $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, respectiv $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$.

Planele P_1 și P_2 sunt paralele sau confundate dacă și numai dacă vectorii normali $\vec{n}_1(a_1, b_1, c_1)$ și $\vec{n}_2(a_2, b_2, c_2)$ sunt coliniari, adică $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{0}$. Paralelismul $P_1 \parallel P_2$ este caracterizat prin relațiile

$$(a_1, b_1, c_1) = k(a_2, b_2, c_2) \quad \text{și} \quad d_1 \neq kd_2, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

iar coincidența $P_1 = P_2$ este descrisă de

$$(a_1, b_1, c_1, d_1) = k(a_2, b_2, c_2, d_2), \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Două plane neparalele și neconfundate se intersectează după o dreaptă D și determină un unghi diedru (figura 14).

Prin definiția dată în manualele de geometrie de liceu, unghiul diedru format de cele două plane este măsurat prin unghiul plan θ , care se obține secționând planele P_1 și P_2 cu un plan P_3 perpendicular pe D . Unghiul θ este congruent sau suplementar cu unghiul φ dintre vectorii normali \vec{n}_1 și \vec{n}_2 , ca unghiuri cu laturile perpendiculare. Pentru comoditatea exprimării algebrice,

acum acceptăm că unghiul diedru determinat de planele orientate (P_1, \bar{n}_1) și (P_2, \bar{n}_2) este măsurat prin unghiul φ dintre \bar{n}_1 și \bar{n}_2 . Acest unghi se determină prin formula

$$\cos \varphi = \frac{\langle \bar{n}_1, \bar{n}_2 \rangle}{\|\bar{n}_1\| \|\bar{n}_2\|} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}, \quad \varphi \in [0, \pi].$$

În particular, planele P_1 și P_2 sunt perpendiculare dacă și numai dacă $\langle \bar{n}_1, \bar{n}_2 \rangle = 0$ sau în coordonate, $a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$.

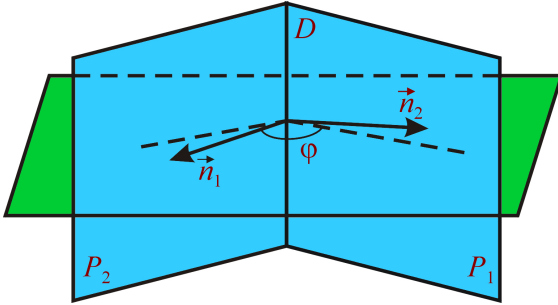


Fig. 14

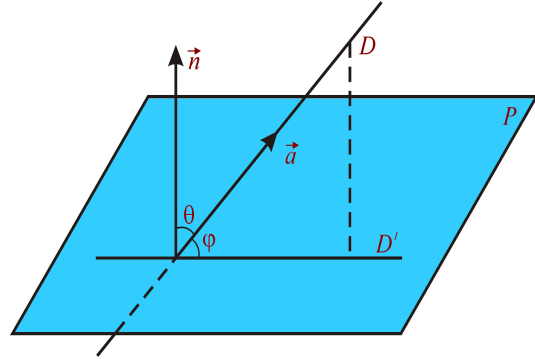


Fig. 15

2.4.3 Unghiul dintre o dreaptă orientată și un plan orientat

Fie dreapta orientată (D, \bar{a}) , $\bar{a} = \ell \bar{i} + m \bar{j} + n \bar{k}$ și planul orientat (P, \bar{n}) , $\bar{n} = a \bar{i} + b \bar{j} + c \bar{k}$. Presupunem că dreapta D intersectează planul P (figura 15) și notăm cu D' proiecția lui D pe planul P . Prin definiția din manualele de liceu, unghiul dintre planul P și dreapta D este unghiul φ dintre D și D' .

Unghiul θ dintre vectorii \bar{a} și \bar{n} este legat de unghiul φ prin relația $\theta + \varphi = 90^\circ$ sau prin relația $\theta = 90^\circ + \varphi$. Unghiul dintre dreapta orientată (D, \bar{a}) și planul orientat (P, \bar{n}) este unghiul $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, definit prin formula

$$\sin \varphi = \frac{\langle \bar{n}, \bar{a} \rangle}{\|\bar{n}\| \|\bar{a}\|} = \frac{a\ell + bm + cn}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{\ell^2 + m^2 + n^2}}.$$

Dreapta D este paralelă cu planul P (caz particular, $D \subset P$) dacă și numai dacă $\langle \bar{n}, \bar{a} \rangle = 0$ sau $a\ell + bm + cn = 0$.

Dreapta D este perpendiculară pe planul P dacă și numai dacă vectorii \bar{n} și \bar{a} sunt coliniari, adică $\bar{n} \times \bar{a} = \bar{0}$ sau $\frac{a}{\ell} = \frac{b}{m} = \frac{c}{n}$.

2.5 Distanțe în spațiu

În acest paragraf ne propunem să găsim formule pentru determinarea următoarelor distanțe: distanța de la un punct la o dreaptă, distanța de la un punct la un plan și distanța dintre două drepte.

2.5.1 Distanța de la un punct la o dreaptă

Fie dreapta D de ecuații

$$\frac{x - x_0}{\ell} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

Această dreaptă conține punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ și are vectorul director $\bar{a}(\ell, m, n)$. Fie A un punct din E_3 și A' proiecția sa pe dreapta D (figura 16).

Lungimea segmentului $[AA']$ este *distanța de la punctul A la dreapta D* și se notează $d(A, D)$. Din formula care dă aria paralelogramului construit pe reprezentanții vectorilor \bar{a} și $\overline{M_0A}$ obținem

$$d(A; D) = \frac{\|\bar{a} \times \overline{M_0A}\|}{\|\bar{a}\|}.$$

Evident, $d(A, D) = \inf_{M \in D} (A, M)$.

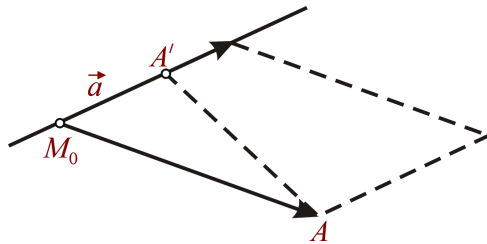


Fig. 16

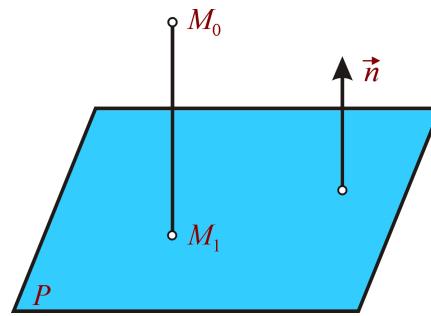


Fig. 17

2.5.2 Distanța de la un punct la un plan

Considerăm planul P de ecuație $ax + by + cz + d = 0$ și un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$, exterior planului. Notăm cu $M_1(x_1, y_1, z_1)$ proiecția lui M_0 pe planul P (figura 17). *Distanța de la punctul M_0 la planul P* este $\|\overline{M_1M_0}\|$ și se notează cu $d(M_0, P)$.

Folosind produsul scalar dintre vectorul normal la plan $\bar{n}(a, b, c)$ și vectorul

$$\overline{M_1M_0} = (x_0 - x_1)\bar{i} + (y_0 - y_1)\bar{j} + (z_0 - z_1)\bar{k},$$

efectuat în cele două moduri posibile (algebric și sintetic), găsim

$$a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1) = \pm \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} d(M_0, P).$$

Pe de altă parte, apartenența $M_1 \in P$ implică $ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$. Înlocuind pe $-ax_1 - by_1 - cz_1 = d$ și luând modulul în ambele părți, deducem formula

$$d(M_0, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Evident, $d(M_0, P) = \inf_{M \in P} d(M_0, M)$.

Cum formula distanței de mai sus este chiar ecuația normalizată a planului P calculată în punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$, deducem că în cazul în care planul este dat prin ecuația sa normală, $x \cos \alpha \bar{i} + y \cos \beta \bar{j} + z \cos \gamma \bar{k} - p = 0$, distanța de la punctul M_0 la planul P este dată de

$$d(M_0, P) = |x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - p|.$$

2.5.3 Perpendiculara comună a două drepte oarecare din spațiu

Două drepte din spațiu pot fi confundate, paralele, concurente sau oarecare. Pentru două drepte D_1 și D_2 care admit pe \vec{a}_1 , respectiv \vec{a}_2 ca vectori directori, există o *direcție normală comună unică* $\vec{n} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2$ dacă și numai dacă dreptele D_1 și D_2 sunt oarecare sau concurente. În acest caz există o dreaptă și numai una care se sprijină simultan pe cele două drepte și având direcția \vec{n} (figura 18), numită *perpendiculara comună a dreptelor D_1 și D_2* .

Pentru a stabili ecuațiile perpendiculararei comune D , observăm că această dreaptă apare ca intersecția a două plane: planul P_1 care conține dreapta D_1 și vectorul \vec{n} și planul P_2 care conține dreapta D_2 și vectorul \vec{n} . Presupunând că D_1 și D_2 conțin punctele M_1 , respectiv M_2 și că N este punctul curent în P_1 , iar M este punctul curent în P_2 , ecuațiile perpendiculararei comune sunt

$$D: \begin{cases} \langle \overline{M_1N}, \vec{a}_1 \times \vec{n} \rangle = 0 \\ \langle \overline{M_2N}, \vec{a}_2 \times \vec{n} \rangle = 0. \end{cases}$$

Ecuațiile în \mathbb{R}^3 ale perpendiculararei comune se obțin exprimând vectorii $\overline{M_1N}$, \vec{a}_1 , $\overline{M_2N}$, \vec{a}_2 și \vec{n} în raport cu baza ortonormată $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ și utilizând expresia canonică a produsului mixt.

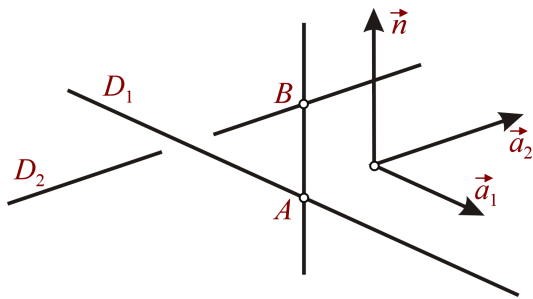


Fig. 18

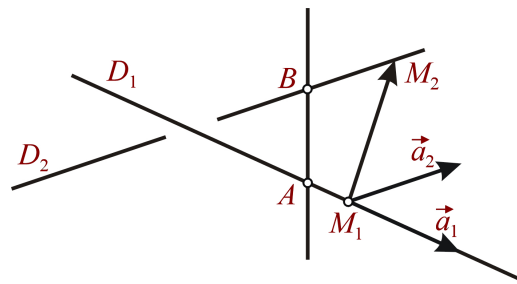


Fig. 19

2.5.4 Distanța dintre două drepte

Fie două drepte D_1 și D_2 descrise de punctele M , respectiv N . Numărul $\inf d(M, N)$ se numește *distanța dintre dreptele D_1 și D_2* și se notează cu $d(D_1, D_2)$. Din considerente geometrice rezultă că $d(D_1, D_2)$ se află astfel:

- 1) dacă dreptele D_1 și D_2 sunt concurente, atunci $d(D_1, D_2) = 0$;
- 2) dacă $D_1 \parallel D_2$, atunci prin $M_0 \in D_1$ se duce un plan perpendicular pe D_1 care taie pe D_2 în N_0 și avem $d(D_1, D_2) = d(M_0, N_0)$;
- 3) dacă D_1 și D_2 sunt oarecare, atunci $d(D_1, D_2) = \|\overline{AB}\|$, unde punctele A și B reprezintă intersecția dintre perpendiculara comună D și dreptele D_1 , respectiv D_2 (figura 19).

Distanța dintre dreptele oarecare D_1 și D_2 se mai poate afla astfel:

- prin dreapta D_1 ducem un plan P paralel cu dreapta D_2 ;
- pe dreapta D_2 selectăm un punct M_2 ;
- calculăm $d(M_2, P) = d(D_1, D_2)$.

Figura 19 arată că distanța dintre dreptele D_1 și D_2 este lungimea înălțimii paralelipipedului construit pe vectorii $\overline{M_1M_2}$, \vec{a}_1 și \vec{a}_2 . Din semnificația produsului mixt rezultă

$$d(D_1, D_2) = \frac{|\langle \overline{M_1M_2}, \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \rangle|}{\|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\|}.$$

În termeni de analiză matematică putem scrie

$$d(D_1, D_2) = \inf_{\substack{M_1 \in D_1 \\ M_2 \in D_2}} d(M_1, M_2).$$

2.6 Probleme rezolvate

1. Să se determine ecuația planului P ce trece prin punctele $A(2, 0, 0)$, $B(0, 0, 3)$ și face un unghi de 60° cu planul orizontal xOy .

Soluție.

Considerăm planul P dat prin ecuația sa normală

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0.$$

Din faptul că planul P trece prin punctele $A(2, 0, 0)$, $B(0, 0, 3)$ rezultă $\begin{cases} 2 \cos \alpha - p = 0 \\ 3 \cos \gamma - p = 0. \end{cases}$

Unghiul dintre planul P și planul orizontal este unghiul dintre vectorul normal \bar{n}_p și versorul \bar{k} , adică $\gamma = 60^\circ$. Obținem $\cos \gamma = \frac{1}{2}$. Prin urmare $p = \frac{3}{2}$, $\cos \alpha = \frac{3}{4}$.

Mai rămâne să-l determinăm pe $\cos \beta$ din relația $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

Obținem $\cos^2 \beta = \frac{3}{16} \Leftrightarrow \cos \beta = \pm \frac{\sqrt{3}}{4}$.

În concluzie, avem două soluții:

$$3x \pm \sqrt{3}y + 2z - 6 = 0.$$

Observație O altă soluție ar fi să scriem ecuația dreptei AB , iar din fasciculul planelor ce trec prin axa AB , \mathcal{F}_λ , să determinăm planul ce formează unghi de 60° cu planul orizontal, adică să folosim funcția \cos a unghiului dintre plane și să-l determinăm pe λ (cum vom vedea în exercițiul următor).

2. Să se determine ecuația planului P ce trece prin dreapta de intersecție a planelor

$$P_1 : x + 5y + z = 0, \quad P_2 : x - z + 4 = 0,$$

știind că face un unghi de 45° cu planul

$$P_3 : x - 4y - 8z + 14 = 0.$$

Soluție.

Vom alege din fasciculul de drepte ce trec prin dreapta comună a planelor P_1 și P_2 acel plan care face un unghi de 45° cu planul P_3 .

Fasciculul de drepte ce trec prin dreapta comună a planelor P_1 și P_2 este

$$\mathcal{F}_\lambda : x + 5y + z + \lambda(x - z + 4) = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)x + 5y + (1 - \lambda)z + 4\lambda = 0.$$

Vectorul normal al unui plan din fascicul este $\bar{n}_\lambda = (\lambda + 1)\bar{i} + 5\bar{j} + (1 - \lambda)\bar{k}$. Condiția ca planul P să facă unghi de 45° cu planul P_3 , a cărui normală este $\bar{n}_3 = \bar{i} - 4\bar{j} - 8\bar{k}$, este dată de

$$\widehat{(P, P_3)} = \widehat{(\bar{n}_\lambda, \bar{n}_3)} = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \cos \widehat{(\bar{n}_\lambda, \bar{n}_3)} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Din

$$\cos \widehat{(\bar{n}_\lambda, \bar{n}_3)} = \frac{\langle \bar{n}_\lambda, \bar{n}_3 \rangle}{\|\bar{n}_\lambda\| \cdot \|\bar{n}_3\|} = \frac{\lambda - 3}{\sqrt{2\lambda^2 + 27}}$$

rezultă

$$\frac{\lambda - 3}{\sqrt{2\lambda^2 + 27}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sqrt{2\lambda^2 + 27} = \sqrt{2}(\lambda - 3) \Rightarrow \lambda = -\frac{3}{4}.$$

În concluzie, planul căutat este

$$\mathcal{F}_{\lambda = -\frac{3}{4}} : x + 20y + 7z - 12 = 0.$$

3. Aflați perpendiculara comună a dreptelor $\Delta_1 : \begin{cases} x - y = 2 \\ x + z = 3 \end{cases}$ și $\Delta_2 : \frac{2x-1}{3} = \frac{y+1}{0} = 1 - z$.

Soluție.

Metoda I. Ecuațiile carteziene ale celor două drepte sunt: $\Delta_1 : \frac{x-0}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-1}$ și respectiv $\Delta_2 : \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-1}{-1}$, deci vectorii lor directori sunt $\bar{v}_1 \equiv (1, 1, -1)$, respectiv $\bar{v}_2 \equiv (\frac{3}{2}, 0, -1)$.

Perpendiculara comună a celor două drepte are direcția dată de vectorul liber

$$\bar{u} = \bar{v}_1 \times \bar{v}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ \frac{3}{2} & 0 & -1 \end{vmatrix} \equiv \left(-1, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right).$$

Fie π_* planul ce trece prin Δ_1 (deci conține un punct al dreptei Δ_1 , de exemplu $A(0, -2, 3) \in \Delta_1$ și direcția lui Δ_1 , dată de $\bar{v}_1 \equiv (1, 1, -1)$) și care conține direcția perpendiculară comună a celor două drepte, dată de $\bar{n} \equiv (-1, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$. Atunci:

$$\pi_* : \begin{vmatrix} x-0 & y+2 & z-3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -4x + 5y + z + 17 = 0.$$

Un punct A' al perpendicularăi comune se află la intersecția lui π_* cu Δ_2 ,

$$\{A'\} = \Delta_2 \cap \pi_* : \begin{cases} \frac{2x-1}{3} = \frac{y+1}{0} = 1 - z \\ -4x + 5y + z + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ 2x + 3z = 4 \\ -4x + 5y + z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{7} \\ y = -1 \\ z = \frac{10}{7}, \end{cases}$$

deci $A'(-\frac{1}{7}, -1, \frac{10}{7})$.

Perpendiculara comună Δ^\perp conține punctul $A'(-\frac{1}{7}, -1, \frac{10}{7})$ și are direcția $\bar{n} \equiv (-1, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$. Atunci:

$$\Delta^\perp : \frac{x + \frac{1}{7}}{-1} = \frac{y + 1}{-\frac{1}{2}} = \frac{z - \frac{10}{7}}{-\frac{3}{2}} \Leftrightarrow \frac{7x + 1}{-7} = \frac{2y + 2}{-1} = \frac{14z - 20}{-21}.$$

Metoda II. Fie $\bar{v}^\perp = \bar{v}_1 \times \bar{v}_2$ vectorul liber care dă direcția perpendicularăi comune. Perpendiculara comună a dreptelor Δ_1 și Δ_2 se află la intersecția dintre planul $\pi_1 = \pi_*$ ce trece prin Δ_1 și este paralel cu \bar{v}^\perp (vezi Metoda I) și planul π_2 ce trece prin Δ_2 și este paralel cu \bar{v}^\perp .

Planul π_2 va conține un punct al dreptei Δ_2 (considerăm $B(\frac{1}{2}, -1, 1) \in \Delta_2$), direcția lui Δ_2 dată de

$\bar{v}_2 \equiv (\frac{3}{2}, 0, -1)$ și direcția dată de perpendiculara comună a lui Δ_1 și Δ_2 , deci de $\bar{v}^\perp = (-1, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$.

Atunci

$$\pi_2 : \begin{vmatrix} x - 1/2 & y + 1 & z - 1 \\ \frac{3}{2} & 0 & -1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \pi_2 : -2x + 13y - 3z + 17 = 0.$$

În concluzie, avem

$$\Delta_{\perp} = \pi_1 \cap \pi_2 : \begin{cases} -4x + 5y + z + 7 = 0 \\ -2x + 13y - 3z + 17 = 0. \end{cases}$$

Metoda III. Folosind ecuațiile parametrice ale celor două drepte, considerăm punctele

$$C_1(t) = (t, t - 2, -t + 3) \in \Delta_1, t \in \mathbb{R}, \quad C_2(s) = (3/2s + 1/2, -1, -s + 1) \in \Delta_2, s \in \mathbb{R}.$$

Segmentul $[C_1(t)C_2(s)]$ este inclus în perpendiculara comună Δ_{\perp} a celor două drepte doar în situația în care vectorul $\bar{w} = \overrightarrow{C_1(t)C_2(s)} \equiv (\frac{3s+1}{2} - t, -t + 1, -s + t - 2)$ este ortogonal pe cei doi vectori directori \bar{v}_1 și \bar{v}_2 . Această condiție se rescrie

$$\begin{cases} \bar{w} \perp \bar{v}_1 \\ \bar{w} \perp \bar{v}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle \bar{w}, \bar{v}_1 \rangle = 0 \\ \langle \bar{w}, \bar{v}_2 \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6t + 5s + 7 = 0 \\ -10t + 13s + 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 9/7 \\ s = 1/7. \end{cases}$$

Punctele corespunzătoare celor două valori obținute pentru s și t sunt respectiv

$$B_1 = C_1\left(\frac{9}{7}\right) = \left(\frac{9}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{12}{7}\right) \in \Delta_1, \quad B_2 = C_2\left(\frac{1}{7}\right) = \left(\frac{5}{7}, -1, \frac{6}{7}\right) \in \Delta_2.$$

Acestea sunt picioarele perpendicularei comune Δ_{\perp} , iar dreapta B_1B_2 este exact perpendiculara comună. Obținem

$$\Delta_{\perp} : \frac{x - 5/7}{4/7} = \frac{y + 1}{2/7} = \frac{z - 6/7}{6/7} \Leftrightarrow \frac{7x - 5}{4} = \frac{7y + 7}{2} = \frac{7z - 6}{6}.$$

Se observă că prin această metodă putem calcula ușor și distanța dintre cele două drepte. Deoarece $B_1 \in \Delta_1$ și $B_2 \in \Delta_2$ sunt picioarele perpendicularei comune, avem

$$d(\Delta_1, \Delta_2) = d(B_1, B_2) = \sqrt{\left(\frac{9}{7} - \frac{5}{7}\right)^2 + \left(-\frac{5}{7} + 1\right)^2 + \left(\frac{12}{7} - \frac{6}{7}\right)^2} = \frac{2\sqrt{14}}{7}.$$

Metoda IV. Considerăm două puncte $C_1(t) \in \Delta_1$ și $C_2(s) \in \Delta_2$ și funcția $f(s, t) = \|\overrightarrow{C_1(t)C_2(s)}\|^2$, $s, t \in \mathbb{R}$. Distanța dintre cele două drepte este dată de valoarea minimă a funcției f când $s, t \in \mathbb{R}$. Avem

$$\begin{aligned} f(s, t) &= \left(\frac{3s+1}{2} - t\right)^2 + (-t + 1)^2 + (-s + t - 2)^2 = \\ &= \frac{13}{4} \cdot s^2 - 3t^2 - 5st + \frac{11}{2} \cdot s - 7t + \frac{21}{4}. \end{aligned}$$

Punctele critice $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ ale funcției f (care conțin punctul de minim) se află rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial s} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{13}{2}s - 5t + \frac{11}{2} = 0 \\ 6t - 5s - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 1/7 \\ t = 9/7, \end{cases}$$

soluție unică (v. valorile obținute prin metoda III). În continuare, pentru a determina perpendiculara comună a dreptelor Δ_1 și Δ_2 se procedează analog cu Metoda III.

2.7 Probleme propuse

1. Să se figureze punctele:

$$A(5, 0, 0); B(0, -2, 0); C(0, 0, 3); D(-3, 2, 0); E(0, -1, -4); F(2, 0, 4); G(3, -5, 8)$$

și să se scrie expresia vectorului de poziție al punctului G față de reperul cartezian $\{O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$.

2. Fie D_1 și D_2 două drepte paralele cu vectorii $(1, 0, 1)$, respectiv $(-1, 1, 2)$. Să se scrie ecuațiile parametrice ale dreptei perpendiculare simultan pe D_1 , D_2 și care trece prin punctul $(2, 3, 0)$.

3. Se consideră punctele $A(1, 3, 0)$, $B(3, -2, 1)$, $C(\alpha, 1, -3)$ și $D(7, -2, 3)$. Să se determine α astfel încât punctele să fie coplanare. Pentru α astfel găsit, să se scrie ecuația carteziană a planului determinat de ele.

4. Să se scrie ecuația planului care trece prin punctul $M_0(-1, 3, 3)$ și conține dreapta D , unde:

$$\begin{aligned} \text{a) } D: & \begin{cases} x + 2y + 3z - 1 = 0 \\ 2x - y - z - 3 = 0; \end{cases} \\ \text{b) } D: & \frac{x-4}{1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z+1}{2}; \\ \text{c) } D: & x = 1 + 2t, \quad y = -1 + t, \quad z = 1 + 3t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Indicație. Se utilizează ecuația fasciculului determinat de două plane a căror intersecție este dreapta D .

5. Să se calculeze unghiul dintre dreptele:

$$D_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z}{1}; \quad D_2: \frac{x}{-1} = \frac{y}{8} = \frac{z}{1}$$

și să se scrie ecuația planului determinat de aceste drepte.

$$\text{Indicație. } D_1 \cap D_2 = \left\{ \left(\frac{1}{2}, -2, -\frac{1}{2} \right) \right\}.$$

6. Se dau punctele $A(1, 3, 2)$, $B(-1, 2, 1)$, $C(0, 1, -2)$, $D(2, 0, -1)$ și planul de ecuație $P: 2x + y - z - 1 = 0$. Să se afle care dintre puncte se găsesc de aceeași parte cu originea axelor de coordonate față de planul dat.

7. Să se scrie ecuațiile perpendicularei comune dreptelor:

$$D_1: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z}{1}; \quad D_2: \frac{x}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$$

și să se calculeze distanța dintre D_1 și D_2 .

8. Fie dreptele:

$$D_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{\alpha}; \quad D_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{\alpha}.$$

a) Să se determine α astfel încât dreptele D_1 și D_2 să fie concurente și să se scrie ecuația planului P în care se află aceste drepte.

b) Să se calculeze $d(M_0, P)$, unde $M_0(5, -4, 1)$.

Indicație. a) Sistemul format din cele patru ecuații are soluție unică sau lungimea perpendicularei comune este 0.

Capitolul 3

Schimbări de repere în spațiu

Mulțimea izometriilor formează un grup. Cu ajutorul acestui grup, se introduce noțiunea de congruență a figurilor din spațiul punctual E_3 . Izometriile de bază sunt rotația, simetria în raport cu un plan, simetria în raport cu un punct și translația.

Rotația și simetriile se mai numesc *transformări ortogonale*. Pe V_3 ele sunt aplicații liniare date prin matrice ortogonale.

Orice izometrie este de forma $I = T \circ \mathcal{R}$, unde T este o translație, iar \mathcal{R} este o transformare ortogonală.

Fie $I = T \circ \mathcal{R}$ izometria care mută reperul $R = \{O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ în reperul $R' = \{O'; \bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'\}$. Izometria I se numește *pozitivă (deplasare)* dacă baza $\{\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'\}$ este orientată pozitiv și *negativă (antideplasare)* în caz contrar.

Principalele izometrii pozitive sunt *translațiile* și *rotațiile*, iar principalele izometrii negative sunt *simetria în raport cu un plan* și *simetria în raport cu un punct*.

3.1 Translația reperului cartezian

Translația unui reper cartezian $Oxyz$ este deplasarea reperului astfel încât axele noului reper $O'x'y'z'$ să rămână paralele și de același sens cu axele vechi (figura 1).

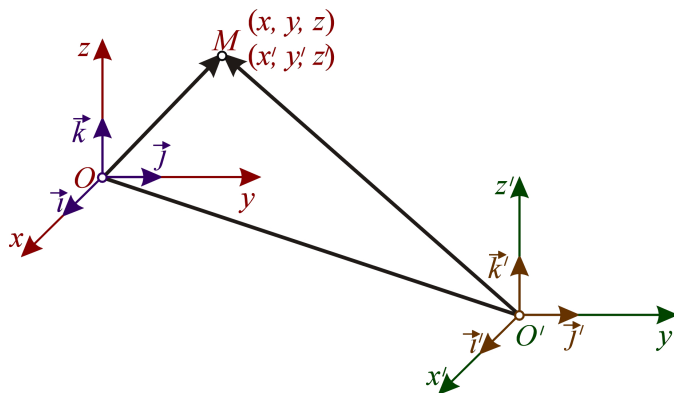


Fig. 1

Prin urmare, reperul $\{O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ supus translației \mathcal{T} devine $\{O'; \bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'\}$, unde $O'(a, b, c)$ și

$$O' = \mathcal{T}(O), \quad \bar{i}' = \mathcal{T}(\bar{i}) = \bar{i}, \quad \bar{j}' = \mathcal{T}(\bar{j}) = \bar{j}, \quad \bar{k}' = \mathcal{T}(\bar{k}) = \bar{k}.$$

Ne propunem să stabilim relațiile între coordonatele x , y și z ale punctului M raportat la reperul $Oxyz$ și coordonatele x' , y' și z' ale aceluiași punct raportat la reperul traslatat $O'x'y'z'$.

Se observă că $\overline{OM} = \overline{OO'} + \overline{O'M}$. Raportând la baza $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$, această relație vectorială devine

$$x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k} + x'\bar{i} + y'\bar{j} + z'\bar{k},$$

de unde obținem ecuațiile carteziene ale translației $x' = x - a$, $y' = y - b$ și $z' = z - c$.

Scrierea matriceală a acestor ecuații este

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Evident, translația este o izometrie pozitivă.

Caz particular. Translația în planul xOy este descrisă de ecuațiile

$$x' = x - a \quad \text{și} \quad y' = y - b.$$

3.2 Rotația reperului cartezian

Analizăm trecerea de la reperul cartezian $\{O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ la reperul cartezian $\{O; \bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'\}$, care au originea comună O (figura 2). Cunoscând coordonatele versorilor \bar{i}' , \bar{j}' și \bar{k}' în raport cu baza $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ și coordonatele (x, y, z) ale punctului M în raport cu primul reper, ne propunem să găsim coordonatele x' , y' și z' ale lui M în raport cu al doilea reper.

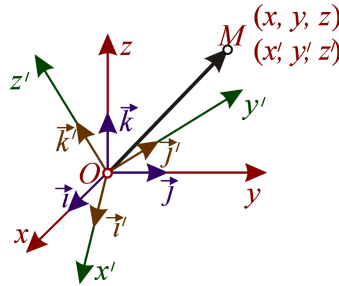


Fig. 2

Observăm că o asemenea schimbare de reper în E_3 este echivalentă cu trecerea de la baza ortonormată $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ la baza ortonormată $\{\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'\}$ din V_3 . De aceea, în baza raționamentelor anterioare avem:

$$\bar{i}' = \mathcal{R}(\bar{i}) = \langle \bar{i}', \bar{i} \rangle \bar{i} + \langle \bar{i}', \bar{j} \rangle \bar{j} + \langle \bar{i}', \bar{k} \rangle \bar{k}$$

$$\bar{j}' = \mathcal{R}(\bar{j}) = \langle \bar{j}', \bar{i} \rangle \bar{i} + \langle \bar{j}', \bar{j} \rangle \bar{j} + \langle \bar{j}', \bar{k} \rangle \bar{k}$$

$$\bar{k}' = \mathcal{R}(\bar{k}) = \langle \bar{k}', \bar{i} \rangle \bar{i} + \langle \bar{k}', \bar{j} \rangle \bar{j} + \langle \bar{k}', \bar{k} \rangle \bar{k}.$$

Notăm $a_{11} = \langle \bar{i}', \bar{i} \rangle$, $a_{21} = \langle \bar{j}', \bar{i} \rangle$, $a_{31} = \langle \bar{k}', \bar{i} \rangle$, $a_{12} = \langle \bar{i}', \bar{j} \rangle$, $a_{22} = \langle \bar{j}', \bar{j} \rangle$, $a_{32} = \langle \bar{k}', \bar{j} \rangle$, $a_{13} = \langle \bar{i}', \bar{k} \rangle$, $a_{23} = \langle \bar{j}', \bar{k} \rangle$, $a_{33} = \langle \bar{k}', \bar{k} \rangle$ și

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Matricea A este matricea de trecere de la baza $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ la baza $\{\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'\}$ și este o matrice ortogonală. Într-adevăr, \bar{i}' , \bar{j}' și \bar{k}' fiind versori (coordonatele lor sunt cosinusuri directe) reciproc ortogonali, deducem $A^t A = {}^t A A = I$, adică ${}^t A = A^{-1}$.

Rezultă că trecerea de la baza ortonormată $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ la baza ortonormată $\{\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'\}$ se face cu ajutorul matricei ortogonale A , iar trecerea inversă se face cu ${}^t A$.

Pentru a stabili relația de legătură între coordonatele x , y și z ale punctului M raportat la sistemul $Oxyz$ și coordonatele x' , y' și z' ale aceluiași punct raportat la sistemul rotit $Ox'y'z'$, observăm că $\overline{OM}|_{Oxyz} = \overline{OM}|_{Ox'y'z'}$ sau echivalent,

$$x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = x'\bar{i}' + y'\bar{j}' + z'\bar{k}'.$$

Înlocuind pe \bar{i}' , \bar{j}' , \bar{k}' și identificând după \bar{i} , \bar{j} și \bar{k} , găsim ecuația matriceală

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$

sau, echivalent

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = {}^t A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Pe de altă parte, aceste ecuații caracterizează o izometrie care păstrează originea. O astfel de izometrie este o *transformare ortogonală* \mathcal{R} . Deoarece $\langle \bar{i}', \bar{j}', \bar{k}' \rangle = \det A$, rezultă că izometria \mathcal{R} este pozitivă dacă $\det A = 1$ (*rotație*) și negativă dacă $\det A = -1$ (*rotație și simetrie*).

Exemple:

1) *Rotația în jurul lui Oz* (figura 3). În reperul cartezian $\{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ considerăm rotația \mathcal{R} de axă Oz și de unghi θ .

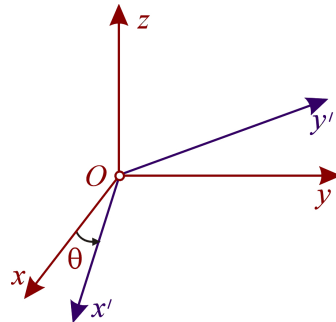


Fig. 3

Din figură rezultă:

$$\bar{i}' = \mathcal{R}(\bar{i}) = \bar{i} \cos \theta + \bar{j} \sin \theta;$$

$$\bar{j}' = \mathcal{R}(\bar{j}) = -\bar{i} \sin \theta + \bar{j} \cos \theta;$$

$$\bar{k}' = \mathcal{R}(\bar{k}) = \bar{k}.$$

Astfel, din relația $x'\bar{i}' + y'\bar{j}' + z'\bar{k}' = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, găsim ecuațiile

$$\mathcal{R}: \begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta \\ z = z'. \end{cases}$$

Evident, determinantul matricei lui \mathcal{R} este de 1, deci \mathcal{R} este o izometrie pozitivă. În particular, o rotație în planul xOy , de unghi θ , în jurul originii este caracterizată prin ecuațiile

$$\begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta. \end{cases}$$

Dintre izometriile în plan reținem *roto-translația* (figura 4), caracterizată prin ecuațiile

$$\begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta + a \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta + b. \end{cases}$$

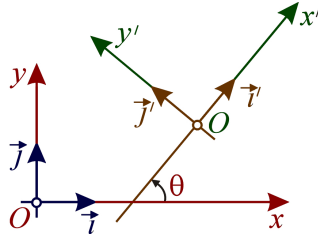


Fig. 4

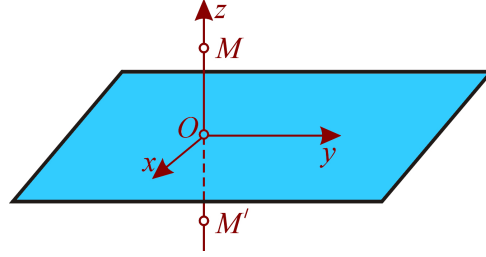


Fig. 5

2) *Simetria față de un plan* (figura 5). Fie reperul ortonormat $\{O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ și \mathcal{S} simetria în raport cu planul $(O; \bar{i}, \bar{j})$. Avem relațiile:

$$\bar{i}' = \mathcal{S}(\bar{i})\bar{i}; \quad \bar{j}' = \mathcal{S}(\bar{j}) = \bar{j}; \quad \bar{k}' = \mathcal{S}(\bar{k}) = -\bar{k}.$$

Astfel, din $x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = x'\bar{i}' + y'\bar{j}' + z'\bar{k}'$, găsim ecuațiile

$$\mathcal{S}: \quad x = x', \quad y = y', \quad z = -z'$$

sau scris matriceal,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Determinantul matricei \mathcal{S} este -1 , deci \mathcal{S} este o izometrie negativă.

3.3 Trecerea de la reperul cartezian la reperul cilindric

Presupunem că spațiul E_3 este raportat la un reper cartezian $Oxyz$. Orice punct $M \in E_3$ este unic determinat de coordonatele sale carteziene (x, y, z) .

Fie $E_3^* = E_3 \setminus Oz$. Poziția unui punct $M \in E_3^*$ poate fi caracterizată și prin tripletul ordonat (ρ, θ, z) , unde ρ este distanța de la origine la proiecția M' a punctului M în planul xOy , iar θ este măsura unghiului dintre semidreptele Ox și OM' (figura 6).

Numerele reale ρ , θ și z se numesc *coordonate cilindrice* ale punctului M în spațiu. Între coordonatele cilindrice și coordonatele carteziene există relațiile:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z. \end{cases}$$

Dacă impunem $\rho > 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $z \in \mathbb{R}$, atunci relațiile precedente asigură corespondența biunivocă între mulțimea $\mathbb{R}^3 \setminus Oz$ și mulțimea $(0, \infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$.

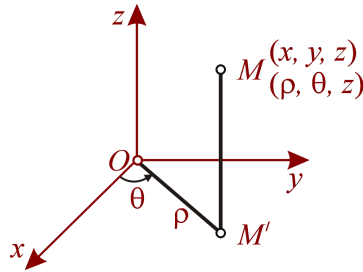


Fig. 6

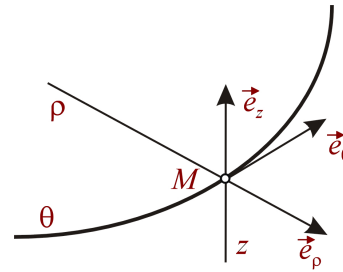


Fig. 7

Suprafețe de coordonate

- $\rho = \rho_0$: cilindru circular cu generatoarele paralele cu Oz .
- $\theta = \theta_0$: semiplan a cărui prelungire trece prin Oz .
- $z = z_0$: plan paralel cu xOy din care s-a scos punctul $(0, 0, z_0)$.

Curbe de coordonate

- $\theta = \theta_0, z = z_0$: semidreaptă paralelă cu xOy a cărei prelungire trece prin Oz .
- $z = z_0, \rho = \rho_0$: cerc cu centrul pe Oz și situat într-un plan paralel cu xOy .
- $\rho = \rho_0, \theta = \theta_0$: dreaptă perpendiculară pe planul xOy .

Curbele de coordonate sunt reciproc ortogonale, deci suprafețele de coordonate sunt reciproc ortogonale.

Considerăm punctul $M(\rho, \theta, z)$. Versorii \bar{e}_ρ , \bar{e}_θ și \bar{e}_z tangenți la liniile de coordonate care trec prin punctul M sunt reciproc ortogonali. De aceea, $\{M(\rho, \theta, z); \bar{e}_\rho, \bar{e}_\theta, \bar{e}_z\}$ este un reper ortonormat mobil, numit *reper cilindric* (figura 7).

Trecerea de la reperul cartezian $\{O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ la reperul cilindric $\{M(\rho, \theta, z); \bar{e}_\rho, \bar{e}_\theta, \bar{e}_z\}$ este descrisă de formulele

$$\begin{cases} \bar{e}_\rho = \cos \theta \bar{i} + \sin \theta \bar{j} \\ \bar{e}_\theta = -\sin \theta \bar{i} + \cos \theta \bar{j} \\ \bar{e}_z = \bar{k}. \end{cases}$$

Aceste formule au la bază regula prin care componentele unui vector față de o bază ortonormată sunt proiecții ale vectorului respectiv pe versorii bazei. De exemplu,

$$\bar{e}_\rho = \langle \bar{e}_\rho, \bar{i} \rangle \bar{i} + \langle \bar{e}_\rho, \bar{j} \rangle \bar{j} + \langle \bar{e}_\rho, \bar{k} \rangle \bar{k} = \cos \theta \bar{i} + \sin \theta \bar{j}.$$

3.4 Trecerea de la reperul cartezian la reperul sferic

Uneori, poziția unui punct $M \in E_3^* = E_3 \setminus Oz$ este caracterizată cu ajutorul unui alt triplet ordonat de numere reale (r, φ, θ) , unde r reprezintă distanța $d(O, M)$, θ este unghiul dintre semidreptele Ox și OM' , iar φ este unghiul dintre semidreptele Oz și OM (figura 8).

Numerele r , φ și θ se numesc *coordonate sferice* ale lui M în spațiu. Între coordonatele sferice și coordonatele carteziene ale punctului M există relațiile

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \varphi. \end{cases}$$

Dacă impunem restricțiile $r > 0$, $\varphi \in (0, \pi)$, $\theta \in [0, 2\pi)$, atunci formulele anterioare asigură corespondența biunivocă între mulțimile $\mathbb{R}^3 \setminus Oz$ și $(0, \infty) \times (0, \pi) \times [0, 2\pi)$.

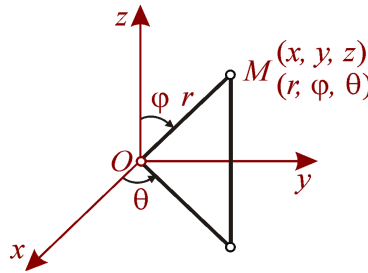


Fig. 8

Observație. În navigația maritimă sau aeriană, radarele determină poziția unei nave (aeronave) într-un reper sferic, având originea în locul de amplasare a stației radar. Marcarea poziției găsite pe o hartă corespunde trecerii într-un reper ortonormat, având latitudine, longitudine (ținând cont și de înălțime pentru traficul aerian).

Suprafețe de coordonate

$r = r_0$: sferă cu centrul în origine din care au fost scoși polii.

$\theta = \theta_0$: semiplan a cărui prelungire trece prin Oz .

$\varphi = \varphi_0$: semicon fără vârf (origine).

Curbe de coordonate

$\theta = \theta_0, \varphi = \varphi_0$: semidreaptă a cărei prelungire trece prin origine.

$\varphi = \varphi_0, r = r_0$: cerc cu centrul pe Oz , situat într-un plan paralel cu xOy .

$r = r_0, \theta = \theta_0$: semicerc (mare, deschis).

Curbele de coordonate sunt reciproc ortogonale, deci suprafețele de coordonate sunt reciproc ortogonale.

Considerăm punctul $M(r, \varphi, \theta)$. Versorii \bar{e}_r , \bar{e}_φ și \bar{e}_θ tangenți la liniile de coordonate care trec prin punctul M sunt reciproc ortogonali. De aceea, $\{M(r, \varphi, \theta); \bar{e}_r, \bar{e}_\varphi, \bar{e}_\theta\}$ este un reper ortonormat

mobil, numit *reper sferic* (figura 9).

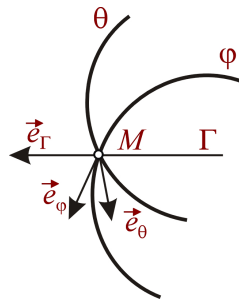


Fig. 9

Ținând seama de figura 9, de formulele de trecere de la o bază ortonormată la o altă bază ortonormată și de proprietățile proiecției, găsim legătura între reperul cartezian și cel sferic

$$\begin{cases} \bar{e}_r = \sin \varphi \cos \theta \bar{i} + \sin \varphi \sin \theta \bar{j} + \cos \varphi \bar{k} \\ \bar{e}_\varphi = \cos \varphi \cos \theta \bar{i} + \cos \varphi \sin \theta \bar{j} - \sin \varphi \bar{k} \\ \bar{e}_\theta = -\sin \theta \bar{i} + \cos \theta \bar{j}. \end{cases}$$

3.5 Probleme propuse

1. **a)** Aflați coordonatele polare (ρ, θ) pentru punctul A ale cărui coordonate carteziene sunt $(x, y) = (1, -2)$;

b) Aflați coordonatele carteziene (x, y) pentru punctul B ale cărui coordonate polare sunt $(\rho, \theta) = (2, \frac{3\pi}{4})$.

2. **a)** Aflați coordonatele cilindrice (ρ, θ, z) pentru punctul C ale cărui coordonate carteziene sunt $(x, y, z) = (1, -2, -3)$;

b) Aflați coordonatele carteziene pentru punctul D ale cărui coordonate cilindrice sunt $(\rho, \theta, z) = (1, \frac{4\pi}{3}, 2)$.

3. **a)** Aflați coordonatele sferice pentru punctul E ale cărui coordonate carteziene sunt $(x, y, z) = (1, -2, -3)$;

b) Aflați coordonatele carteziene pentru punctul F ale cărui coordonate sferice sunt $(r, \varphi, \theta) = (1, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$.

4. Fie reperul cartezian $Oxyz$ față de care considerăm punctele $A(3, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ și $C(0, 0, 6)$. Construim sistemul rotit $Ox'y'z'$ astfel: Oz' are direcția și sensul înălțimii OO' a tetraedului $OABC$, Oy' este paralelă cu $O'A'$, unde A' este piciorul înălțimii dusă din A în triunghiul ABC , iar axa Ox' este aleasă astfel încât sistemul $Ox'y'z'$ să fie orientat pozitiv.

Să se scrie matricea rotației și să se determine direcția invariantă (subspațiul propriu real unidimensional) față de această rotație.

5. Se consideră dreapta

$$D: \frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{2}.$$

Fie \bar{i}' versorul director al dreptei D , \bar{j}' un versor perpendicular pe D care aparține planului yOz și \bar{k}' versorul ales astfel încât $\{\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'\}$ să fie o bază ortonormată.

Să se stabilească formulele de trecere de la baza $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ la baza $\{\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'\}$ și să se compare orientările celor două baze.

6. Se dau punctele $A\left(5, \frac{\pi}{3}, 4\right)$, $B\left(7, \frac{4\pi}{3}, -2\right)$ și $C\left(2, \frac{5\pi}{6}, -1\right)$ în coordonate cilindrice. Să se arate că A și B aparțin unui plan care trece prin Oz și să se afle coordonatele carteziene ale punctelor A și C , precum și distanța dintre ele.

7. Să se transcrie următoarele ecuații în coordonate sferice:

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2); \quad (x^2 + y^2 + z^2)^2(x^2 + y^2) = 4a^2x^2y^2.$$

8. Să se verifice că reperul cilindric și reperul sferic sunt orientate pozitiv.

Capitolul 4

Conice

Conicele constituie unul dintre subiectele matematice care au fost studiate sistematic și temeinic încă din cele mai vechi timpuri. Începuturile studierii conicelor se pierde în negura vremurilor. Se pare că prima dată, conicele sunt menționate de către Menaechmus (375-325 î.Hr.), tutorele lui Alexandru cel Mare. Acesta a ajuns la conice în încercarea de rezolva cele 3 probleme celebre ale antichității: trisecția unghiului, dedublarea cubului și cuadratura cercului. La început, conicele au fost definite ca intersecție a conului circular drept cu un plan.

Aristaios și Euclid se mai ocupă de studiul conicelor dar Appollonius din Perga (262-190 î.Hr.) este cel care consolidează și extinde rezultatele anterioare într-o monografie "Konika", constând din opt cărți cu 487 rezultate. Appollonius a fost primul care numește conicele elipsă, parabolă și hiperbolă.

În perioada Renașterii, conicele capătă o importanță majoră datorită aplicațiilor în fizică (legea mișcării planetare a lui Kepler, studiul traiectoriilor, Galileo Galilei) dar și dezvoltării geometriei analitice (Descartes, Fermat) și geometriei proiective (Desargues, La Hire, Pascal).

Conicele transcend secolelor și ajungem ca în prezent să găsim noi și noi aplicații ale acestora: telescoape, reflectoare, sisteme de captare a energiei solare, antene parabolice, sisteme de navigație, dispozitive medicale de înlăturare a pietrelor de la rinichi, aplicații în arhitectură etc.

Interesant este și faptul că aceste curbe se pot defini în mai multe moduri: ca loc geometric (așa cum au fost studiate în liceu), ca intersecție a unui con cu un plan și, așa cum vom vedea în cele ce urmează, ca mulțime de nivel constant zero a unei forme pătratice afine.

4.1 Tipuri de conice

Conicele sunt figuri (curbe) plane. Pentru a introduce aceste figuri, considerăm un plan (spațiu punctual bidimensional) E_2 raportat la un reper cartezian $\{O; \bar{i}, \bar{j}\}$ prin care planul E_2 se identifică cu \mathbb{R}^2 . Modelul \mathbb{R}^2 permite descrierea figurilor cu ajutorul ecuațiilor și inecuațiilor asociate unor funcții.

Fie forma pătratică afină (polinom de gradul 2 în necunoscutele x și y)

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00}, \quad a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0.$$

Definiție 23. Mulțimea de nivel constant zero

$$\Gamma = \{M(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x, y) = 0\}$$

se numește conică sau curbă algebrică de ordinul al doilea. Se notează $\Gamma: g(x, y) = 0$.

Din punct de vedere topologic, conicele sunt mulțimi închise în \mathbb{R}^2 deoarece $\{0\}$ este o mulțime închisă în \mathbb{R} , $\Gamma = g^{-1}(0)$ și $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă (teoremă de analiză matematică).

Una dintre problemele importante ale geometriei analitice este de a dovedi că orice conică este congruentă cu una dintre următoarele mulțimi: cerc, elipsă, hiperbolă, parabolă, pereche de drepte (concurrente, paralele, confundate), punct, mulțimea vidă.

Pentru aceasta se utilizează rototranslația, care realizează trecerea de la reperul cartezian $\{O; \bar{i}, \bar{j}\}$ la un reper adecvat orientat pozitiv (numit *reper canonic* sau *natural*) față de care ecuația $g(x, y) = 0$ să aibă *forma canonică*.

După cum vom vedea ulterior, în discuție intervin următoarele numere atașate polinomului $g(x, y)$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{12} & a_{22} & a_{20} \\ a_{10} & a_{20} & a_{00} \end{vmatrix},$$

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$I = a_{11} + a_{22}$$

$$K = \delta + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{10} \\ a_{10} & a_{00} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{20} \\ a_{20} & a_{00} \end{vmatrix}.$$

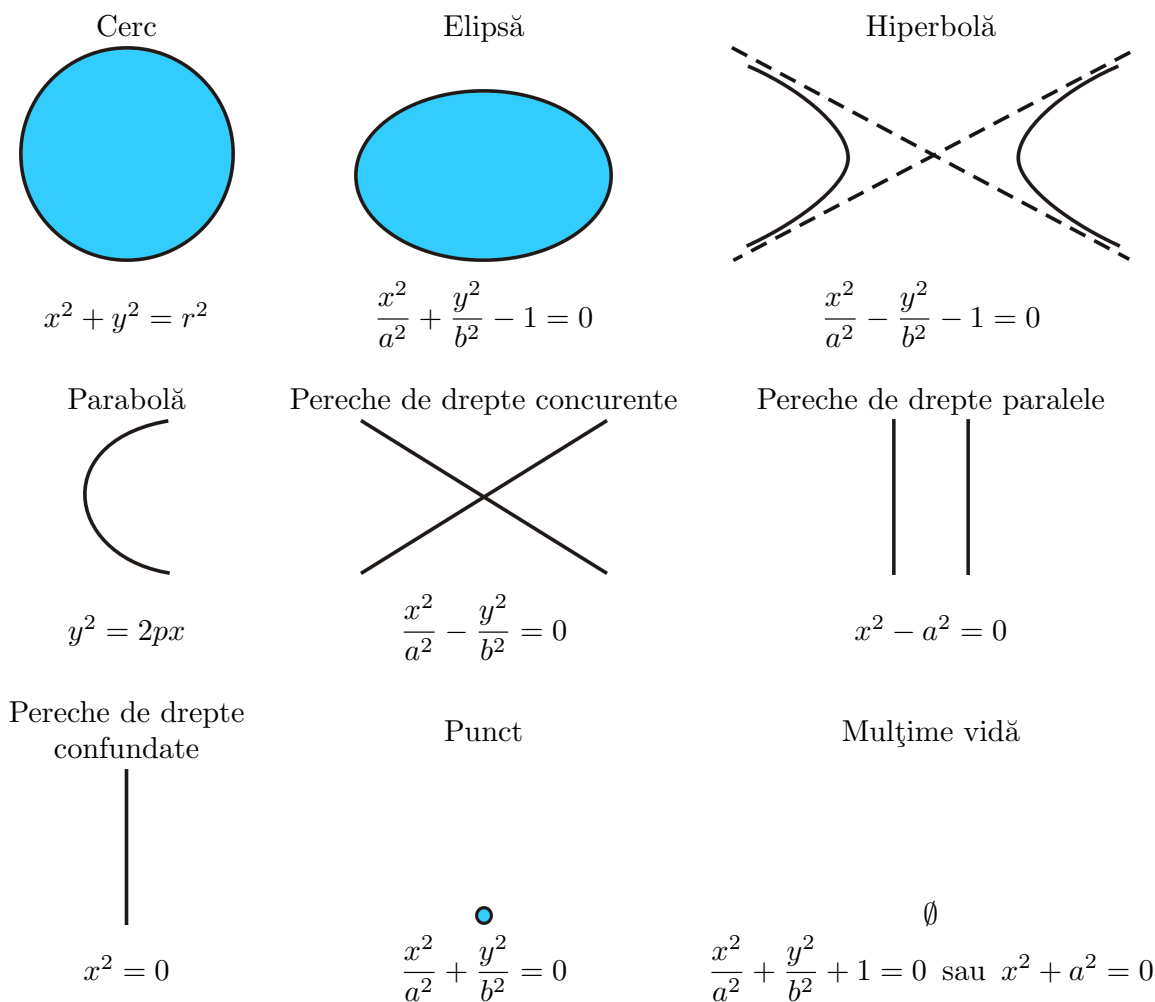
Prin trecerea de la reperul inițial $\{O; \bar{i}, \bar{j}\}$ la reperul canonic $\{O'; \bar{i}', \bar{j}'\}$, polinomul $g(x, y)$ se schimbă în $g'(x', y')$. Se poate arăta că numerele Δ' , δ' și I' atașate polinomului g' sunt respectiv egale cu numerele Δ , δ și I . De aceea, Δ , δ și I se numesc *invariații metrici* ai conicei. Ultimul număr atașat, K , este invariant doar la rotații și se va numi *semi-invariant metric* al conicei.

Clasificarea conicelor este dată în tabelul următor:

δ	Δ	$I \Delta$	K	CONICA	GENUL	
> 0	$\neq 0$	< 0		ELIPSĂ	<i>GEN ELLIPTIC</i>	
	$\neq 0$	> 0		Conica vidă		
	$= 0$			Punct (dublu)		
< 0	$\neq 0$			HIPERBOLĂ	<i>GEN</i>	
	$= 0$			Pereche de drepte concurrente	<i>HIPERBOLIC</i>	
$= 0$	$\neq 0$			PARABOLĂ	<i>GEN PARABOLIC</i>	
	$= 0$			< 0		Pereche de drepte paralele
				$= 0$		Pereche de drepte confundate
				> 0		Conica vidă

Invariantul δ ne dă genul conicei ($\delta > 0$ - gen eliptic, $\delta < 0$ - gen hiperbolic, $\delta = 0$ - gen parabolic), în timp ce invariantul Δ ne dă degenerarea ($\Delta \neq 0$ - conică nedegenerată, $\Delta = 0$ - conică degenerată).

În cazul hiperbolic, anularea invariantului I conduce la o hiperbolă echilaterală (asimptotele sunt perpendiculare) sau în cazul degenerat ($\Delta = 0$), la pereche de drepte perpendiculare.



Un punct critic al funcției g este descris de sistemul liniar

$$\frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial x} = a_{11}x + a_{12}y + a_{10} = 0, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial y} = a_{12}x + a_{22}y + a_{20} = 0.$$

Determinantul acestui sistem liniar este

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Dacă $\delta \neq 0$, atunci prezentul sistem liniar are soluție unică, deci funcția g are un singur punct critic. Restul situațiilor le lăsăm pentru cititor.

Teorema 24. *Punctul $M_0(x_0, y_0)$ este centru de simetrie al conicei $\Gamma: g(x, y) = 0$ dacă și numai dacă $M_0(x_0, y_0)$ este un punct critic al funcției g .*

Demonstrație. Efectuând translația $x = x_0 + x'$ și $y = y_0 + y'$ (figura 1), ecuația conicei devine

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + x'g_{x_0} + y'g_{y_0} + g(x_0, y_0) = 0,$$

unde $g_{x_0} = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)$ și $g_{y_0} = \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)$.

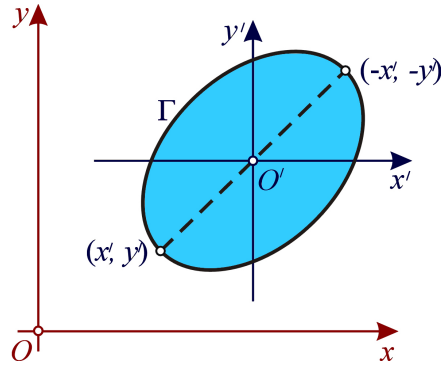


Fig. 1

Originea $M_0(x_0, y_0)$ a reperului traslatat este centru de simetrie al conicei Γ dacă și numai dacă odată cu punctul arbitrar (x', y') , conica Γ conține și punctul $(-x', -y')$, adică

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 - x'g_{x_0} - y'g_{y_0} + g(x_0, y_0) = 0.$$

Prin scădere rezultă $x'g_{x_0} + y'g_{y_0} = 0$, deci $M_0(x_0, y_0)$ satisface $g_{x_0} = 0$ și $g_{y_0} = 0$, întrucât (x', y') este un punct arbitrar pe Γ . \square

Concluzii:

1) Dacă $\delta \neq 0$, atunci conica $\Gamma: g(x, y) = 0$ are un centru de simetrie (punctul critic al funcției g , originea reperului canonic). Conicele cu centru sunt: cercul, elipsa, hiperbola, perechea de drepte concurente, un punct și mulțimea vidă. Ecuația lui Γ redusă la centru este

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + g(x_0, y_0) = 0.$$

De asemenea, se poate demonstra că

$$g(x_0, y_0) = \frac{\Delta}{\delta}.$$

2) Dacă $\delta = 0$ și $\Delta \neq 0$, atunci funcția g nu are punct critic, deci conica Γ nu are centru. Conica fără centru este parabola.

3) Dacă $\delta = 0$ și $\Delta = 0$, atunci funcția g are o dreaptă de puncte critice, deci conica Γ are o dreaptă de centre. Conicele cu o dreaptă de centre sunt perechile de drepte paralele sau confundate și mulțimea vidă.

Observații:

1) Conica pentru care $\delta > 0$ (elipsă, conica vidă, punct) se numește *conică de gen eliptic*. Conica pentru care $\delta < 0$ (hiperbola, pereche de drepte concurente) se numește *conică de gen hiperbolic*. Conica pentru care $\delta = 0$ (parabola, drepte paralele sau confundate, mulțime vidă) se numește *conică de gen parabolic*.

2) Ecuația generală a unei conice, $g(x, y) = 0$, conține șase coeficienți a_{11} , a_{12} , a_{22} , a_{10} , a_{20} și a_{00} , care se numesc *parametri neesențiali*. Prin împărțire cu unul diferit de 0 se obțin cinci coeficienți care se numesc *parametri esențiali*. De aceea, pentru determinarea unei conice sunt suficiente cinci condiții (de exemplu, conica să treacă prin cinci puncte).

3) Fie $a_{12} = 0$, $a_{11} = a_{22} = a \neq 0$ și $\rho = \left(\frac{a_{10}}{a}\right)^2 + \left(\frac{a_{20}}{a}\right)^2 - \frac{a_{00}}{a}$. Dacă $\rho < 0$, atunci $\Gamma = \Phi$. Dacă $\rho > 0$, atunci Γ este un cerc cu centrul în $C\left(-\frac{a_{10}}{a}, -\frac{a_{20}}{a}\right)$ și de rază $\sqrt{\rho}$. Dacă $\rho = 0$, atunci Γ se reduce la punctul C .

4.2 Reducerea la forma canonică a ecuației unei conice

Fie conica Γ descrisă de ecuația generală

$$g(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0.$$

Pentru stabilirea ecuației canonice avem în vedere următoarele situații:

- a) dacă $a_{12} = 0$, atunci se face o translație;
- b) dacă $a_{12} \neq 0$, atunci se face mai întâi o rotație. În acest caz se poate proceda fie ca în subsecțiunea 4.2.1, fie ca în 4.2.2.

4.2.1 Metoda valorilor proprii

Tipul conicei de ecuație generală

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0$$

este determinat de forma pătratică

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2.$$

Matriceal, această formă pătratică se scrie

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad a_{12} = a_{21}.$$

Matricei simetrice $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ îi atașăm ecuația caracteristică

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ sau } \lambda^2 - I\lambda + \delta = 0,$$

ale cărei rădăcini λ_1 și λ_2 sunt reale și distincte. Pot apărea următoarele situații:

- i) λ_1 și λ_2 au semne contrare, adică $\delta < 0$, conica fiind de gen hiperbolic;
- ii) λ_1 și λ_2 au același semn, adică $\delta > 0$, conica fiind de gen eliptic;
- iii) una dintre rădăcinii este 0, adică $\delta = 0$, conica fiind de gen parabolic.

Sistemele

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_i)u_i + a_{12}v_i = 0 \\ a_{21}u_i + (a_{22} - \lambda_i)v_i = 0, & i = 1, 2 \end{cases}$$

dau coordonatele vectorilor proprii (u_1, v_1) , respectiv (u_2, v_2) , care sunt automat ortogonali. Prin normare găsim versorii \bar{e}_1 și \bar{e}_2 .

Fie R matricea formată cu coordonatele versorilor \bar{e}_1 și \bar{e}_2 așezate pe coloane. Având în vedere posibilitatea înlocuirii unuia dintre versorii \bar{e}_1 și \bar{e}_2 prin opusul său sau posibilitatea renumerotării valorilor proprii, putem presupune $\det R = 1$. Rotația

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

reduce forma pătratică $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ la expresia canonică $\lambda_1x'^2 + \lambda_2y'^2$. Versorii proprii \bar{e}_1 și \bar{e}_2 dau direcțiile noilor axe Ox' , respectiv Oy' .

Prin rotația efectuată, ecuația conicei devine

$$\lambda_1x'^2 + \lambda_2y'^2 + 2a_{10}'x' + 2a_{20}'y' + a_{00}' = 0.$$

Restrângând pătratele, forțând factorii comuni λ_1 și λ_2 , găsim

$$\lambda_1(x' + \dots)^2 + \lambda_2(y' + \dots)^2 + a = 0.$$

Efectuând translația $x'' = x' + \dots$ și $y'' = y' + \dots$, obținem ecuația canonică

$$\lambda_1x''^2 + \lambda_2y''^2 + a = 0.$$

Cel puțin una dintre axele reperului canonic $x''O''y''$ este axă de simetrie a conicei Γ .

4.2.2 Metoda roto-translației

Matricea de trecere R , fiind o matrice ortogonală cu $\det R = 1$, este matricea atașată unei rotații \mathcal{R} în raport cu o bază ortonormată. Rotația \mathcal{R} poate fi fixată prin unghiul de rotație θ .

Teorema 25. Fie conica $\Gamma: g(x, y) = 0$. Dacă $a_{12} \neq 0$, atunci unghiul θ dat de ecuația

$$(a_{11} - a_{22}) \sin 2\theta = 2a_{12} \cos 2\theta$$

determină o rotație \mathcal{R} în plan,

$$\begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta, \end{cases}$$

care produce anularea coeficientului produsului $x'y'$ din ecuația $g \circ \mathcal{R}(x', y') = 0$.

Demonstrație. Observăm că după efectuarea rotației, ecuația $g(x, y) = 0$ trece în $g \circ \mathcal{R}(x', y') = 0$. Coeficientul lui $x'y'$ din ultima ecuație este

$$2a_{12}' = (a_{22} - a_{11}) \sin 2\theta + 2a_{12} \cos 2\theta.$$

Astfel teorema devine evidentă.

Întrucât noua ecuație a conicei Γ nu conține termenul în $x'y'$, urmează să completăm pătratele dacă este cazul și în urma unei translații să obținem ecuația canonică. \square

Teoremele care se pot formula relativ la reducerea la forma canonică a ecuației unei conice se rezumă prin tabelul următor:

Condiții		Curba	Ce transformare se face pentru a găsi ecuația canonică
$\Delta = 0$	$\delta > 0$	$\Gamma = \{(x_0, y_0)\}$	<p>Dacă $a_{12} = 0$, atunci se face o translație</p> <p>Dacă $a_{12} \neq 0$, atunci se face mai întâi rotația</p> $\begin{aligned} x &= x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y &= x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{aligned}$ <p>unde θ este unghiul determinat de ecuația</p> $(a_{11} - a_{22}) \sin 2\theta = 2a_{12} \cos 2\theta$ <p>După aceea, dacă este cazul, se face o translație</p>
	$\delta = 0$	$\Gamma = D_1 \cap D_2$, unde D_1 și D_2 sunt drepte paralele sau confundate, sau $\Gamma = \Phi$	
	$\delta < 0$	$\Gamma = D_1 \cup D_2$, unde D_1 și D_2 sunt drepte concurente; $I = 0$ implică $D_1 \perp D_2$	
$\Delta \neq 0$	$I\Delta < 0$	elipsă	
	$I\Delta > 0$		
	$\delta = 0$	parabolă	
	$\delta < 0$	hiperbolă $I = 0$ implică hiperbolă echilaterală	

Observații:

- 1) Conicele sunt reuniuni de grafice de funcții implicite (definite prin ecuații).
- 2) Conicele pot fi trasate utilizând programe de manipulare simbolică: Mathematica[®], Maple[®] etc.

4.3 Intersecția dintre o dreaptă și o conică

Fie D o dreaptă de ecuații parametrice $x = x_0 + \ell t$, $y = y_0 + mt$, $t \in \mathbb{R}$ și Γ o conică de ecuație carteziană implicită, $g(x, y) = 0$. Intersecția $D \cap \Gamma$ este descrisă de sistemul

$$\begin{cases} x = x_0 + \ell t, & y = y_0 + mt \\ g(x, y) = 0, & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Eliminând pe x și y , intersecția $D \cap \Gamma$ corespunde rădăcinilor t_1 și t_2 în \mathbb{R} ale ecuației

$$t^2 \varphi(\ell, m) + t \left(\ell \frac{\partial g}{\partial x_0} + m \frac{\partial g}{\partial y_0} \right) + g(x_0, y_0) = 0, \quad (4.1)$$

unde $\varphi(\ell, m) = a_{11}\ell^2 + 2a_{12}\ell m + a_{22}m^2$.

În cele ce urmează notăm

$$\frac{\partial g}{\partial x_0} = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = g_{x_0} \quad \text{și} \quad \frac{\partial g}{\partial y_0} = \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = g_{y_0}.$$

Discuție:

1) Fie $\varphi(\ell, m) \neq 0$. Atunci ecuația (4.1) este de gradul doi.

Dacă

$$q = (\ell g_{x_0} + m g_{y_0})^2 - 4\varphi(\ell, m)g(x_0, y_0) > 0,$$

atunci ecuația are două rădăcini reale și distincte, t_1 și t_2 . În acest caz, D taie pe Γ în două puncte distincte, P_1 și P_2 .

Dacă $q = 0$, atunci ecuația are două rădăcini reale confundate, $t_1 = t_2$. În acest caz, D taie pe Γ în două puncte confundate, $P_1 = P_2$ și se numește *tangentă* la Γ în punctul P_1 . Evident, din orice punct $P_0 \notin \Gamma$ se pot duce cel mult două tangente la Γ .

În particular, când $P_0 \in \Gamma$ și g_{x_0}, g_{y_0} nu se anulează simultan, observăm că tangenta la Γ în punctul P_0 are ecuația

$$(x - x_0)g_{x_0} + (y - y_0)g_{y_0} = 0,$$

obținută din condiția de tangență $\ell g_{x_0} + m g_{y_0} = 0$ și ecuațiile lui D , prin eliminarea parametrilor $t\ell$ și tm (figura 2).

Conica Γ se numește *netedă* dacă în fiecare punct al său există tangență. Netezirea conicei Γ elimină punctele critice, adică punctele în care g_x, g_y și g se anulează simultan.

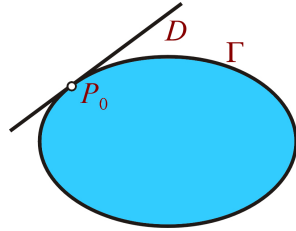


Fig. 2

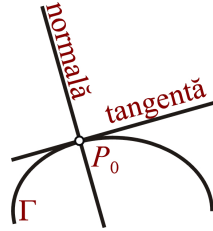


Fig. 3

Dreapta care trece prin $P_0(x_0, y_0) \in \Gamma$ și este perpendiculară pe tangență se numește *normală* (figura 3). Ea are ecuația

$$\frac{x - x_0}{g_{y_0}} = \frac{y - y_0}{g_{x_0}}.$$

Dacă $q < 0$, atunci ecuația (4.1) nu are soluții în \mathbb{R} , deci D nu taie pe Γ .

2) Fie $\varphi(\ell, m) = 0$. Ecuația (4.1) este de gradul întâi. Dacă $\ell g_{x_0} + m g_{y_0} \neq 0$, atunci avem o soluție unică t_1 , deci D taie pe Γ într-un singur punct P_1 . Dacă $\ell g_{x_0} + m g_{y_0} = 0$ și $g(x_0, y_0) \neq 0$, atunci ecuația (4.1) este o imposibilitate, deci D nu taie pe Γ . Dacă $\ell g_{x_0} + m g_{y_0} = 0$ și $g(x_0, y_0) = 0$, ecuația este identic satisfăcută, deci $D \subseteq \Gamma$, adică Γ este o pereche de drepte.

Fie o conică nedegenerată Γ și o direcție în planul conicei descrisă de vectorul nenul $\vec{d}(\ell, m)$.

Definiție 26. Direcția $\vec{d}(\ell, m)$ se numește direcție asimptotică pentru Γ dacă

$$\varphi(\ell, m) = a_{11}\ell^2 + 2a_{12}\ell m + a_{22}m^2 = 0.$$

Evident, o dreaptă care are o asemenea direcție taie conica nedegenerată într-un singur punct sau nu taie pe Γ .

Discuție:

1) Dacă $\delta < 0$ și $\Delta \neq 0$ (hiperbolă), atunci ecuația $\varphi(\ell, m) = 0$ determină două direcții asimptotice distincte (ℓ_1, m_1) și (ℓ_2, m_2) .

2) Dacă $\delta > 0$ și $\Delta \neq 0$ (elipsă), atunci ecuația $\varphi(\ell, m) = 0$ nu admite soluții reale nebanale. De aceea elipsa nu admite direcții asimptotice.

3) Dacă $\delta = 0$ și $\Delta \neq 0$ (parabolă), atunci ecuația $\varphi(\ell, m) = 0$ dă o direcție asimptotică dublă (ℓ, m) , care este de fapt direcția axei conice.

Definiție 27. O dreaptă D se numește *asimptotă* a unei conice nedegenerate Γ , dacă direcția ei este asimptotică și $D \cap \Gamma = \emptyset$.

Discuția precedentă justifică următoarea

Teorema 28. *O asimptotă a conicei nedegenerate Γ este caracterizată analitic prin ecuația $\ell g_x + m g_y = 0$, unde (ℓ, m) este o direcție asimptotică.*

Discuție:

1) Hiperbola are două asimptote care trec prin centrul conicei. Asimptotele aproximează ramurile infinite ale hiperbolei.

2) Elipsa nu are direcție asimptotică și în consecință nu are asimptotă.

3) Parabola admite o direcție asimptotică pentru care ecuația $\ell g_x + m g_y = 0$ reprezintă mulțimea vidă, deci parabola nu are asimptotă.

4.4 Pol și polară

Fie conica $\Gamma: g(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0$ și punctul $M_0(x_0, y_0)$. Substituirile

$$x^2 \rightarrow xx_0, \quad y^2 \rightarrow yy_0, \quad xy \rightarrow \frac{1}{2}(xy_0 + x_0y), \quad x \rightarrow \frac{1}{2}(x + x_0), \quad y \rightarrow \frac{1}{2}(y + y_0)$$

se numesc *dedublări*. Prin *dedublata ecuației de gradul doi* $g(x, y) = 0$ în punctul $M_0(x_0, y_0)$, înțelegem ecuația

$$a_{11}xx_0 + a_{12}(xy_0 + x_0y) + a_{22}yy_0 + a_{10}(x + x_0) + a_{20}(y + y_0) + a_{00} = 0,$$

care se transcrie

$$(x - x_0)g_{x_0} + (y - y_0)g_{y_0} + 2g(x_0, y_0) = 0.$$

Astfel, dedublata este o ecuație de gradul unu, deci reprezintă o dreaptă D dacă și numai dacă $g_{x_0}^2 + g_{y_0}^2 > 0$.

Definiție 29. Dreapta D se numește *polară* lui în raport cu conica Γ . Punctul M_0 se numește *polul* dreptei D .

La prima vedere, definiția polarei depinde de sistemul cartezian de coordonate folosit. Acest neajuns este înlăturat de observația că rototranslațiile nu modifică gradul ecuațiilor utilizate pentru descrierea unei drepte (ecuații de gradul unu) sau unei conice (ecuații de gradul doi).

Teorema 30. *Polara D a punctului M_0 în raport cu conica Γ nu depinde de sistemul cartezian de coordonate utilizat.*

Teorema 31. Fie conica $\Gamma: g(x, y) = 0$ și punctul $M_0(x_0, y_0)$, care determină polara D .

1) Dacă $M_1(x_1, y_1) \in D$ și D_1 este polara lui M_1 față de Γ , atunci $M_0 \in D_1$.

2) $M_0 \in \Gamma$ dacă și numai dacă $M_0 \in D$. În acest caz, polara lui M_0 este tangenta la Γ în punctul M_0 .

Demonstrație. 1) Polara D are ecuația

$$a_{11}xx_0 + a_{12}(xy_0 + x_0y) + a_{22}yy_0 + a_{10}(x + x_0) + a_{20}(y + y_0) + a_{00} = 0.$$

Simetria acestei ecuații în raport cu $M_0(x_0, y_0)$ și $M(x, y)$ probează afirmația făcută.

2) Dacă $M_0 \in \Gamma$, adică $g(x_0, y_0) = 0$, atunci ecuația polarei în M_0 se reduce la ecuația tangentei

$$(x - x_0)g_{x_0} + (y - y_0)g_{y_0} = 0.$$

□

Teorema 32. Fie Γ o conică nedegenerată, M_0 un punct din planul conicei și D polara lui M_0 în raport cu Γ .

1) Corespondența $M_0 \rightarrow D$ este biunivocă în următoarele condiții: dacă $\delta \neq 0$, atunci se exclude centrul conicei și mulțimea dreptelor care trec prin centru; dacă $\delta = 0$, atunci se exclude axa paraboliei.

2) Fie $M_1(x_1, y_1)$ și $M_2(x_2, y_2)$ două puncte astfel încât dreapta M_1M_2 nu conține centrul conicei, dacă $\delta \neq 0$, sau nu are direcția axei paraboliei, dacă $\delta = 0$. Polarele D_1 și D_2 ale punctelor M_1 și M_2 se intersectează în polul M al dreptei M_1M_2 .

3) Dacă trei puncte, M_1, M_2 și M_3 , aparțin unei drepte D și sunt satisfăcute condițiile din 2), atunci polarele D_1, D_2 și D_3 sunt concurente în polul dreptei D .

Demonstrație. 1) Fie $M_0(x_0, y_0)$ și $\Gamma: g(x, y) = 0$ o conică nedegenerată, adică $\Delta \neq 0$. Polara lui M_0 în raport cu Γ este

$$D: x(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10}) + y(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20}) + a_{10}x_0 + a_{20}y_0 + a_{00} = 0.$$

Reciproc, fiind dată polara (dreapta) $D: ax + by + c = 0$, polul $M_0(x_0, y_0)$ se găsește din sistemul

$$\frac{a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10}}{a} = \frac{a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20}}{b} = \frac{a_{10}x_0 + a_{20}y_0 + a_{00}}{c}.$$

□

Corolarul 33. Fie Γ o conică nedegenerată (figura 4). Fie $Q_1, Q_2 \in \Gamma$ astfel încât dreapta Q_1Q_2 nu conține centrul lui Γ (dacă $\delta \neq 0$) sau nu este axa paraboliei (dacă $\delta = 0$). Tangentele la Γ în punctele Q_1 și Q_2 se intersectează în polul P al dreptei Q_1Q_2 .

Reciproc, dacă dintr-un punct P putem duce două tangente la Γ , atunci dreapta determinată de punctele de tangență este polara lui P în raport cu Γ .

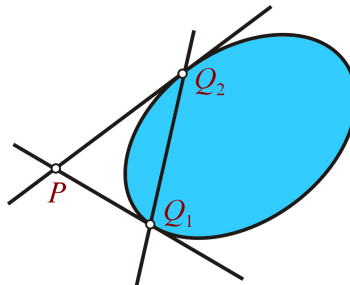


Fig. 4

Demonstrație. Se aplică teorema 32, punctul 2), cu observația că polara unui punct de pe conică este tangenta la conică în acel punct. \square

Teorema 34. Fie Γ o conică degenerată, adică $\Delta = 0$.

- 1) Dacă $\delta \neq 0$, atunci polara oricărui punct trece prin centrul coniceii.
- 2) Dacă $\delta = 0$, atunci toate polarele sunt paralele.

Teorema 35. Fie Γ o conică nedegenerată, $P_0(x_0, y_0)$ un punct fixat și

$$D': x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad t \in \mathbb{R},$$

o dreaptă variabilă prin P_0 care taie pe Γ în punctele $P_1(x_1, y_1)$ și $P_2(x_2, y_2)$. Locul geometric al punctului $P \in D'$ descris prin condițiile

$$\frac{PP_1}{PP_2} = \frac{P_0P_1}{P_0P_2},$$

(l, m) direcție variabilă, este o parte din polara D a punctului P_0 în raport cu conica Γ (figura 5).

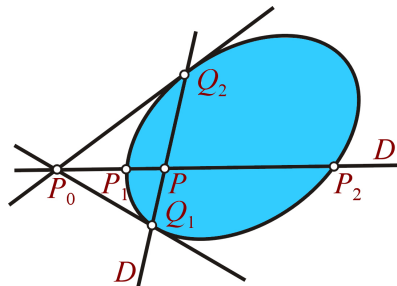


Fig. 5

4.5 Diametru conjugat cu o direcție dată

Fie conica $\Gamma: g(x, y) = 0$ și g_x, g_y derivatele parțiale ale funcției g . Dacă $\delta \neq 0$, atunci soluția sistemului $g_x = 0, g_y = 0$ este centrul coniceii Γ . Dacă $\delta = 0$ și $\Delta \neq 0$ (parabola), atunci există numerele α și β cu proprietatea $\beta g_y = g_x + \alpha$.

Fie o direcție în plan, descrisă prin vectorul nenul $\bar{d}(\ell, m)$.

Definiție 36. Dreapta $D: \ell g_x + m g_y = 0$ se numește diametrul coniceii Γ conjugat direcției (ℓ, m) .

Teorema 37. Locul geometric al mijloacelor corzilor coniceii Γ având direcția neasimptotică $\bar{d}(\ell, m)$ este o parte a diametrului

$$D: \ell g_x + m g_y = 0.$$

Demonstrație. Deoarece $\bar{d}(\ell, m)$ este o direcție neasimptotică, locul geometric are sens, existând drepte cu această direcție care intersectează pe Γ în două puncte. Dreapta care trece printr-un punct $P_0(x_0, y_0)$ și are direcția \bar{d} , este descrisă de ecuațiile

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Prin ipoteză, această dreaptă taie Γ în două puncte, $P_1(x_1 = x_0 + \ell t_1, y_1 = y_0 + m t_1)$ și $P_2(x_2 = x_0 + \ell t_2, y_2 = y_0 + m t_2)$, unde t_1 și t_2 sunt soluțiile ecuației

$$t^2 \varphi(\ell, m) + t(\ell g_{x_0} + m g_{y_0}) + g(x_0, y_0) = 0.$$

Mijlocul segmentului $[P_1 P_2]$ (figura 6) are coordonatele

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = x_0 + \ell \frac{t_1 + t_2}{2}, \quad \frac{y_1 + y_2}{2} = y_0 + m \frac{t_1 + t_2}{2}$$

și acest punct coincide cu P_0 dacă și numai dacă $t_1 + t_2 = 0$, adică $\ell g_{x_0} + m g_{y_0} = 0$. Deoarece P_0 este un mijlocul unui segment $[P_1 P_2]$ arbitrar, rezultă că teorema este adevărată. \square

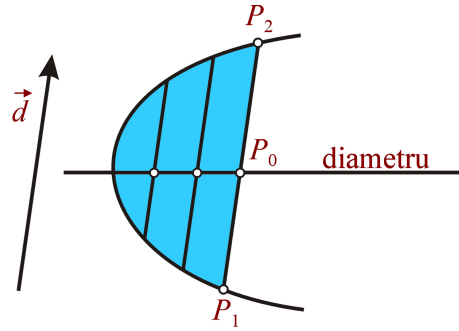


Fig. 6

Observații:

1) În ipoteza $\delta \neq 0$ (conice cu centru), diametrii conjugăți cu direcții arbitrare determină un fascicul de drepte cu vârful în centrul conice.

2) Dacă $\delta = 0$ și $\Delta \neq 0$ (parabolă), atunci diametrii conjugăți cu direcții arbitrare determină un fascicul de drepte paralele

$$g_x + \mu = 0.$$

Direcția acestui fascicul de drepte paralele este $(a_{12}, -a_{11})$ sau $(a_{22}, -a_{12})$. Evident, axa de simetrie a parabolei este un diametru, deci are direcția $(a_{12}, -a_{11})$ sau $(a_{22}, -a_{12})$. Direcția axei nu-i corespunde nici un diametru conjugat deoarece ecuația $a_{12}g_x - a_{11}g_y = 0$ reprezintă mulțimea vidă.

Fie $\Gamma: g(x, y) = 0$ o conică cu centru. Diametrul $D: \ell g_x + m g_y = 0$ are direcția $(\ell a_{12} + m a_{22}, -(\ell a_{11} + m a_{12}))$. Orice altă pereche de numere reale (ℓ_0, m_0) reprezintă aceeași direcție dacă și numai dacă

$$\frac{\ell_0}{\ell a_{12} + m a_{22}} = \frac{m_0}{-(\ell a_{11} + m a_{12})}$$

sau

$$a_{11} \ell \ell_0 + a_{12} (\ell m_0 + \ell_0 m) + a_{22} m m_0 = 0.$$

Această relație este simetrică în (ℓ, m) și (ℓ_0, m_0) . De aceea, diametrul conjugat direcției (ℓ_0, m_0) are direcția (ℓ, m) .

Definiție 38. Doi diametri ale căror direcții (ℓ, m) și (ℓ_0, m_0) satisfac relația precedentă se numesc diametri conjugăți unul altuia.

Observație. Ecuația care leagă direcțiile a doi diametri conjugăți este dedublata ecuației

$$\varphi(\ell, m) = a_{11}\ell^2 + 2a_{12}\ell m + a_{22}m^2 = 0,$$

care determină direcțiile asimptotice. De aceea, o asimptotă poate fi privită ca un diametru autoconjugat.

4.6 Axele unei conice

O dreaptă D se numește *axă de simetrie* a conicei Γ dacă simetricul în raport cu D al fiecărui punct din Γ aparține tot lui Γ . Ne propunem să determinăm axele de simetrie ale unei conice Γ dată prin ecuația generală $g(x, y) = 0$ (figura 7).

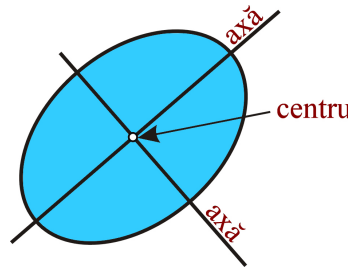


Fig. 7

Presupunem că $\bar{d}(\ell, m)$ reprezintă o direcție ortogonală pe axa de simetrie. Pe de altă parte, axa de simetrie este diametrul conjugat direcției $\bar{d}(\ell, m)$, deoarece conține mijloacele corzilor de direcție $\bar{d}(\ell, m)$, deci axa de simetrie are ecuația $\ell g_x + m g_y = 0$, dacă vectorul normal la ea de componente $(\ell a_{12} + m a_{22}, \ell a_{11} + m a_{12})$ este coliniar cu \bar{d} , adică

$$\frac{a_{11}\ell + a_{12}m}{\ell} = \frac{a_{12}\ell + a_{22}m}{m}.$$

Prelucrând ultima ecuație, găsim ecuația care determină direcțiile axelor

$$(a_{11} - a_{22})m\ell + a_{12}(m^2 - \ell^2) = 0.$$

Discuție:

1) Dacă $\delta \neq 0$, atunci conica Γ are un centru de simetrie $M_0(x_0, y_0)$, care este soluția sistemului linear $g_x = 0$, $g_y = 0$ și două axe de simetrie de direcții (ℓ_i, m_i) , $i = 1, 2$. Ecuația unei axe este fie de forma $\ell_i g_x + m_i g_y = 0$, fie de forma $\frac{x - x_0}{\ell_i} = \frac{y - y_0}{m_i}$. În fapt, axele sunt diametri conjugăți între ei.

Intersecțiile dintre axe și conica Γ se numesc *vârfuri*.

2) Fie $\delta = 0$ și $\Delta \neq 0$, deci conica Γ este o parabolă. Anterior am văzut că direcția axei parabolei Γ este $(a_{12}, -a_{11})$ sau $(a_{22}, -a_{12})$. Direcția perpendiculară pe axă este (a_{11}, a_{12}) sau (a_{21}, a_{22}) . De aici rezultă că ecuația axei parabolei este

$$a_{11}g_x + a_{12}g_y = 0 \text{ sau } a_{21}g_x + a_{22}g_y = 0$$

(diametru conjugat cu direcția (a_{11}, a_{12}) sau (a_{21}, a_{22})).

Intersecția dintre axă și parabolă se numește *vârf*.

4.7 Probleme rezolvate

1. Să se reducă ecuația $3x^2 - 4xy - 2x + 4y - 3 = 0$ la forma canonică și să se construiască conica corespunzătoare.

Soluție. Matricea formei pătratice $3x^2 - 4xy$ este $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Ecuația caracteristică a acestei matrice, $\begin{vmatrix} 3 - \lambda & -2 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$ sau $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$, are rădăcinile $\lambda_1 = -1$ și $\lambda_2 = 4$.

Coordonatele (u_1, v_1) ale vectorului propriu corespunzător lui $\lambda_1 = -1$ constituie soluția sistemului

$$\begin{cases} 4u_1 - 2v_1 = 0 \\ -2u_1 + v_1 = 0, \end{cases}$$

adică $(k, 2k)$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Prin normalizare obținem versorul propriu $\bar{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$. Analog,

pentru $\lambda_2 = 4$, găsim $\bar{e}_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Matricea $R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ reprezintă o simetrie deoarece $\det R = -1$. Pentru a înlocui

matricea R cu matricea unei rotații, folosim unul dintre următoarele procedee:

1) Renumerotăm $\lambda_1' = \lambda_2$, $\lambda_2' = \lambda_1$ și corespunzător, $\bar{e}_1' = \bar{e}_2$, $\bar{e}_2' = \bar{e}_1$. Rotația

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{ sau } \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(-x' + 2y') \end{cases}$$

conduce la $4x'^2 - y'^2 - \frac{8}{\sqrt{5}}x' + \frac{6}{\sqrt{5}}y' - 3 = 0$. Realizând pătrate perfecte, forțând factorii comuni 4 și -1 , transcriem ecuația în forma echivalentă

$$4\left(x' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \left(y' - \frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 - 2 = 0.$$

Efectuând translația sistemului $x'Oy'$ în punctul $C_1\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$, dată de

$$x' = x'' + \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{și} \quad y' = y'' + \frac{3}{\sqrt{5}},$$

obținem ecuația canonică a hiperbolei $\frac{x''^2}{1/2} - \frac{y''^2}{2} - 1 = 0$. Vârfurile acestei hiperbole se află pe axa C_1x'' .

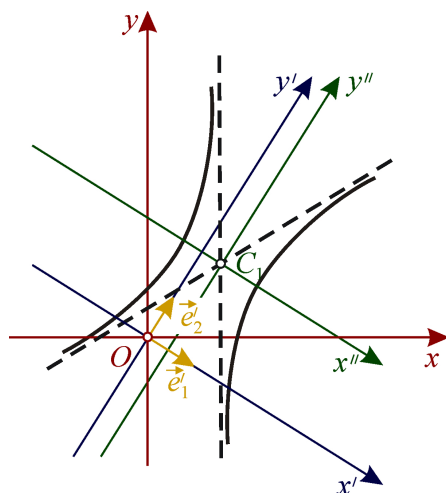


Fig. 8

Pentru construcție efectuăm o rotație a sistemului de axe xOy . Noile axe de coordonate Ox' și Oy' au direcțiile versorilor \bar{e}_1' , respectiv \bar{e}_2' . Reperul $x'Oy'$ este translatat în punctul C_1 (fig. 8).

2) Convenim să utilizăm versorii $\bar{e}_1^* = -\bar{e}_1$ și $\bar{e}_2^* = \bar{e}_2$. Rotația

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

conduce la ecuația

$$-x_1^2 + 4y_1^2 - \frac{6}{\sqrt{5}}x_1 - \frac{8}{\sqrt{5}}y_1 - 3 = 0.$$

Direcțiile axelor de coordonate Ox_1 și Oy_1 sunt determinate de versorii \bar{e}_1^* , respectiv \bar{e}_2^* . Sistemul rotit este translatat în $C_2 \left(-\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$, folosind formulele

$$x_1 = x_2 + \frac{3}{\sqrt{5}} \quad \text{și} \quad y_1 = y_2 - \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Hiperbola are vârfurile pe axa C_2y_2 , iar ecuația canonică a hiperbolei raportată la sistemul canonic $x_2C_2y_2$ (fig. 9) este:

$$\frac{x_2^2}{2} - \frac{y_2^2}{1/2} + 1 = 0.$$

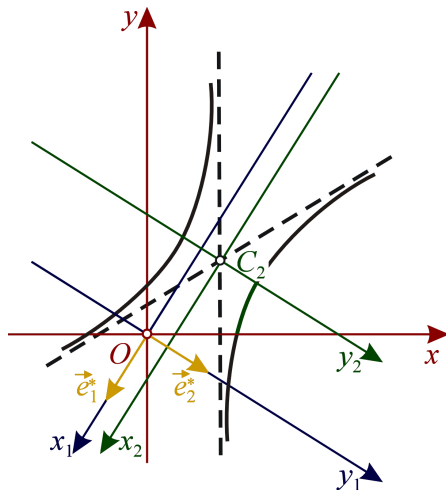


Fig. 9

2. Să se stabilească natura și genul conicei

$$\Gamma: 9x^2 - 6xy + y^2 + 20x = 0.$$

Să se reducă ecuația lui Γ la forma canonică folosind metoda roto-translației și să se construiască conica Γ .

Soluție. Calculăm invariantii:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 9 & -3 & 10 \\ -3 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -100, \quad \delta = \begin{vmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

de unde rezultă că Γ este o parabolă. Având $a_{12} \neq 0$, efectuăm o rotație al cărei unghi θ este soluția ecuației

$$(a_{11} - a_{22}) \sin 2\theta - 2a_{12} \cos 2\theta = 0,$$

adică $4 \sin 2\theta + 3 \cos 2\theta = 0$. Această ecuație devine $3 \operatorname{tg}^2 \theta - 8 \operatorname{tg} \theta - 3 = 0$, deci $\operatorname{tg} \theta \in \{3, \frac{1}{3}\}$.

Alegem $\operatorname{tg} \theta = 3$ (această valoare se obține și folosind formula $\operatorname{tg} \theta = -\frac{a_{11}}{a_{12}} = 3$). Nu ne interesează soluția θ , ci valorile $\sin \theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$ și $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$. Formulele care descriu rotația sistemului xOy sunt

$$x = \frac{1}{\sqrt{10}}(x' - 3y') \quad \text{și} \quad y = \frac{1}{\sqrt{10}}(3x' + y').$$

Față de sistemul rotit $x'Oy'$, ecuația conicei Γ este

$$y'^2 + \frac{2}{\sqrt{10}}x' - \frac{6}{\sqrt{10}}y' = 0.$$

Completăm pătratele și obținem $\left(y' - \frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2 = \frac{9}{10} - \frac{2}{\sqrt{10}}x'$. Efectuăm translația $x' = x''$,

$y' = y'' + \frac{3}{\sqrt{10}}$ și găsim ecuația canonică a parabolei $y''^2 = -\frac{2}{\sqrt{10}}x'' + \frac{9}{10}$ (fig. 10).

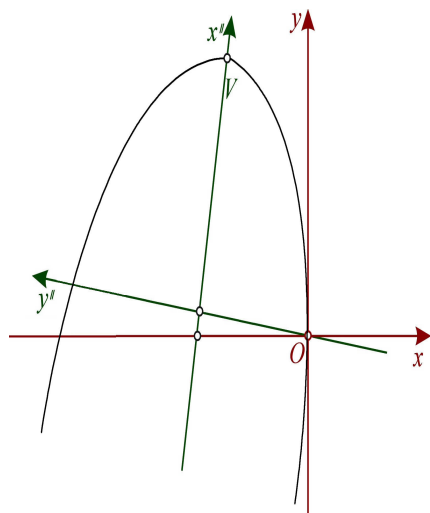


Fig. 10

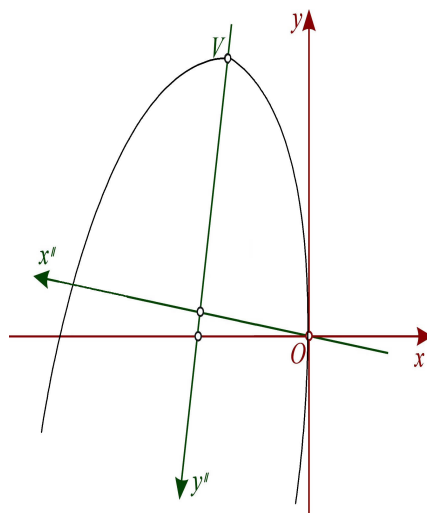


Fig. 11

Pentru $\operatorname{tg}\theta = -\frac{1}{3}$ obținem

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{10}} \quad \text{și} \quad \cos\theta = -\frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Utilizând rotația

$$x = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3x' - y'), \quad y = \frac{1}{\sqrt{10}}(x' - 3y'),$$

ecuația conice devine

$$x'^2 - \frac{6}{\sqrt{10}}x' + \frac{2}{\sqrt{10}}y' = 0.$$

Completăm pătratele, efectuăm translația

$$x' = x'' + \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad y' = y''$$

și găsim ecuația canonică a parabolei (figura 11),

$$x''^2 = \frac{2}{\sqrt{10}}y'' + \frac{9}{10}.$$

3. Se dă conica $\Gamma : x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x + 6y - 4 = 0$. Aflați:

- polara relativă la $A(1, 2)$ și tangentele duse din A la conică.
- diametrul conjugat cu $\bar{v} = \bar{i} - 2\bar{j}$ și tangentele de direcție \bar{v} la conică.
- tangenta dusă în punctul $B(1, 1)$ la conică.

Soluție. a) Ecuația polarei punctului A în raport cu conica se deduce prin dedublarea ecuației conice cu coordonatele punctului $A(1, 2)$; obținem

$$\Delta_{pol,A} : 1 \cdot x - 2 \cdot \frac{1}{2}(x \cdot 2 + 1 \cdot y) + 3 \cdot 2y - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (x + 1) + 6 \cdot \frac{1}{2}(y + 2) - 4 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{8}x.$$

Intersecția dintre polara Δ și conică este dată de

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x + 6y - 4 = 0 \\ y = 3x/8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 43x^2 - 112x - 256 = 0 \\ y = 3x/8, \end{cases}$$

deci de punctele $T_{1,2}(\frac{56 \pm 8\sqrt{221}}{43}, \frac{21 \pm 3\sqrt{221}}{43})$. Atunci cele două tangente au ecuațiile

$$\Delta_{1,2} : y - 2 = (x - 1) \cdot \frac{-65 \pm 3\sqrt{221}}{13 \pm 8\sqrt{221}}.$$

b) Diametrul conicei Γ conjugat cu direcția $\bar{v} = \bar{i} - 2\bar{j} \equiv (1, -2)$ este dat de ecuația

$$\Delta_{conj, \bar{v}} : 1 \cdot (2x - 2y - 4) + (-2)(-2x + 6y + 6) = 0 \Leftrightarrow 3x - 7y - 8 = 0.$$

Dacă ducem tangentele de direcție $\bar{v} \equiv (1, -2)$ la conică, atunci punctele de tangență $\{A, B\}$ le aflăm rezolvând sistemul

$$\{A, B\} = \Gamma \cap \Delta_{conj} : \begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x + 6y - 4 = 0 \\ 3x - 7y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (7y + 8)/3 \\ y^2 + y - 2 = 0 \end{cases},$$

de unde rezultă $A(-2, -2)$ și $B(5, 1)$. În concluzie, ecuațiile tangentelor de direcție \bar{v} la conică sunt respectiv

$$\Delta_1 : \frac{x + 2}{1} = \frac{y + 2}{-2} \Leftrightarrow 2x + y + 6 = 0$$

$$\Delta_2 : \frac{x - 5}{1} = \frac{y - 1}{-2} \Leftrightarrow 2x + y - 11 = 0.$$

c) Tangenta dusă prin punctul $B(1, 1) \in \Gamma$ la conica Γ are ecuația obținută prin dedublare cu coordonatele punctului B ,

$$\Delta_{tg, B} : 1 \cdot x - (x + y) + 3 \cdot y - 2(x + 1) + 3(y + 1) - 4 = 0$$

sau echivalent $2x - 5y + 3 = 0$.

4.8 Probleme propuse

1. Sub influența unei forțe, punctul material M se mișcă pe cercul

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0.$$

Acțiunea forței se întrerupe în momentul în care M a ajuns în poziția $(1, -2)$. Să se determine traiectoria pe care o va urma mai departe punctul material.

2. Se dau conicele:

$$\Gamma_1 : x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0;$$

$$\Gamma_2 : x^2 - 2xy - y^2 - 4x - 6y + 3 = 0;$$

$$\Gamma_3 : x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 4 = 0.$$

Pentru fiecare conică, să se calculeze invariantii metrici și coordonatele centrului. Să se găsească ecuația conicei redusă la centru.

3. Să se reducă ecuațiile:

$$5x^2 - 4xy + 2y^2 - 16x + 4y - 22 = 0;$$

$$11x^2 - 24xy + 4y^2 + 2x + 16y + 11 = 0;$$

$$x^2 - 2xy + y^2 - 4y + 6 = 0$$

la forma canonică și să se construiască conicele corespunzătoare.

4. Să se stabilească poziția dreptei D față de conica Γ în cazurile:

a) $D: 5x - y - 5 = 0;$

$\Gamma: x^2 - 2xy - 3y^2 - 4x - 6y + 3 = 0;$

b) $D: x = 3 + t, \quad y = -1 + 2t;$

$\Gamma: x^2 - 2xy - 2y^2 + 7x + 6y + 132 = 0;$

c) $D: x = 1 + 8t, \quad y = 1 + 7t;$

$\Gamma: x^2 + 2xy - 4y^2 + 3x - 2y = 0.$

5. Să se scrie coordonatele polului axei Ox față de conica

$$\Gamma: x^2 - 2y^2 - 3x - 7y + 1 = 0.$$

6. Să se scrie ecuația diametrului conjugat:

a) axei Ox ; b) axei Oy ; c) direcției $\vec{d}(1, -3)$

pentru conica $9x^2 + 6xy + y^2 - 5x - 7y - 4 = 0$. Să se scrie ecuația axei de simetrie a acestei conice.

7. Să se determine centrul, axele și vârfurile conice

$$\Gamma: 16x^2 + 4xy + 19y^2 + 4x - 22y - 5 = 0.$$

Capitolul 5

Cuadrice

5.1 Sfera

Fie E_3 un spațiu punctual euclidian real tridimensional raportat la un reper cartezian $\{O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ și punctele $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2$. Reamintim expresia distanței,

$$d(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Pe de altă parte, funcția radical nu este diferentiabilă peste tot. Acest defect se elimină prin ridicarea la pătrat și utilizarea funcției polinomiale.

Fie $C(x_0, y_0, z_0)$ un punct fixat și r un număr real strict pozitiv fixat. Sfera S de centru C și rază r este mulțimea punctelor $M(x, y, z)$ cu proprietatea $d(C, M) = r$ (figura 1).

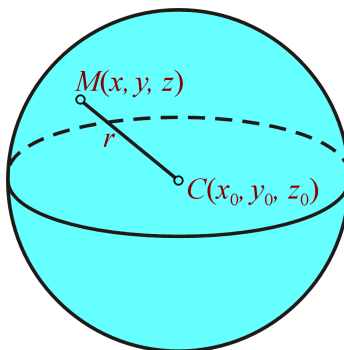


Fig. 1

Teorema 39. Punctul $M(x, y, z)$ aparține sferei S de centru $C(x_0, y_0, z_0)$ și rază r dacă și numai dacă

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2.$$

Demonstrație. $M \in S$ dacă și numai dacă $d(C, M) = r$. Echivalent,

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2.$$

Astfel avem

$$S = \{M(x, y, z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2\}$$

sau mai scurt,

$$S: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2.$$

□

Ecuatia

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

se numește *ecuația carteziană implicită a sferei S de centru (x_0, y_0, z_0) și rază r* . Această ecuație este echivalentă cu trei *ecuații parametrice* în \mathbb{R}^3 (figura 2):

$$\begin{cases} x = x_0 + r \sin u \cos v \\ y = y_0 + r \sin u \sin v \\ z = z_0 + r \cos u, \quad u \in [0, \pi], v \in [0, 2\pi] - \text{parametri,} \end{cases}$$

sau cu ecuația vectorială în V_3 ,

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + r(\sin u \cos v \vec{i} + \sin u \sin v \vec{j} + \cos u \vec{k}).$$

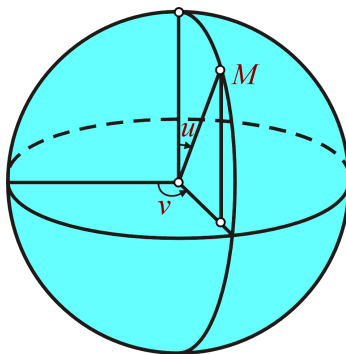


Fig. 2

Se observă că $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$ este un polinom de gradul doi în x, y și z , termenul de gradul 2 fiind $x^2 + y^2 + z^2$. Această observație sugerează să cercetăm mulțimea Σ din \mathbb{R}^3 descrisă de o ecuație de forma

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0.$$

Cum ecuația lui Σ se transcrie

$$(x + a)^2 + (y + b)^2 + (z + c)^2 = \rho, \quad \rho = a^2 + b^2 + c^2 - d,$$

rezultă:

- 1) dacă $\rho > 0$, atunci Σ este o sferă cu centrul în $x_0 = -a, y_0 = -b, z_0 = -c$ și de rază $r = \sqrt{\rho}$;
- 2) dacă $\rho = 0$, atunci $\Sigma = \{(-a, -b, -c)\}$;
- 3) dacă $\rho < 0$, atunci $\Sigma = \emptyset$.

Ecuatia

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0, \quad a^2 + b^2 + c^2 - d > 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

se numește *ecuația carteziană generală a sferei*.

Sfera este o suprafață particulară. Ca submulțime a lui \mathbb{R}^3 , sfera este o mulțime mărginită și închisă, deci compactă. Ea are proprietatea că separă spațiul în două submulțimi disjuncte: *interiorul lui S*, notat $\text{int}S$ și *exteriorul lui S*, notat $\text{ext}S$ (figura 3).

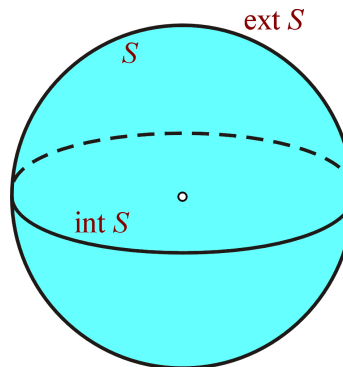


Fig. 3

Acestea pot fi descrise cu ajutorul funcției polinom

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - r^2,$$

unde (x_0, y_0, z_0) este un punct fixat, iar $r > 0$ este fixat. Într-adevăr,

$$\text{int}S = \{(x, y, z) \mid f(x, y, z) < 0\} \quad \text{și} \quad \text{ext}S = \{(x, y, z) \mid f(x, y, z) > 0\}.$$

Teorema 40. 1) *Mulțimea $\text{int}S$ este convexă.*

2) $\forall M_1 \in \text{int}S$ și $\forall M_2 \in \text{ext}S$, *segmentul $[M_1M_2]$ intersectează pe S .*

Demonstrație. Fără a scădea generalitatea, putem presupune $x_0 = y_0 = z_0 = 0$. Fie $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2$, două puncte din spațiu. Segmentul $[M_1M_2]$ este caracterizat prin ecuațiile parametrice

$$x = (1 - t)x_1 + tx_2, \quad y = (1 - t)y_1 + ty_2, \quad z = (1 - t)z_1 + tz_2, \quad t \in [0, 1].$$

1) Dacă $M_1, M_2 \in \text{int}S$, adică $f(x_i, y_i, z_i) = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - r^2 < 0$, $i = 1, 2$, atunci

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= f[(1 - t)x_1 + tx_2, (1 - t)y_1 + ty_2, (1 - t)z_1 + tz_2] \\ &= [(1 - t)x_1 + tx_2]^2 + [(1 - t)y_1 + ty_2]^2 + [(1 - t)z_1 + tz_2]^2 - r^2 \\ &\leq (1 - t)f(x_1, y_1, z_1) + tf(x_2, y_2, z_2) < 0, \quad \forall t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Cu alte cuvinte, $[M_1M_2] \subset \text{int}S$.

2) Fie $M_1 \in \text{int}S$, adică $f(x_1, y_1, z_1) < 0$ și $M_2 \in \text{ext}S$, adică $f(x_2, y_2, z_2) > 0$. Rezultă funcția definită prin

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= f[(1 - t)x_1 + tx_2, (1 - t)y_1 + ty_2, (1 - t)z_1 + tz_2] \\ &= [(1 - t)x_1 + tx_2]^2 + [(1 - t)y_1 + ty_2]^2 + [(1 - t)z_1 + tz_2]^2 - r^2, \quad t \in [0, 1], \end{aligned}$$

cu proprietățile

$$\varphi(0) = f(x_1, y_1, z_1) < 0 \quad \text{și} \quad \varphi(1) = f(x_2, y_2, z_2) > 0.$$

Deoarece φ este o funcție continuă, există o valoare $t_0 \in [0, 1]$ astfel încât

$$0 = \varphi(t_0) = [(1 - t_0)x_1 + t_0x_2]^2 + [(1 - t_0)y_1 + t_0y_2]^2 + [(1 - t_0)z_1 + t_0z_2]^2,$$

deci

$$((1 - t_0)x_1 + t_0x_2, (1 - t_0)y_1 + t_0y_2, (1 - t_0)z_1 + t_0z_2) \in S.$$

□

Numim *plan tangent* la sferă în punctul $M_1(x_1, y_1, z_1)$ locul geometric al tuturor dreptelor tangente la sferă în punctul M_1 (figura 4). Sfera este o suprafață netedă în sensul că în fiecare punct al său există planul tangent.

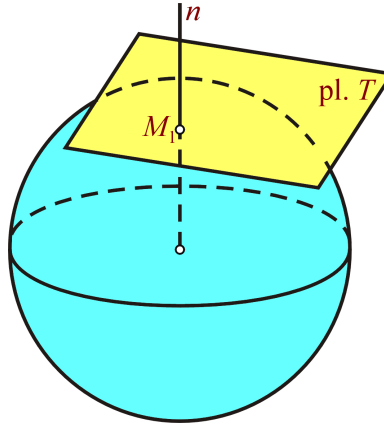


Fig. 4

Ecuția planului tangent în punctul $M_1 \in S$ se obține prin dedublarea ecuației sferei, adică

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) + (z - z_0)(z_1 - z_0) - r^2 = 0$$

sau

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 + a(x + x_1) + b(y + y_1) + c(z + z_1) + d = 0.$$

5.2 Elipsoidul

O *suprafață* în \mathbb{R}^3 este o submulțime a lui \mathbb{R}^3 , netedă și cu două dimensiuni. Întrucât la acest nivel de explicații nu dispunem încă de aparatul matematic care descrie netezimea și bidimensionalitatea, în secțiunile 2-7 ne mulțumim cu descrierea unor suprafețe particulare folosind ecuații de gradul doi în necunoscutele (x, y, z) . Asemenea suprafețe au denumirea generică de *cuadrice* (vezi secțiunea 7).

Definiție 41. Suprafața $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ de ecuație

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \quad a, b, c > 0,$$

se numește elipsoid.

Forma elipsoidului se obține analizându-i simetriile și intersecțiile cu axele de coordonate și cu plane paralele cu planele de coordonate.

Se observă că schimbând pe rând pe x în $-x$, pe y în $-y$ și pe z în $-z$, ecuația elipsoidului nu se schimbă. Prin urmare elipsoidul este simetric față de planele de coordonate, numite din acest motiv *plane principale* ale elipsoidului. Suprafața este simetrică și în raport cu axele de

coordonate care se numesc *axele suprafeței*, deoarece schimbările tripletului (x, y, z) în $(x, -y, -z)$, $(-x, y, -z)$, respectiv $(-x, -y, z)$, nu modifică ecuația elipsoidului. Rezultă că originea este centru de simetrie. Originea se numește *centrul* elipsoidului. Punctele în care axele înțeapă suprafața se numesc *vârfuri*.

Numerele a , b și c se numesc *semiaxe*. Intersecțiile dintre planele de coordonate și elipsoid sunt următoarele elipse:

$$(1) \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \\ z = 0; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \\ y = 0; \end{cases} \quad (3) \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \\ x = 0. \end{cases}$$

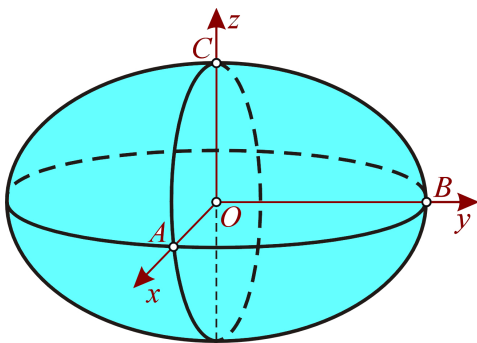


Fig. 5

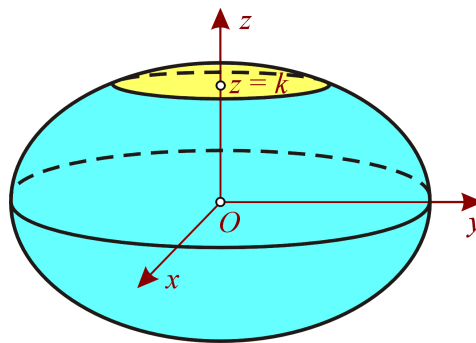


Fig. 6

Intersectând elipsoidul cu plane paralele cu xOy , obținem elipsele (figura 6)

$$(4) \begin{cases} \frac{x^2}{\frac{a^2}{c^2}(c^2 - k^2)} + \frac{y^2}{\frac{b^2}{c^2}(c^2 - k^2)} - 1 = 0 \\ z = k, \quad k \in [-c, c], \end{cases}$$

care sunt asemenea cu elipsa (1). Rezultă că elipsoidul are alura din figurile 5 și 6.

Teorema 42. *Elipsoidul este o mulțime mărginită și închisă (deci compactă) în spațiu.*

Demonstrație. Din ecuația elipsoidului rezultă

$$\frac{x^2}{a^2} \leq 1, \quad \frac{y^2}{b^2} \leq 1, \quad \frac{z^2}{c^2} \leq 1$$

sau

$$-a \leq x \leq a, \quad -b \leq y \leq b, \quad -c \leq z \leq c.$$

Astfel, toate punctele elipsoidului sunt cuprinse în interiorul unui paralelipiped cu laturile de lungimi finite. Se observă că în cazul când $a = b$ sau $b = c$ sau $c = a$, se obține elipsoidul de rotație (generat prin rotirea unei elipse în jurul unei axe).

Elipsoidul Σ este o mulțime închisă în spațiu deoarece $\{1\}$ este o mulțime închisă în \mathbb{R} , $\Sigma = g^{-1}(1)$, iar

$$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

este o funcție continuă (teoremă de analiză matematică). □

Teorema 43. *Intersecția dintre un elipsoid și un plan arbitrar este o elipsă, un punct sau mulțimea vidă.*

Demonstrație. Intersecția dintre un elipsoid și un plan este o curbă de ordinul al doilea (conică). Deoarece elipsoidul este o mulțime compactă (închisă și mărginită), intersecția trebuie să fie mărginită. Singurele conice mărginite sunt elipsa, un punct și mulțimea vidă. \square

Elipsoidul este utilizat ca suprafață de referință în mecanică (elipsoidul de inerție), geodezie, topografie (pentru măsurători) și medicină (dispozitivul de distrus calculii renali, unde semnalul de înaltă frecvență emis dintr-un focar converge în celălalt focar, unde se află piatra), etc.

5.3 Hiperboloizii

Definiție 44. Suprafața $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ de ecuație

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \quad a, b, c > 0,$$

se numește hiperboloid cu o pânză.

Această suprafață particulară are aceleași simetrii cu elipsoidul. Intersecțiile hiperboloidului cu o pânză cu planele $x = 0$ și $y = 0$ sunt hiperbolele

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \\ y = 0. \end{cases}$$

Intersecțiile acestei suprafețe cu planele $z = k$ sunt elipse reale asemenea, oricare ar fi $k \in \mathbb{R}$. Rezultă alura din figura 7.

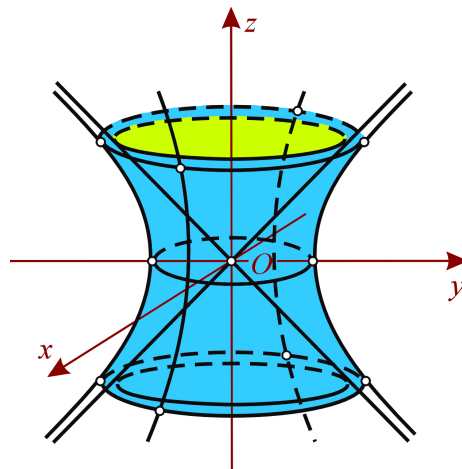


Fig. 7

Se observă că hiperboloidul cu o pânză este o mulțime nemărginită (conține o hiperbolă) și închisă în \mathbb{R}^3 (vezi teoria submulțimilor din \mathbb{R}^3).

Hiperboloidul cu o pânză este folosit în construcții industriale ca model pentru turnuri de răcire, coșuri de fum etc., deoarece poate fi realizat din elemente rectilinii îmbinate convenabil unei eficiențe maxime, fiind o suprafață dublu riglată (vezi secțiunea 6). Tot datorită acestei proprietăți, există modele pentru transmisia rotațiilor între doi arbori necoliniari realizați cu ajutorul a doi hiperboloizi de rotație cu o pânză (roți dințate hiperbolice).

Suprafața $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ de ecuație

$$\text{conas} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (5.1)$$

se numește *conul asimptot* al hiperboloidului cu o pânză, denumire care decurge din forma acestei suprafețe în raport cu forma hiperboloidului cu o pânză (figura 7). Conul este des folosit în tehnică. De exemplu, pentru transmiterea mișcării de rotație între doi arbori (axe) necoliniari se pot folosi două conuri de rotație, realizând roți dințate conice.

Definiție 45. Suprafața $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ de ecuație

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0, \quad a, b, c > 0,$$

se numește hiperboloid cu două pânze.

Această suprafață are aceleași simetrii ca și hiperboloidul cu o pânză. Are numai două vârfuri situate pe axa Oz . Intersecțiile hiperboloidului cu două pânze cu planele $x = 0$ și $y = 0$ sunt hiperbolele

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0 \\ y = 0. \end{cases}$$

Observăm că în regiunea $-c < z < c$ nu avem puncte ale hiperboloidului cu două pânze. Intersecția suprafeței cu planele $z = k$, $|k| \geq c$, dă elipsele asemenea

$$\begin{cases} \frac{x^2}{\frac{a^2}{c^2}(k^2 - c^2)} + \frac{y^2}{\frac{b^2}{c^2}(k^2 - c^2)} - 1 = 0 \\ z = k. \end{cases}$$

Hiperboloidul cu două pânze este schițat în figura 8. Hiperboloidul cu două pânze este o mulțime nemărginită și închisă în \mathbb{R}^3 .

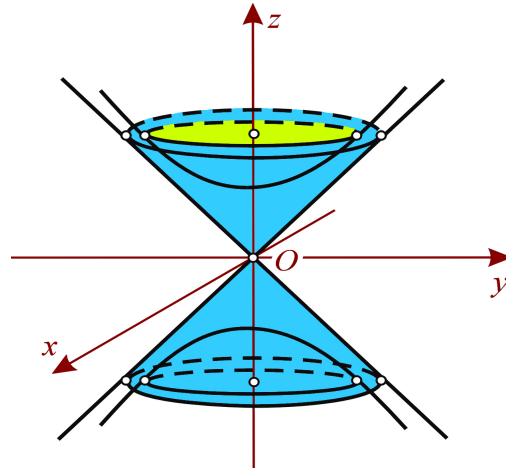


Fig. 8

Suprafața $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ de ecuație $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, descrisă de ecuația (??) se mai numește și *conul asimptot* al hiperboloidului cu două pânze (figura 8).

5.4 Paraboloidii

Definiție 46. Suprafața $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ de ecuație

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad a, b > 0,$$

se numește paraboloid eliptic.

Planele de simetrie $x = 0$ și $y = 0$ se numesc *plane principale*. Oz este axă de simetrie (*axă principală*) și înțeapă suprafața în origine. Acest punct se numește *vârf*. Intersecțiile paraboloidului eliptic cu planele $x = 0$ și $y = 0$ sunt parabolele

$$\begin{cases} z = \frac{y^2}{b^2} \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} z = \frac{x^2}{a^2} \\ y = 0, \end{cases}$$

ceea ce denotă că paraboloidul eliptic este o suprafață nemărginită. Evident, suprafața există numai pentru $z \geq 0$. Dacă tăiem cu planele $z = k > 0$, atunci se obțin elipsele

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = k \\ z = k. \end{cases}$$

Folosind rezultatele de mai sus, obținem alura din figura 9.

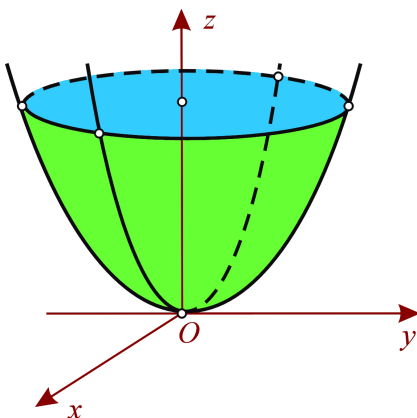


Fig. 9

Pentru $a = b$ obținem paraboloidul de rotație (generat prin rotația unei parabole în jurul axei sale). Paraboloidul eliptic este o mulțime nemărginită și închisă în \mathbb{R}^3 . Paraboloidul eliptic este folosit în industria de confecții drept model pentru calapoade de căciuli de iarnă, dat fiind faptul că acest model asigură mularea căciulii pe cap. De asemenea, paraboloidul de rotație este utilizat în proiectarea antenelor parabolice, reflectoarelor și stațiilor de captare a energiei solare.

Definiție 47. Suprafața Σ de ecuație

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

se numește paraboloid hiperbolic sau șa.

Această suprafață are aceleași simetrii ca și paraboloidul eliptic. Originea este vârf al suprafeței. Intersecția suprafeței cu planul $x = 0$ dă parabola

$$\begin{cases} z = -\frac{y^2}{b^2} \\ x = 0, \end{cases}$$

care are concavitatea înspre sensul negativ al axei Oz , întrucât în mod necesar $z \leq 0$. Intersecția suprafeței cu planul $y = 0$ dă parabola

$$\begin{cases} z = \frac{x^2}{a^2} \\ y = 0, \end{cases}$$

care are axa de simetrie Oz și este dirijată în sensul pozitiv al acestei axe.

Intersectând șaua cu planele $z = k > 0$, se obțin hiperbolele

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = k \\ z = k, \end{cases}$$

care au axa transversă paralelă cu Ox .

Intersectând șaua cu planele $z = k < 0$, se obțin hiperbolele

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = k \\ z = k. \end{cases}$$

Rezultă că șaua are forma din figura 10. Ca mulțime, în \mathbb{R}^3 , șaua este nemărginită și închisă. Șaua (paraboloidul hiperbolic) este folosită în construcții industriale ca model pentru acoperișuri întrucât această suprafață se poate realiza din elemente rectilinii așezate convenabil unei eficiențe maxime, fiind o suprafață dublu riglată (secțiunea 6).

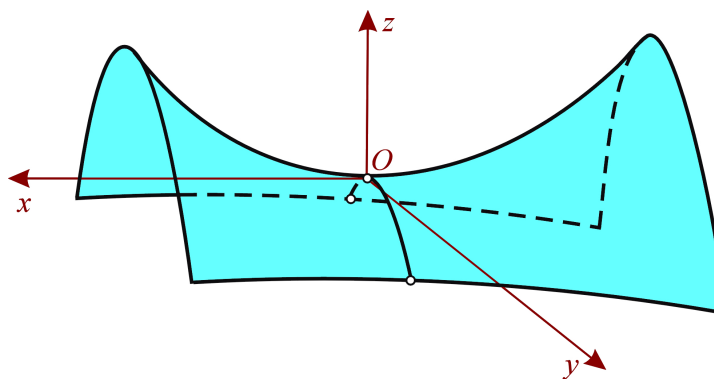


Fig. 10

5.5 Cilindri, perechi de plane etc.

În acest paragraf completăm lista cuadricelor definite prin ecuații canonice, lăsând ca exercițiu studiul fiecărei suprafețe în parte.

Cuadrice de ecuație

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0$$

se numește *cilindru circular*.

Cuadrice de ecuație

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

se numește *cilindru eliptic* (figura 11).

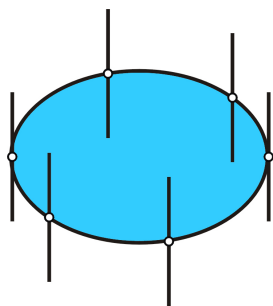


Fig. 11

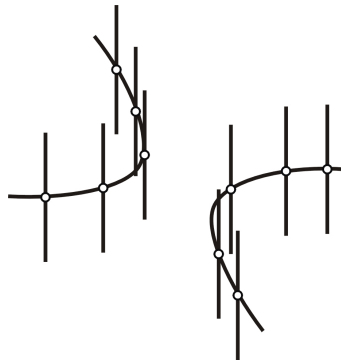


Fig. 12



Fig. 13

Cuadrice de ecuație

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

se numește *cilindru hiperbolic* (figura 12).

Cuadrice de ecuație

$$y^2 = 2px$$

se numește *cilindru parabolic* (figura 13).

Alte tipuri de quadrice:

- pereche de plane concurente, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$;
- pereche de plane paralele, $x^2 - a^2 = 0$;
- pereche de plane confundate, $x^2 = 0$;
- dreaptă, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$;
- punct, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$;
- mulțime vidă, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$ sau $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$ sau $x^2 + a^2 = 0$, ($a \neq 0$).

5.6 Generatoare rectilinii

Există mai multe moduri de a genera o cuadrică. De exemplu cilindrul circular, cilindrul eliptic, cilindrul hiperbolic, cilindrul parabolic, conul, hiperboloidul cu o pânză și paraboloidul hiperbolic pot fi generate prin mișcarea unei drepte. Elipsoidul și hiperboloizii pot fi generați prin familii de elipse. Parabolozii sunt generați de o familie de parabole paralele, cu vârfurile pe o parabolă fixă situată într-un plan perpendicular pe planul parabolei mobile etc.

Definiție 48. O cuadrică Σ care poate fi generată prin mișcarea unei drepte D care se sprijină pe o curbă C se numește cuadrică riglată.

Dreapta D se numește *generatoarea rectilinie* a quadricii riglate, iar curba C se numește *curbă directoare*.

Curba directoare poate fi eliminată din definiția quadricii riglate. Într-adevăr, o cuadrică este riglată dacă și numai dacă prin fiecare punct al său trece cel puțin o dreaptă conținută în cuadrică. O cuadrică se numește *dublu riglată* dacă prin fiecare punct al său trec două drepte distincte conținute în cuadrică.

Teorema 49. *Hiperboloidul cu o pânză și paraboloidul hiperbolic sunt quadrice dublu riglate.*

Demonstrație. Hiperboloidul cu o pânză Σ_1 are ecuația

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Deoarece această ecuație se transcrie

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right) \left(1 + \frac{y}{b}\right),$$

famiile de drepte:

$$D_\lambda: \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \lambda \left(1 + \frac{y}{b}\right) \\ \lambda \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = 1 - \frac{y}{b}; \end{cases} \quad D_\infty: \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0 \\ 1 + \frac{y}{b} = 0; \end{cases}$$

$$D_\mu: \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \mu \left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ \mu \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = 1 + \frac{y}{b}; \end{cases} \quad D_\infty: \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0 \\ 1 - \frac{y}{b} = 0 \end{cases}$$

sunt incluse în hiperboloidul cu o pânză și

$$\Sigma_1 = \bigcup_{\lambda \in \bar{\mathbf{R}}} D_\lambda = \bigcup_{\mu \in \bar{\mathbf{R}}} D_\mu.$$

Cu alte cuvinte, familiile precedente de drepte sunt generatoare rectilinii ale hiperboloidului cu o pânză (figura 14). \square

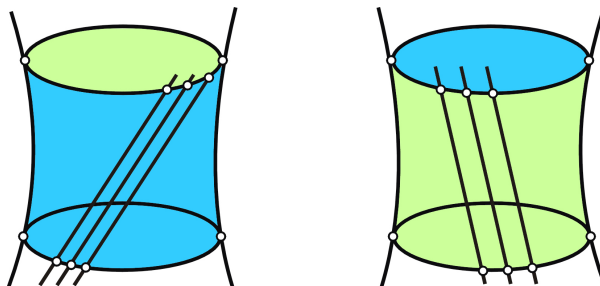


Fig. 14

Dacă generatoarele rectilinii ale hiperboloidului cu o pânză sunt translatate paralel în origine, atunci obținem generatoarele rectilinii ale conului

$$\Sigma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Evident, conul este o suprafață simplu riglată.

Analog, paraboloidul hiperbolic

$$\Sigma_2: z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

poate fi generat de două familii de drepte. Pentru a găsi aceste familii de drepte, transcriem ecuația paraboloidului hiperbolic în forma

$$z = \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right).$$

De aici rezultă că familiile de drepte:

$$D_\lambda: \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \lambda z \\ \lambda \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 1; \end{cases} \quad D_\infty: \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \\ z = 0; \end{cases}$$

$$D_\mu: \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \mu z \\ \mu \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 1; \end{cases} \quad D_\infty: \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

sunt incluse în paraboloidul hiperbolic și

$$\Sigma_2 = \bigcup_{\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}} D_\lambda = \bigcup_{\mu \in \mathbf{R} \setminus \{0\}} D_\mu.$$

Teorema 50. *Cele două familii de generatoare rectilinii ale hiperboloidului cu o pânză sau ale paraboloidului hiperbolic au următoarele proprietăți:*

Hiperboloidul cu o pânză

- 1) orice două drepte din aceeași familie sunt necoplanare;
- 2) o dreaptă din familia D_λ și o dreaptă din familia D_μ sunt coplanare;
- 3) oricare trei drepte din aceeași familie nu sunt paralele cu același plan;

Paraboloidul hiperbolic

- 1) orice două drepte din aceeași familie sunt necoplanare;
- 2) o dreaptă din familia D_λ și o dreaptă din familia D_μ sunt concurente;
- 3) oricare trei drepte din aceeași familie sunt paralele cu același plan.

În general, o suprafață generată prin mișcarea unei drepte D care se sprijină pe o curbă C se numește *suprafață riglată*. Dacă generatoarea D are ecuațiile parametrice

$$\begin{cases} x = x_0 + v\ell \\ y = y_0 + vm \\ z = z_0 + vn, \quad v \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

atunci suprafața riglată are ecuații parametrice de gradul 1 în v , adică

$$\begin{cases} x = x_0(u) + v\ell(u) \\ y = y_0(u) + vm(u) \\ z = z_0(u) + vn(u), \quad (u, v) \in I \times \mathbb{R}, \end{cases}$$

unde I este un interval din \mathbb{R} .

Teorema 51. *Orice suprafață dublu riglată este un plan, un hiperboloid cu o pânză sau un paraboloid hiperbolic.*

Demonstrație. O suprafață riglată este dublu riglată dacă și numai dacă ecuațiile ei parametrice sunt ecuații de gradul 1 în v și de gradul 1 în u , adică

$$\begin{cases} x = a_0 + a_1u + v(\ell_0 + \ell_1u) \\ y = b_0 + b_1u + v(m_0 + m_1u) \\ z = c_0 + c_1u + v(n_0 + n_1u), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Notăm

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & \ell_0 & \ell_1 \\ b_1 & m_0 & m_1 \\ c_1 & n_0 & n_1 \end{vmatrix}.$$

Dacă $\Delta = 0$, atunci există numerele reale α , β și γ astfel încât

$$\alpha(x - a_0) + \beta(y - b_0) + \gamma(z - c_0) = 0$$

și astfel suprafața dublu riglată este un plan (suprafață riglată într-o infinitate de feluri).

Dacă $\Delta \neq 0$, atunci prin eliminarea lui u și v obținem o ecuație de gradul doi în (x, y, z) . În acest caz, suprafața dublu riglată este o cuadrică și singurele quadrice dublu riglate sunt cele menționate în teoremă. \square

5.7 Cuadrice descrise prin ecuația generală

Cuadricele sunt figuri (suprafețe) în spațiu. Descrierea analitică a acestor figuri reclamă identificarea spațiului punctual tridimensional E_3 cu mulțimea \mathbb{R}^3 , utilizând reperul cartezian $\{O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$. Modelul \mathbb{R}^3 permite descrierea figurilor cu ajutorul ecuațiilor și inecuațiilor asociate unor funcții.

Fie forma pătratică afină $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \\ + 2a_{10}x + 2a_{20}y + 2a_{30}z + a_{00},$$

cu $a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2 \neq 0$.

Definiție 52. Mulțimea de nivel constant zero

$$\Sigma = \{M(x, y, z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, g(x, y, z) = 0\},$$

se numește *cuadrică* sau *suprafață algebrică* de ordinul al doilea. Se notează

$$\Sigma: g(x, y, z) = 0.$$

Din punct de vedere topologic, cuadricile sunt mulțimi închise în spațiu deoarece $\{0\}$ este o mulțime închisă în \mathbb{R} , $\Sigma = g^{-1}(0)$ și $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă (teoremă de analiză matematică).

Prin trecerea de la reperul cartezian $\{O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ la un reper cartezian adecvat orientat pozitiv $\{O'; \bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'\}$ (numit *reper canonic* sau *natural*) față de care ecuația $g(x, y, z) = 0$ să aibă forma cea mai simplă posibilă (numită *ecuația redusă* sau *canonică*), se dovedește că Σ este congruentă cu una dintre mulțimile: sferă, elipsoid, hiperboloid cu o pânză, hiperboloid cu două pânze, paraboloid hiperbolic, con, cilindru circular, cilindru eliptic, cilindru hiperbolic, cilindru parabolic, pereche de plane secante, pereche de plane paralele, pereche de plane confundate, dreaptă, mulțime care conține un singur punct, mulțime vidă.

Față de roto-translații, ecuația $g(x, y, z) = 0$ are următorii invarianți:

$$\Delta = \det \bar{A}, \quad \delta = \det A, \quad J = \left| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{array} \right|, \quad I = \text{tr}A,$$

unde

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{20} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{30} \\ a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{00} \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

cu $a_{ij} = a_{ji}$, $i \neq j$, $i, j = \overline{0, 3}$.

Acești invarianți sunt folosiți pentru clasificarea cuadricelor. De exemplu, determinantul Δ descrie *natura* quadricii:

- dacă $\Delta = 0$, atunci quadrica se numește *degenerată* (reuniune de două plane);
- dacă $\Delta \neq 0$, atunci quadrica se numește *nedegenerată*.

Dintre cuadricile nevide, sfera, elipsoidul, hiperboloizii și parabolozii sunt *cuadrici nedegenerate*, iar conul, cilindrii și perechile de plane sunt *cuadrici degenerate*.

Sfera este o quadrică pentru care $a_{11} = a_{22} = a_{33} = m \neq 0$, $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$ și

$$\rho = \left(\frac{a_{10}}{m}\right)^2 + \left(\frac{a_{20}}{m}\right)^2 + \left(\frac{a_{30}}{m}\right)^2 - \frac{a_{00}}{m} > 0.$$

Centru sferei este punctul $\left(-\frac{a_{10}}{m}, -\frac{a_{20}}{m}, -\frac{a_{30}}{m}\right)$ și raza sferei este numărul $r = \sqrt{\rho}$.

Centrul unei quadrice

Analog cu conicele, centrul de simetrie al unei quadrice este punct critic al funcției g , adică soluția sistemului liniar

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial x} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{10} = 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial y} = a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{20} = 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial z} = a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_{30} = 0. \end{cases}$$

Pot interveni următoarele situații:

1) Dacă $\det A = \delta \neq 0$, atunci sistemul liniar precedent este compatibil unic determinat. Prin urmare, quadrica admite un singur centru de simetrie la distanță finită. Este cazul sferei, elipsoidului, hiperboloidului cu o pânză, hiperboloidului cu două pânze și conului.

2) Dacă

$$\delta = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

și unicul determinant caracteristic al sistemului este nenul, atunci sistemul este incompatibil. Cele trei plane reprezentate de cele trei ecuații formează o prismă triunghiulară. Este cazul paraboloidului eliptic și paraboloidului hiperbolic.

3) Dacă

$$\delta = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

și unicul determinant caracteristic este nul, sistemul liniar este compatibil simplu nedeterminat.

Cele trei plane reprezentate de cele trei ecuații din sistem se intersectează după o dreaptă numită *dreaptă de centre*. Este cazul cilindrilor circulari, eliptici și hiperbolici.

4) Dacă $\delta = 0$ și rangul sistemului este 1, iar cei doi determinanți caracteristici nu sunt nuli, sistemul este incompatibil. Planele sunt paralele. Este cazul cilindriului parabolic.

5) Dacă $\delta = 0$, rangul sistemului este 1 și cei doi determinanți caracteristici sunt nuli, atunci sistemul este compatibil dublu nedeterminat. Cele trei plane sunt confundate. Quadrica are un plan de centre. Este cazul planelor paralele distincte sau confundate.

Exemplu. Fie quadrica Σ , care conține punctele $A(-1, 2, 3)$, $B(1, 1, -1)$, axa Oy și cercul Γ care are centrul în $C(0, 0, 3)$ și este tangent axei Ox în origine.

Să se scrie ecuația quadricii Σ , să se calculeze invariantii ei și coordonatele centrului.

Soluție. Cercul Γ se află în planul xOz și are ecuațiile $x^2 + z^2 - 6z = 0$, $y = 0$. Ecuația quadricii este de forma

$$x^2 + z^2 - 6z + y(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta) = 0,$$

întrucât intersecția acestei suprafețe cu planul xOz este cercul Γ .

Deoarece quadrica Σ conține axa Oy , ecuația ei devine identitate pentru $x = 0$ și $z = 0$, de unde rezultă $\beta = \delta = 0$.

Condițiile $A \in \Sigma$ și $B \in \Sigma$ sunt echivalente cu sistemul $\begin{cases} \alpha - 3\gamma = 4 \\ \alpha + \gamma = 8, \end{cases}$ deci $\alpha = 7$ și $\gamma = 1$. În concluzie,

$$\Sigma: x^2 + z^2 + 7xy + yz - 6z = 0.$$

Invarianții cuadricei sunt

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{2} & 0 & 0 \\ \frac{7}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \frac{441}{4} \text{ (cuadrică nedegenerată),}$$

$$\delta = -\frac{25}{2} \text{ (cuadrică cu centru), } J = -\frac{23}{2} \text{ și } I = 2.$$

Centrul de coordonate $\left(-\frac{21}{50}, \frac{3}{25}, \frac{147}{50}\right)$ reprezintă soluția sistemului

$$\begin{cases} 2x + 7y = 0 \\ 7x + z = 0 \\ 2z + y - 6 = 0. \end{cases}$$

5.8 Reducerea la forma canonică a ecuației unei cuadrice

Pentru stabilirea ecuației canonice a unei cuadrice se poate proceda astfel:

- dacă $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$, se face o translație și eventual o rotație;
- dacă cel puțin unul dintre numerele a_{12} , a_{13} și a_{23} este nenul, atunci tipul cuadricei de ecuație

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{10}x + 2a_{20}y + 2a_{30}z + a_{00} = 0$$

este determinat de forma pătratică

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz.$$

Matricea simetrică atașată acestei forme pătratice este

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{13} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Pentru matricea A se determină valorile proprii λ_1 , λ_2 și λ_3 care sunt reale și vectorii proprii corespunzători care sunt sau se aranjează a fi ortogonali. Prin normare obținem versorii \bar{e}_1 , \bar{e}_2 și \bar{e}_3 . Se notează cu R matricea formată cu coordonatele versorilor \bar{e}_1 , \bar{e}_2 și \bar{e}_3 , așezate pe coloane. Având în vedere posibilitatea înlocuirii unuia dintre versorii \bar{e}_1 , \bar{e}_2 și \bar{e}_3 prin opusul său sau posibilitatea renumerotării valorilor proprii, putem presupune $\det R = 1$.

Rotația

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

reduce forma pătratică la expresia canonică

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2.$$

Direcțiile noilor axe de coordonate sunt date de direcțiile versorilor proprii \bar{e}_1 , \bar{e}_2 , respectiv \bar{e}_3 . În final, dacă este cazul, se face o translație.

Exemplu. Să se reducă ecuația

$$z^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy + 2xz - 2yz - 4x + 8y - 12z + 14 = 0$$

la forma canonică și să se construiască quadrica corespunzătoare.

Soluție. Matricea formei pătratice $x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy + 2xz - 2yz$ este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Valorile proprii ale matricei A sunt soluțiile ecuației caracteristice

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -3 & 1 \\ -3 & 1 - \lambda & -1 \\ 1 & -1 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Obținem valorile proprii reale și distincte $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$ și $\lambda_3 = 6$. Vectorii proprii corespunzători vor fi automat ortogonali, deoarece matricea A este simetrică și are valori proprii distincte.

Coordonatele (u, v, w) , ale vectorului propriu corespunzător valorii proprii λ , satisfac sistemul

$$\begin{cases} (1 - \lambda)u - 3v + w = 0 \\ -3u + (1 - \lambda)v - w = 0 \\ u - v + (5 - \lambda)w = 0. \end{cases}$$

Pentru $\lambda_1 = -2$, găsim vectorul propriu $u = 1$, $v = 1$ și $w = 0$. Normalizând, obținem versorul propriu

$$\bar{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right).$$

Pentru $\lambda_2 = 3$, deducem vectorul propriu $(-1, 1, 1)$ și prin normalizare obținem versorul

$$\bar{e}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

Procedăm analog pentru $\lambda_3 = 6$ și obținem

$$\bar{e}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right).$$

Matricea ortogonală R ale cărei coloane sunt formate din componentele versorilor proprii are determinantul 1. Prin rotația

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad \text{sau explicit} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{3}}y' + \frac{1}{\sqrt{6}}z' \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{3}}y' - \frac{1}{\sqrt{6}}z' \\ z = \frac{1}{\sqrt{3}}y' + \frac{2}{\sqrt{6}}z', \end{cases}$$

ecuația carteziană generală devine

$$-2x'^2 + 3y'^2 + 6z'^2 + \frac{4}{\sqrt{2}}x' - \frac{36}{\sqrt{6}}z' + 14 = 0.$$

Completăm pătratele perfecte în x' , y' și z' forțând factorii comuni -2 , 3 , 6 și obținem

$$-2\left(x' - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 3y'^2 + 6\left(z' - \frac{3}{\sqrt{6}}\right)^2 + 6 = 0.$$

Efectuăm translația

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}} + x'', \quad y' = y'', \quad z' = \frac{3}{\sqrt{6}} + z''$$

și găsim ecuația canonică a hiperboloidului cu două pânze ale cărei vârfuri se află pe axa absciselor Cx'' (figura 15),

$$-\frac{x''^2}{3} + \frac{y''^2}{2} + \frac{z''^2}{1} + 1 = 0.$$

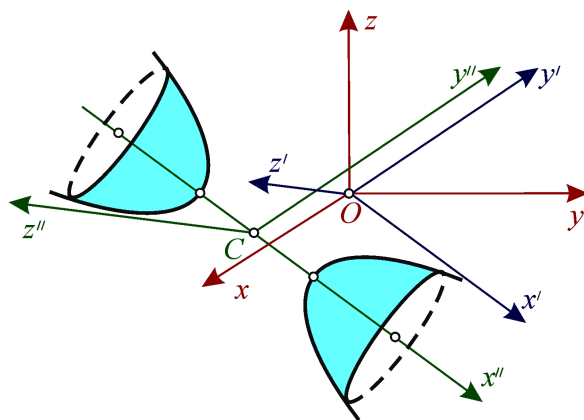


Fig. 15

Observație. Cuadricele pot fi reprezentate grafic utilizând pachete software care conțin module de calcul simbolic, precum Mathematica® sau Maple®.

5.9 Intersecția unei quadrice cu o dreaptă sau cu un plan

Fie D o dreaptă de ecuații

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

și Σ o quadrică de ecuație $g(x, y, z) = 0$. Intersecția $D \cap \Sigma$ corespunde rădăcinilor t_1 și t_2 ale ecuației în \mathbb{R} ,

$$t^2\varphi(\ell, m, n) + t(\ell g_{x_0} + m g_{y_0} + n g_{z_0}) + g(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad (5.2)$$

unde

$$\varphi(\ell, m, n) = a_{11}\ell^2 + a_{22}m^2 + a_{33}n^2 + 2a_{12}\ell m + 2a_{13}\ell n + 2a_{23}mn,$$

iar $g_{x_0} = g_x(x_0, y_0, z_0)$ etc.

Discuție:

1) Fie $\varphi(\ell, m, n) \neq 0$. În acest caz, ecuația (5.2) este o ecuație de gradul 2.

Dacă $q = (\ell g_{x_0} + m g_{y_0} + n g_{z_0})^2 - 4\varphi(\ell, m, n)g(x_0, y_0, z_0) > 0$, atunci ecuația are două rădăcini reale distincte, t_1 și t_2 . Astfel, dreapta D intersectează quadrica Σ în două puncte, M_1 și M_2 .

Dacă $q = 0$, atunci $t_1 = t_2$. Corespunzător, D va intersecta pe Σ în două puncte confundate. În acest caz, dreapta D se numește *tangentă* la Σ .

Dacă $q < 0$, rezultă că ecuația (5.2) nu are rădăcini, deci D nu intersectează pe Σ (figura 16).

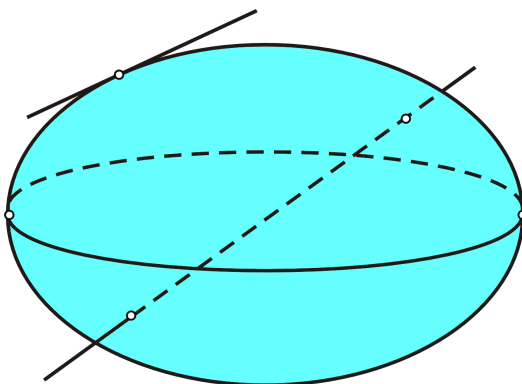


Fig. 16

2) Fie $\varphi(\ell, m, n) = 0$. Ecuația (5.2) devine o ecuație de gradul întâi.

Dacă $\ell g_{x_0} + m g_{y_0} + n g_{z_0} \neq 0$, atunci există o soluție unică, deci D intersectează quadrica Σ într-un singur punct.

Dacă $\ell g_{x_0} + m g_{y_0} + n g_{z_0} = 0$ și $g(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, atunci ecuația (5.2) nu are soluții. În aceste condiții D nu intersectează quadrica Σ .

Dacă $\ell g_{x_0} + m g_{y_0} + n g_{z_0} = 0$ și $g(x_0, y_0, z_0) = 0$, atunci (5.2) este o identitate și astfel $D \subset \Sigma$.

Fie $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$ un punct pentru care cel puțin unul dintre numerele g_{x_0} , g_{y_0} și g_{z_0} este diferit de 0. Această ipoteză este folosită implicit în teoremele care urmează.

Teorema 53. *Dreapta D de parametri directori (ℓ, m, n) este tangentă la quadrica Σ în punctul $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$ dacă și numai dacă $\ell g_{x_0} + m g_{y_0} + n g_{z_0} = 0$.*

Demonstrație. Intersecția dintre dreapta

$$D: \begin{cases} x = x_0 + \ell t \\ y = y_0 + m t \\ z = z_0 + n t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

și quadrica Σ corespunde la rădăcinile t_1 și t_2 ale ecuației (5.2).

Deoarece $M_0 \in \Sigma$, avem $g(x_0, y_0, z_0) = 0$. Ecuația (5.2) va avea rădăcina dublă $t = 0$ dacă și numai dacă $\ell g_{x_0} + m g_{y_0} + n g_{z_0} = 0$. \square

Teorema 54. *Locul geometric al tuturor tangentelor la quadrica Σ în punctul $M_0 \in \Sigma$ este planul de ecuație*

$$(x - x_0)g_{x_0} + (y - y_0)g_{y_0} + (z - z_0)g_{z_0} = 0.$$

Acest plan se numește *planul tangent* la quadrica Σ în punctul M_0 .

Demonstrație. Dreapta D este tangentă la Σ în $M_0 \in \Sigma$ dacă și numai dacă $\ell g_{x_0} + m g_{y_0} + n g_{z_0} = 0$. Eliminând parametrii ℓ, m, n și t , găsim

$$(x - x_0)g_{x_0} + (y - y_0)g_{y_0} + (z - z_0)g_{z_0} = 0.$$

□

Menționăm că ecuația planului tangent într-un punct $M_0 \in \Sigma$ se poate obține și prin dedublarea ecuației $g(x, y, z) = 0$ în punctul M_0 . Deci ecuația planului tangent se transcrie

$$a_{11}xx_0 + a_{22}yy_0 + a_{33}zz_0 + a_{12}(x_0y + xy_0) + a_{13}(x_0z + xz_0) + a_{23}(y_0z + yz_0) + a_{10}(x + x_0) + a_{20}(y + y_0) + a_{30}(z + z_0) + a_{00} = 0.$$

Cuadricele Σ se numesc *netedă* dacă în fiecare punct al său există planul tangent. Netezimea cuadricele Σ elimină punctele critice, adică punctele în care g_x, g_y, g_z și g se anulează simultan (de exemplu vârful unui con).

Dreapta care trece prin $M_0 \in \Sigma$ și este perpendiculară pe planul tangent se numește *normala* la Σ în punctul M_0 și are ecuațiile (figura 17)

$$\frac{x - x_0}{g_{x_0}} = \frac{y - y_0}{g_{y_0}} = \frac{z - z_0}{g_{z_0}}.$$

Intersecția dintre un plan $P: ax + by + cz + d = 0$ și o cuadricele $\Sigma: g(x, y, z) = 0$ este descrisă de sistemul

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ g(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

În ipoteza $c \neq 0$, din ecuația planului obținem $z = \alpha x + \beta y + \gamma$ și înlocuim în $g(x, y, z) = 0$. Astfel, intersecția $P \cap \Sigma$ se reduce la intersecția dintre planul P și cilindrul de gradul doi, de ecuație $g(x, y, \alpha x + \beta y + \gamma) = 0$ și cu generatoarele paralele cu Oz , deci $P \cap \Sigma$ este o conică Γ .

Proiecția conicei $\Gamma = P \cap \Sigma$ pe planul $xOy: z = 0$ este conica Γ' descrisă de sistemul (figura 18)

$$\begin{cases} z = 0 \\ g(x, y, \alpha x + \beta y + \gamma) = 0. \end{cases}$$

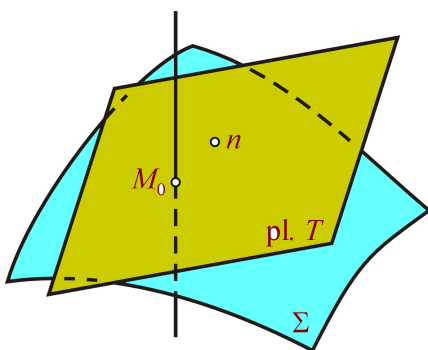


Fig. 17

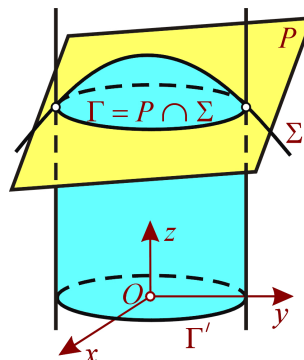


Fig. 18

5.10 Probleme rezolvate

1. Se dă quadrica:

$$\Sigma_1 : x^2 - y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx - 5x - 1 = 0.$$

a) Calculați invariantii Δ, δ, J, I ;

b) Aflați centrul C_s de simetrie al quadricii;

c) Aduceți la forma canonică folosind metoda rototranslației: obțineți matricea de rotație folosind metoda valorilor proprii;

d) reprezentați grafic quadrica.

Soluție. a) Pentru quadrica Σ_1 , obținem $g(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx$.

Matricea formei pătratice asociate este: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, deci $\sigma(A) = \{1, -2, 2\}$.

Invariantii quadricii sunt:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -5/2 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -5/2 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{33}{2}, \quad \delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

$$J = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 0 - 2 = -4,$$

$$I = \text{Tr } A = 1 - 1 + 1 = 1.$$

În concluzie, quadrica este nedegenerată ($\Delta \neq 0$) și admite centru de simetrie (deoarece $\delta \neq 0$).

b) Centrul de simetrie al quadricii este soluția sistemului:

$$\begin{cases} g_x = 0 \\ g_y = 0 \\ g_z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y - 2z = 5 \\ -2y - 2x - 2z = 0 \\ 2z - 2y - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5/4 \\ y = -5/4 \\ z = 0, \end{cases}$$

deci $C_s(5/4, -5/4, 0)$.

c) Valorile proprii ale matricei sunt $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$ și $\lambda_3 = 2$. Vectorii proprii $v = (a, b, c)$ atașați valorii proprii $\lambda_1 = 1$ îi aflăm rezolvând sistemul:

$$(A - \lambda_1 I) \cdot v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -b - c = 0 \\ -a - 2b - c = 0 \\ -a - b = 0, \end{cases}$$

cu soluția $v = (t, -t, t) = t(1, -1, 1), t \in \mathbb{R}$, deci un generator al spațiului propriu este $v_1 = (1, -1, 1)$.

Analog găsim vectorii proprii $v_2 = (1, 2, 1)$ și $v_3 = (-1, 0, 1)$. Normând, obținem baza ortonormată

$$B' = \left\{ e'_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), e'_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right), e'_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}.$$

Relațiile de trecere la noul sistem de coordonate sunt:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' - \frac{1}{\sqrt{2}}z' \\ y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{2}{\sqrt{6}}y' \\ z = \frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{2}}z'. \end{cases}$$

Înlocuind expresiile obținute ale coordonatelor x, y, z în ecuația quadrică, rezultă ecuația quadrică relativ la noul sistem de coordonate:

$$\begin{aligned} \Sigma' : x'^2 - 2y'^2 + 2z'^2 - \frac{5}{\sqrt{3}}x' - \frac{5}{\sqrt{6}}y' + \frac{5}{\sqrt{2}}z' - 1 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(x' - \frac{5}{2\sqrt{3}}\right)^2 - 2\left(y' - \frac{5}{4\sqrt{6}}\right)^2 + 2\left(z' + \frac{5}{4\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{33}{8} &= 0. \end{aligned}$$

Ținând cont de expresiile din paranteze, efectuăm translația $Ox'y'z' \rightarrow O''x''y''z''$ dată de formulele:

$$\begin{cases} x'' = x' - 5/2\sqrt{3} \\ y'' = y' - 5/4\sqrt{6} \\ z'' = z' + 5/4\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5/2\sqrt{3} \\ 5/4\sqrt{6} \\ -5/4\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Prin înlocuirea coordonatelor (x', y', z') în ecuația quadrică rezultă ecuația relativ la reperul $O''x''y''z''$,

$$x''^2 - 2y''^2 + 2z''^2 - \frac{33}{8} = 0,$$

de unde rezultă ecuația canonică

$$(1) \quad \frac{x''^2}{33/8} - \frac{y''^2}{33/16} + \frac{z''^2}{33/16} - 1 = 0,$$

deci quadrica este un hiperboloid cu o pânză.

Altă metodă. Deoarece $\delta = -4 \neq 0$, avem o quadrică cu centru de simetrie $C_s(5/4, -5/4, 0)$ și putem efectua în prealabil o translație de sistem de coordonate $Oxyz \rightarrow O'x'y'z'$, ($O' = C_s$) de vector $\overline{OO'} = (5/4, -5/4, 0)$, descrisă de relațiile:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5/4 \\ -5/4 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' + 5/4 \\ y = y' - 5/4 \\ z = z'. \end{cases}$$

Rezultă ecuația quadrică relativ la $Ox'y'z'$,

$$\Sigma : x'^2 - y'^2 + z'^2 - 2x'y' - 2x'z' - 2y'z' - 1 = 0.$$

Efectuăm o rotație de sistem $Ox'y'z' \rightarrow O''x''y''z''$ de matrice C , dată de relațiile $X' = CX''$; determinăm matricea C folosind metoda valorilor proprii, ca mai sus. Se obține în final ecuația canonică (redușă) a quadrică Σ , dată de ecuația canonică (1).

5.11 Probleme propuse

1. Să se găsească ecuația fiecăreia dintre următoarele sfere:

a) sfera care are centrul în $C(2, 0, 3)$ și este tangentă planului

$$3x + 2y + 4z - 45 = 0;$$

b) sfera care trece prin punctele $A(-1, 0, 0)$, $B(0, 2, 1)$, $C(0, -1, -1)$ și $D(3, 1, -1)$;

c) sfera care are centrul în $C(1, 1, 0)$ și este tangentă interior sferei

$$\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 - x - 3y + 3z - 2 = 0.$$

2. Să se determine coordonatele centrului quadricii

$$x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy + 2xz - 2yz - 4x + 8y - 12z + 14 = 0.$$

Să se efectueze o translație a reperului cartezian în centrul quadricii și să se scrie ecuația quadricii raportată la sistemul traslatat $O'x'y'z'$.

3. Să se reducă la forma canonică următoarele quadrici:

a) $2y^2 + 4xy - 8xz - 4yz + 6x - 5 = 0;$

b) $2y^2 - 7z^2 + 112x - 16y - 14z - 87 = 0;$

c) $xy + z^2 - 2 = 0.$

4. Să se calculeze distanța dintre punctele de intersecție ale dreptei

$$D: \begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = -3 + 2t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

cu quadrica

$$x^2 - y^2 + z^2 - 4y + 6z + 9 = 0.$$

5. Fiind dat hiperboloidul cu o pânză

$$\Sigma: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 - 1 = 0$$

și planul $P: 4x - 3y - 12z - 6 = 0$, să se studieze curba $P \cap \Sigma$ folosind proiecțiile acestei curbe pe planele de coordonate.

6. Fiind dat paraboloidul hiperbolic

$$\Sigma: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = z$$

și punctul $M_0(0, 2, -1)$, să se scrie ecuațiile generatoarelor rectilinii care trec prin M_0 și să se calculeze măsura unghiului dintre aceste generatoare.

7. Să se arate că planul $6x + 3y - 2z + 6 = 0$ intersectează hiperboloidul cu o pânză $x^2 - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} - 1 = 0$ după două generatoare ale căror ecuații se cer.

Partea II

Geometrie diferențială

Capitolul 6

Noțiuni introductive

6.1 Funcții diferențiabile

1.1. În această carte, prin *funcție diferențiabilă* vom înțelege o funcție de clasă C^∞ . Clasa de indice minim impusă de context va putea fi ușor recunoscută.

1.2. Fie $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Funcțiile $f_i = y_i \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, unde y_i sunt funcțiile coordonate ale lui \mathbb{R}^m , se numesc *componentele euclidiene* ale lui f ; se scrie $f = (f_1, \dots, f_m)$.

Mulțimea

$$G(f) = \{(x_1, \dots, x_n, f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)) \mid (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \equiv \mathbb{R}^{n+m}$$

se numește *graficul funcției* $f = (f_1, \dots, f_m)$. Evident $G(f)$ coincide cu mulțimea valorilor funcției

$$(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_1, \dots, x_n, f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)).$$

Funcția $f = (f_1, \dots, f_m)$ este diferențiabilă dacă și numai dacă f_i sunt funcții diferențiabile. Unei funcții diferențiabile f i se asociază *matricea Jacobiană*

$$J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Dacă $n = m$, atunci determinantul $|J(f)|$ se numește *Jacobianul* lui f și se notează cu

$$\frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}.$$

1.3. Funcția $f = (f_1, \dots, f_m)$ se numește:

- 1) *injectivă* dacă relațiile $P, Q \in \mathbb{R}^n$, $f(P) = f(Q) \in \mathbb{R}^m$ implică $P = Q$;
- 2) *surjectivă* dacă $\forall Q \in \mathbb{R}^m$, $\exists P \in \mathbb{R}^n$ astfel încât $f(P) = Q$;
- 3) *bijectivă* dacă este injectivă și surjectivă;

- 4) *imersie* dacă $J(f)$ are rangul n , $\forall P \in \mathbb{R}^n (n \leq m)$;
 5) *submersie* dacă $J(f)$ are rangul m , $\forall P \in \mathbb{R}^n (m \leq n)$;
 6) *regulată* dacă este imersie sau submersie;
 7) *difeomorfism* dacă $n = m$, dacă este diferențiabilă și dacă posedă inversă diferențiabilă.

1.4. Dacă funcția $f = (f_1, \dots, f_m)$ nu este regulată într-un punct P , atunci P se numește *punct singular* sau *punct critic*, iar $f(P)$ se numește *valoare singulară* sau *valoare critică*.

1.5. Fie $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție diferențiabilă; vom nota prin

$$d^2 f(P)(dx) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P) dx_i dx_j$$

hessiana sa (*diferențiala de ordinul doi*).

Fie P un punct critic al lui f . Dacă forma pătratică $d^2 f(P)$ este nedegenerată, adică

$$\det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P) \right) \neq 0,$$

atunci P se numește *punct critic nedegenerat*. În caz contrar P se numește *punct critic degenerat*.

Punctele critice nedegenerate ale unei funcții diferențiabile $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sunt izolate.

1.6. Teorema funcției inverse. Fie $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ o funcție diferențiabilă. Dacă $P \in \mathbb{R}^n$ este un punct în care $\det J(f) \neq 0$, atunci există o vecinătate deschisă D a lui P astfel încât restricția lui f la D să fie un difeomorfism.

1.7. Teorema funcției implicite. Fie $f = (f_1, \dots, f_m) : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ o funcție diferențiabilă. Dacă în $(A, B) \in \mathbb{R}^{n+m}$ avem $f(A, B) = 0$ și

$$\frac{D(f_1, \dots, f_m)}{D(y_1, \dots, y_m)}(A, B) \neq 0,$$

atunci există o vecinătate D a lui A și o funcție diferențiabilă (unică) $g : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ astfel încât $g(A) = B$ și $f(P, g(P)) = 0, \forall P \in D$, unde prin y_1, \dots, y_m s-au notat coordonatele ultime din \mathbb{R}^{n+m} .

1.8. Pentru definiția diferențiabilității nu este necesar ca domeniul de definiție al funcției să fie toată mulțimea \mathbb{R}^n , dar este necesar ca acest domeniu să fie o mulțime deschisă în \mathbb{R}^n .

Fie S o mulțime oarecare din \mathbb{R}^n . O funcție $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ se numește *diferențiabilă* pe S dacă poate fi extinsă diferențiabil la un interval deschis din \mathbb{R}^n care conține pe S .

1.9. Fie I un interval din \mathbb{R} și $f : I \rightarrow \mathbb{R}^m$. În acest caz noțiunea de derivată parțială se reduce la noțiunea de derivată de la funcțiile de o singură variabilă. De asemenea, au sens și noțiunile de derivată la stânga și la dreapta.

Exemplu. Fie funcția $F : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, unde $F(u, v) = (u^2, uv, v^2)$, iar $D : u > 0, v > 0$. Deoarece, $\forall (u, v) \in D$, matricea

$$J(F) = \begin{pmatrix} 2u & 0 \\ v & u \\ 0 & 2v \end{pmatrix}$$

are rangul doi, aplicația F este o imersie.

Din $(u_1^2, u_1 v_1, v_1^2) = (u_2^2, u_2 v_2, v_2^2)$ rezultă $u_1 = u_2$ și $v_1 = v_2$, adică $(u_1, v_1) = (u_2, v_2)$. Deci F este injectivă.

Notând $x = u^2$, $y = uv$, $z = v^2$, observăm că $F(D)$ este porțiunea din quadrica de ecuație $y^2 = xz$ cuprinsă în primul octant. Rotația

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(z' - x') \\ y = y' \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + z') \end{cases}$$

ne conduce la ecuația canonică

$$\frac{x'^2}{2} + y'^2 - \frac{z'^2}{2} = 0$$

și deci quadrica $y^2 = xz$ este un con.

Dacă ne restrângem la $F(D) \subset \mathbb{R}^3$, atunci $F : D \rightarrow F(D)$ este o bijecție. Expresia inversei $F^{-1} : F(D) \rightarrow D$ se obține din

$$u^2 = x, uv = y, v^2 = z.$$

Găsim $u = \sqrt{x}$, $v = \sqrt{z}$ și deci

$$F^{-1} : F(D) \rightarrow D, F^{-1}(x, y, z) = (\sqrt{x}, \sqrt{z}),$$

care este o funcție diferentiabilă.

6.2 Vectori tangenți. Câmpuri vectoriale

Fie \mathbb{R}^n spațiul vectorial (real) euclidian canonic cu dimensiunea n , produsul scalar fiind notat $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Ca orice spațiu vectorial euclidian, \mathbb{R}^n este implicit un spațiu punctual euclidian, adică orice punct P al său poate fi identificat cu vectorul său de poziție \overline{OP} , unde O este un punct arbitrar fixat (originea spațiului).

Fie P și Q două puncte oarecare din \mathbb{R}^n . Perechea ordonată (P, Q) se numește *vector tangent* la \mathbb{R}^n în punctul P și se notează cu \overline{PQ} . În spațiile $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ acesta se reprezintă grafic printr-o *săgeată* care începe din punctul P și se termină în punctul Q (fig.1).

Vectorul $\vec{v} = Q - P$ se numește *partea vectorială* a vectorului tangent \overline{PQ} și în loc de (P, Q) putem nota \vec{v}_P sau chiar \vec{v} dacă punctul de aplicație P se subînțelege.

Doi vectori tangenți \vec{v}_P și \vec{w}_Q se numesc *egali* dacă au aceeași parte vectorială, $\vec{v} = \vec{w}$, și același punct de aplicație, $P = Q$. Doi vectori \vec{v}_P și \vec{w}_Q care au aceeași parte vectorială, $\vec{v} = \vec{w}$, dar care au puncte de aplicație diferite se numesc *paraleli* (fig.2).

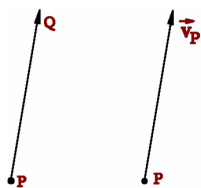


Fig. 1

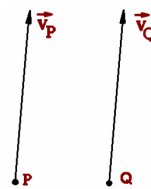


Fig. 2

Fixăm un punct $P \in \mathbb{R}^n$ și considerăm toți vectorii tangenți la \mathbb{R}^n în P . Mulțimea tuturor vectorilor tangenți la \mathbb{R}^n în P se numește *spațiul tangent* la \mathbb{R}^n în P și se notează cu $T_P \mathbb{R}^n$ (fig.3).

unde membrul doi este un determinant simbolic ce se dezvoltă după prima linie, se numește *produsul vectorial* dintre $\vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$.

Evident, $\vec{v}_2 \times \dots \times \vec{v}_n$ este perpendicular pe fiecare dintre vectorii $\vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$.

2.2. Definiție. Considerăm acum n vectori $\vec{v}_i \in T_P \mathbb{R}^n$. Numărul

$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \times \dots \times \vec{v}_n \rangle$$

se numește *produsul mixt* al celor n vectori.

Dacă

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= r_{11}\vec{e}_1 + \dots + r_{1n}\vec{e}_n \equiv (r_{11}, r_{12}, \dots, r_{1n}), \\ \vec{v}_2 &\equiv (r_{21}, r_{22}, \dots, r_{2n}), \dots, \vec{v}_n \equiv (r_{n1}, r_{n2}, \dots, r_{nn}), \end{aligned}$$

atunci

$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \times \dots \times \vec{v}_n \rangle = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{vmatrix}.$$

Modulul acestui număr reprezintă volumul n -paralelipipedului construit pe vectorii de mai sus.

Reperul natural din \mathbb{R}^3 (fig.5) este $\vec{i}_P = (1, 0, 0)_P$, $\vec{j}_P = (0, 1, 0)_P$, $\vec{k}_P = (0, 0, 1)_P$. În acest caz se poate vorbi despre produsul vectorial a doi vectori tangenți (fig.6)

$$\vec{v}_P = v_1\vec{i}_P + v_2\vec{j}_P + v_3\vec{k}_P \quad \text{și} \quad \vec{w}_P = w_1\vec{i}_P + w_2\vec{j}_P + w_3\vec{k}_P,$$

$$\vec{v}_P \times \vec{w}_P = \begin{vmatrix} \vec{i}_P & \vec{j}_P & \vec{k}_P \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

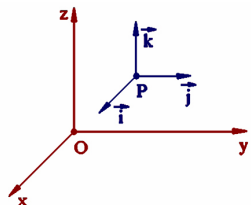


Fig. 5

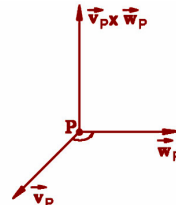


Fig. 6

2.3. Definiție. O funcție \vec{V} care asociază fiecărui punct P al lui \mathbb{R}^n un vector $\vec{V}(P)$ tangent la \mathbb{R}^n în P se numește *câmp vectorial*.

Mulțimea în care ia valori un câmp vectorial \vec{V} este *spațiul tangent*

$$T\mathbb{R}^n = \bigcup_{P \in \mathbb{R}^n} T_P \mathbb{R}^n.$$

Cu alte cuvinte, avem

$$\vec{V} : \mathbb{R}^n \rightarrow T\mathbb{R}^n, \quad \vec{V}(P) \in T_P \mathbb{R}^n.$$

Dacă funcția \vec{V} este constantă, atunci câmpul se numește *paralel*. Mulțimea valorilor unui câmp paralel constă dintr-un singur element și se identifică cu un vector liber.

Câmpurile paralele $\vec{U}_1, \vec{U}_2, \dots, \vec{U}_n$ definite prin

$$\vec{U}_1(P) = (1, 0, \dots, 0)_P, \vec{U}_2(P) = (0, 1, \dots, 0)_P, \dots, \vec{U}_n(P) = (0, 0, \dots, 1)_P,$$

se numesc *câmpuri fundamentale*, iar ansamblul lor se numește *câmpul reperului natural*.

2.4. Teoremă. *Dacă \vec{V} este un câmp vectorial pe \mathbb{R}^n , atunci există n funcții reale $v_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$, astfel încât*

$$\vec{V} = v_1 \vec{U}_1 + v_2 \vec{U}_2 + \dots + v_n \vec{U}_n.$$

Funcțiile v_i se numesc *coordonatele (componentele) euclidiene* ale câmpului \vec{V} .

Demonstrație. Prin definiție \vec{V} asociază lui P un vector $\vec{V}(P)$ tangent la \mathbb{R}^n în P . Deoarece partea vectorială a lui $\vec{V}(P)$ depinde de P , ea poate fi scrisă în forma $(v_1(P), v_2(P), \dots, v_n(P))$ și astfel obținem funcțiile $v_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

În plus, $\forall P \in \mathbb{R}^n$, avem

$$\begin{aligned} \vec{V}(P) &= (v_1(P), v_2(P), \dots, v_n(P))_P = v_1(P)(1, 0, \dots, 0)_P + \\ &+ v_2(P)(0, 1, \dots, 0)_P + \dots + v_n(P)(0, 0, \dots, 1)_P = \\ &= v_1(P)\vec{U}_1(P) + v_2(P)\vec{U}_2(P) + \dots + v_n(P)\vec{U}_n(P). \end{aligned}$$

Deci $\vec{V} = \sum_{i=1}^n v_i \vec{U}_i$. Evident funcțiile v_i sunt unic determinate. □

În particular, orice vector tangent \vec{v}_P se reprezintă în forma

$$\vec{v}_P = \sum_{i=1}^n r_i \vec{U}_i(P).$$

Algebra câmpurilor vectoriale se construiește pe baza următoarelor operații definite ca la funcții:

$$\begin{aligned} (\vec{V} + \vec{W})(P) &= \vec{V}(P) + \vec{W}(P), \\ (f\vec{V})(P) &= f(P)\vec{V}(P). \end{aligned}$$

De asemenea *produsul scalar* al câmpurilor vectoriale \vec{V} și \vec{W} se definește prin

$$\langle \vec{V}, \vec{W} \rangle(P) = \langle \vec{V}(P), \vec{W}(P) \rangle.$$

Produsul vectorial al câmpurilor $\vec{V}_2, \dots, \vec{V}_n$ se definește prin

$$(\vec{V}_2 \times \dots \times \vec{V}_n)(P) = \vec{V}_2(P) \times \dots \times \vec{V}_n(P).$$

Produsul mixt al câmpurilor $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots, \vec{V}_n$ se definește prin

$$\langle \vec{V}_1, \vec{V}_2 \times \dots \times \vec{V}_n \rangle(P) = \langle \vec{V}_1(P), \vec{V}_2(P) \times \dots \times \vec{V}_n(P) \rangle.$$

Operațiile asupra câmpurilor vectoriale se pot exprima prin operații asupra funcțiilor coordonate ale câmpurilor respective. De asemenea facem observația că în baza teoremei 2.4, orice câmp vectorial \vec{V} din \mathbb{R}^n este echivalent cu o aplicație de tipul $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. De aceea apare naturală următoarea

Definiție. Câmpul \vec{V} se numește *câmp vectorial diferentiabil* dacă coordonatele sale sunt diferentiabile. În continuare presupunem că folosim numai câmpuri vectoriale diferentiabile.

Să presupunem că ne situăm în \mathbb{R}^3 . În acest caz câmpul reperului natural $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ este definit prin (fig.5)

$$\vec{i}(P) = \vec{i}_P = (1, 0, 0)_P, \quad \vec{j}(P) = \vec{j}_P = (0, 1, 0)_P, \quad \vec{k}(P) = \vec{k}_P = (0, 0, 1)_P.$$

Orice câmp vectorial pe \mathbb{R}^3 are în punctul $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ forma (fig.7)

$$\vec{V} = v_1(x, y, z)\vec{i} + v_2(x, y, z)\vec{j} + v_3(x, y, z)\vec{k}.$$

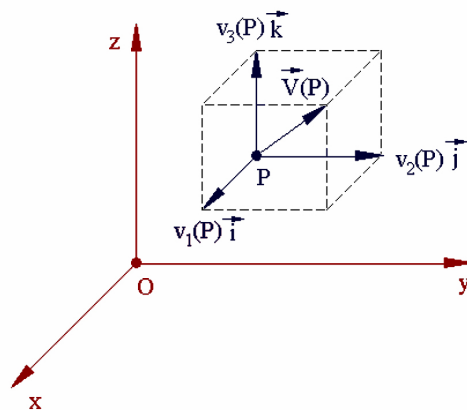


Fig. 7

În spațiul \mathbb{R}^3 se poate defini *produsul vectorial* a două câmpuri \vec{V} și \vec{W} și anume

$$(\vec{V} \times \vec{W})(P) = \vec{V}(P) \times \vec{W}(P).$$

2.5. Exemplu (fig.8). Fie q_0 o sarcină electrică situată în punctul O . Forța \vec{E} cu care sarcina q_0 acționează asupra sarcinii $q = +1$ (unitate de sarcină electrică în SI , $1 \text{ Coulomb} = 1A \cdot s$) situată în punctul arbitrar P este (legea Coulomb)

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_0}{\|\vec{r}\|^3} \vec{r},$$

unde \vec{r} este vectorul de poziție al punctului P în raport cu O , iar ϵ este permitivitatea mediului în care sunt plasate sarcinile.

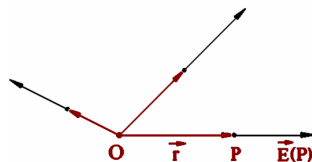


Fig. 8

Funcția $P \rightarrow \vec{E}(P)$ se numește *câmp electrostatic* produs de sarcina q_0 . Domeniul de definiție al acestui câmp este $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$.

6.3 Derivata covariantă

Presupunem că toate funcțiile utilizate sunt diferențiabile de clasă C^∞ .

I. Fie D o mulțime deschisă din \mathbb{R}^n și $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție reală. Fie $P \in D$ și \vec{v} un vector tangent la D în punctul P . Fixăm intervalul I astfel încât $P + tV \in D, \forall t \in I$, unde V este punctul corespunzător vectorului \vec{v} . Evident $t \rightarrow P + tV$ reprezintă restricția unei drepte și dacă f este diferențiabilă, atunci funcția compusă $t \rightarrow f(P + tV)$ este tot diferențiabilă.

3.1. Definiție. Numărul

$$D_{\vec{v}}f(P) = \left. \frac{d}{dt} f(P + tV) \right|_{t=0}$$

se numește *derivata lui f în raport cu \vec{v}* . Numărul $D_{\vec{v}}f(P)$ indică cantitativ schimbarea valorii $f(P)$ când P se mișcă în sensul și direcția lui \vec{v} . Dacă \vec{v} este un versor, atunci $D_{\vec{v}}f$ poartă numele de *derivata lui f după direcția \vec{v}* .

3.2. Lemă. Dacă $\vec{v}_P = (v_1, \dots, v_n)_P$, atunci

$$D_{\vec{v}}f(P) = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(P) + \dots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) = \langle \vec{v}, \nabla f(P) \rangle = df(P)(\vec{v}),$$

unde ∇f este gradientul lui f , iar df este diferențiala lui f .

Demonstrația este imediată ca urmare a teoremei de derivare a unei funcții compuse.

Utilizând inegalitatea Cauchy-Schwarz

$$|D_{\vec{v}}f(P)| = |(\vec{v}, \nabla f(P))| \leq \|\vec{v}\| \|\nabla f(P)\|,$$

în care egalitatea are loc dacă și numai dacă \vec{v} și $\nabla f(P)$ sunt coliniari, rezultă că $\vec{v} \rightarrow D_{\vec{v}}f(P)$ are un minim (maxim) egal cu $-\|\vec{v}\| \|\nabla f(P)\|$ (respectiv $\|\vec{v}\| \|\nabla f(P)\|$) dacă \vec{v} are sensul și direcția lui $-\nabla f(P)$ (respectiv $\nabla f(P)$). Astfel, $-\nabla f(P)$ (respectiv $\nabla f(P)$) indică local direcția și sensul în care f descrește (crește) cel mai repede.

3.3. Teoremă. Fie $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $\vec{v}, \vec{w} \in T_P D$ și $a, b \in \mathbb{R}$. Avem

$$\begin{aligned} D_{a\vec{v}+b\vec{w}}f(P) &= aD_{\vec{v}}f(P) + bD_{\vec{w}}f(P) \\ D_{\vec{v}}(af + bg)(P) &= aD_{\vec{v}}f(P) + bD_{\vec{v}}g(P) \\ D_{\vec{v}}(fg)(P) &= g(P)D_{\vec{v}}f(P) + f(P)D_{\vec{v}}g(P). \end{aligned}$$

Demonstrația se bazează pe lema 3.2 și pe proprietățile gradientului.

Folosind noțiunea precedentă putem defini acțiunea unui câmp vectorial \vec{V} asupra unei funcții f (ambele definite pe D) ca fiind funcția cu valori reale notată cu $D_{\vec{V}}f$ și a cărei valoare în fiecare punct $P \in D$ este numărul $D_{\vec{V}(P)}f(P)$. Funcția $D_{\vec{V}}f$ se numește *derivata funcției f în raport cu câmpul \vec{V}* . În particular, pentru cazul $n = 3$, avem

$$D_{\vec{i}}f = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad D_{\vec{j}}f = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad D_{\vec{k}}f = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

În baza teoremei 3.3 deducem că derivata $D_{\vec{V}}f$ are următoarele proprietăți

$$\begin{aligned} D_{f\vec{V}+g\vec{W}}h &= fD_{\vec{V}}h + gD_{\vec{W}}h \\ D_{\vec{V}}(af + bg) &= aD_{\vec{V}}f + bD_{\vec{V}}g \\ D_{\vec{V}}(fg) &= fD_{\vec{V}}g + gD_{\vec{V}}f. \end{aligned}$$

II. Noțiunea pe care o introducem acum generalizează derivata $D_{\vec{v}}f(P)$ și reprezintă o operație asupra câmpurilor vectoriale. Fie \vec{W} un câmp vectorial definit pe mulțimea deschisă D din \mathbb{R}^n și \vec{v} un vector tangent la D în punctul x . Considerăm funcția compusă $t \rightarrow \vec{W}(P + tV)$, $t \in I$, unde I este determinat de condiția $P + tV \in D$.

3.4. Definiție. Vectorul

$$D_{\vec{v}}\vec{W}(P) = \left. \frac{d}{dt}\vec{W}(P + tV) \right|_{t=0}$$

tangent la D în punctul P se numește *derivata covariantă a lui \vec{W} în raport cu \vec{v}* .

Derivata covariantă $D_{\vec{v}}\vec{W}(P)$ măsoară rata inițială a schimbării lui $\vec{W}(P)$ când P se mișcă în sensul lui \vec{v} (fig.10).

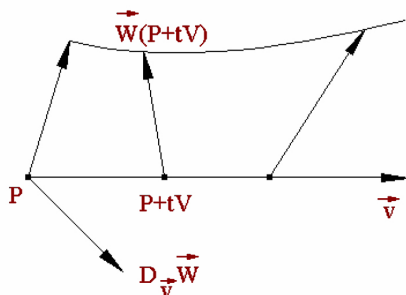


Fig. 9

3.5. Lemă. Dacă $\vec{W} = w_1\vec{U}_1 + \dots + w_n\vec{U}_n$ și \vec{v} este un vector tangent la D în punctul P , atunci

$$D_{\vec{v}}\vec{W}(P) = D_{\vec{v}}w_1(P)\vec{U}_1(P) + \dots + D_{\vec{v}}w_n(P)\vec{U}_n(P).$$

Demonstrație. Se observă că

$$\vec{W}(P + tV) = w_1(P + tV)\vec{U}_1(P + tV) + \dots + w_n(P + tV)\vec{U}_n(P + tV).$$

Pentru a deriva un astfel de câmp în $t = 0$, se derivează coordonatele sale în $t = 0$. Ținând seama de definiția 3.1, lema devine evidentă.

Proprietățile derivatei covariante rezultă din lema 3.5 și din proprietățile derivatei $D_{\vec{v}}f(P)$ date în teorema 3.3.

3.6. Teoremă. Fie \vec{W} și \vec{W} două câmpuri vectoriale pe D , fie $\vec{v}, \vec{w} \in T_P D$ și $a, b \in \mathbb{R}$. Avem

$$\begin{aligned} D_{a\vec{v}+b\vec{w}}\vec{W} &= aD_{\vec{v}}\vec{W} + bD_{\vec{w}}\vec{W} \\ D_{\vec{v}}(a\vec{V} + b\vec{W}) &= aD_{\vec{v}}\vec{V} + bD_{\vec{v}}\vec{W} \\ D_{\vec{v}}(f\vec{W}) &= (D_{\vec{v}}f)\vec{W} + fD_{\vec{v}}\vec{W} \\ D_{\vec{v}}\langle \vec{V}, \vec{W} \rangle &= \langle D_{\vec{v}}\vec{V}, \vec{W} \rangle + \langle \vec{V}, D_{\vec{v}}\vec{W} \rangle. \end{aligned}$$

Noțiunea de mai sus se poate extinde considerând derivata covariantă a unui câmp vectorial \vec{W} în raport cu câmpul vectorial \vec{V} . Rezultatul este un câmp vectorial care se notează cu $D_{\vec{V}}\vec{W}$ și a cărui valoare în P este $D_{\vec{V}(P)}\vec{W}(P)$. Dacă $\vec{W} = w_1\vec{U}_1 + \dots + w_n\vec{U}_n$, atunci

$$D_{\vec{V}}\vec{W} = (D_{\vec{V}}w_1)\vec{U}_1 + \dots + (D_{\vec{V}}w_n)\vec{U}_n.$$

În baza celor precedente rezultă că $D_{\vec{v}}$ are următoarele proprietăți

$$\begin{aligned} D_{f\vec{v}+g\vec{w}}\vec{Y} &= fD_{\vec{v}}\vec{Y} + gD_{\vec{w}}\vec{Y} \\ D_{\vec{v}}(a\vec{Y} + b\vec{Z}) &= aD_{\vec{v}}\vec{Y} + bD_{\vec{v}}\vec{Z} \\ D_{\vec{v}}(f\vec{Y}) &= (D_{\vec{v}}f)\vec{Y} + fD_{\vec{v}}\vec{Y} \\ D_{\vec{v}}\langle\vec{Y}, \vec{Z}\rangle &= \langle D_{\vec{v}}\vec{Y}, \vec{Z}\rangle + \langle\vec{Y}, D_{\vec{v}}\vec{Z}\rangle. \end{aligned}$$

Observații. 1) În derivata covariantă $D_{\vec{v}}\vec{W}$, rolul lui \vec{V} este algebric, iar \vec{W} se derivează.
2) Derivatele covariante ale câmpurilor fundamentale $\vec{U}_i, i = 1, \dots, n$, sunt nule.

6.4 Probleme propuse

1. Fie $P = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Să se arate că

$$\max\{|x_i|, i = 1, \dots, n\} \leq \|P\|_2 \leq \sqrt{n} \max\{|x_i|, i = 1, \dots, n\}.$$

2. Să se arate că pe \mathbb{R}^n nu există nici o distanță diferențiabilă.

3. Fie

$$P = (x_1, \dots, x_n), f(P) = a_1x_1^{\alpha_1} + \dots + a_nx_n^{\alpha_n},$$

unde $\alpha_i > 0$, iar $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ este o progresie geometrică cu rația r . Să se calculeze $D_{\vec{v}}f(Q)$ pentru $\vec{v} = \left(\frac{1}{\alpha_1}, \dots, \frac{1}{\alpha_n}\right)$ și $Q = (1, \dots, 1)$.

4. Fie câmpurile vectoriale $\vec{X} = x_1\vec{U}_1 + \dots + x_n\vec{U}_n$ și $\vec{Y} = \frac{\vec{X}}{\|\vec{X}\|}$. Să se determine $D_{\vec{X}}\vec{Y}$ pe domeniul maxim de definiție.

Capitolul 7

Curbe în \mathbb{R}^n

7.1 Definiții și exemple

Fie $\mathbb{E}^n \equiv \mathbb{R}^n$ spațiul euclidian canonic cu n dimensiuni, $T_O\mathbb{R}^n$ spațiul tangent în punctul O (origine) la \mathbb{R}^n și $\mathcal{J}_O : \mathbb{R}^n \rightarrow T_O\mathbb{R}^n$ izomorfismul canonic. Notăm cu I un interval deschis (alteori închis, semiînchis) sau o reuniune de intervale din \mathbb{R} .

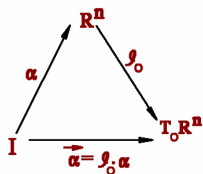


Fig. 10

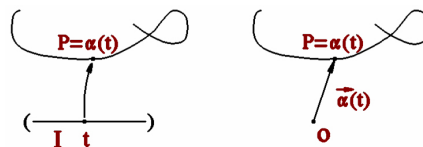


Fig. 11

1.1. Definiție. O funcție diferentiabilă $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ se numește *curbă* și se notează cu α . Uneori numai imaginea $\alpha(I)$ este numită *curbă*. În acest caz α se numește *parametrizare* (sau *drum parametrizat*), iar $t \in I$ se numește *parametru*. Noi vom folosi ambele accepțiuni ale cuvântului "curbă", semnificația decurgând din context. De asemenea menționăm că deși considerațiile teoretice se fac în \mathbb{R}^n imaginile grafice se realizează în \mathbb{R}, \mathbb{R}^2 sau \mathbb{R}^3 .

Observăm compunerea marcată prin fig.10. Rezultă că lui α putem să-i atașăm o funcție și numai una de tipul $\vec{\alpha} : I \rightarrow T_O\mathbb{R}^n$, ceea ce permite să privim mulțimea $\alpha(I)$ ca fiind descrisă de extremitatea unui vector variabil $\vec{\alpha}$ cu originea fixată în originea O a lui \mathbb{R}^n (fig.11).

Din definiția lui $\alpha(I)$ rezultă echivalența:

$$P \in \alpha(I) \Leftrightarrow \exists t \in I, \quad P = \alpha(t).$$

Dacă raportăm pe \mathbb{R}^n la baza canonică, atunci funcțiile α și $\vec{\alpha}$ sunt caracterizate prin coordonatele lor euclidiene:

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \quad t \in I \\ \vec{\alpha}(t) &= x_1(t)\vec{e}_1 + x_2(t)\vec{e}_2 + \dots + x_n(t)\vec{e}_n, \quad t \in I. \end{aligned}$$

Curba $\alpha(I)$ poate fi descrisă prin ecuațiile parametrice

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \dots, \quad x_n = x_n(t)$$

sau prin ecuația vectorială parametrică

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(t).$$

1.2. Definiție. Un punct P al lui $\alpha(I)$ se numește *simplu* dacă există o singură valoare $t \in I$ așa ca $\alpha(t) = P$. Dacă există mai multe valori distincte t astfel încât $\alpha(t) = P$, atunci punctul P se numește *multiplu*.

De exemplu, dacă există numerele $t_1 \neq t_2$ și numai acestea (din I) pentru care $\alpha(t_1) = \alpha(t_2) = Q$, atunci punctul Q se numește *dublu* (fig.12).

Dacă există trei numere distincte t_1, t_2, t_3 și numai acestea (din I) pentru care $\alpha(t_1) = \alpha(t_2) = \alpha(t_3) = Q$, atunci punctul Q se numește *triplu* (fig.12).

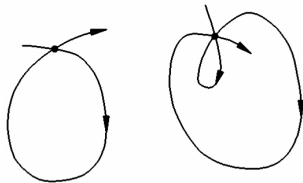


Fig. 12

În general, cardinalul mulțimii $\alpha^{-1}(P)$ se numește *multiplicitatea* punctului P .

Funcția α poate fi injectivă sau surjectivă.

Dacă toate punctele unei curbe $\alpha(I)$ sunt simple, atunci după definițiile anterioare, aplicația α este injectivă. Dacă o componentă a funcției α este injectivă, atunci funcția α este injectivă.

1.3. Definiție. O funcție diferențiabilă și injectivă $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ se numește *curbă simplă*. Să presupunem acum că avem o funcție de tipul $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Această funcție se numește *diferențiabilă* dacă poate fi extinsă diferențiabil la un interval deschis ce conține pe $[a, b]$.

Să analizăm semnificația geometrică a neinjectivității funcției α .

1.4. Definiție. O funcție diferențiabilă $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ pentru care $\alpha(a) = \alpha(b)$ se numește *curbă închisă* (fig.13). Această definiție nu are același conținut cu definiția topologică a unei mulțimi închise. Într-adevăr, pentru orice curbă $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, imaginea $\alpha([a, b])$ este închisă în \mathbb{R}^n în sens topologic, deoarece α este automat o funcție continuă, dar aceasta nu are nici o legătură cu condiția $\alpha(a) = \alpha(b)$.

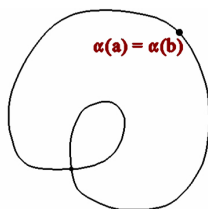


Fig. 13

O curbă închisă pentru care restricția la $[a, b)$ este injectivă se numește *curbă simplă și închisă*.

O curbă $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ se numește *periodică* dacă există un număr $T > 0$ astfel încât

$$t + T \in I, \alpha(t + T) = \alpha(t), \forall t \in I.$$

Cel mai mic număr T care se bucură de această proprietate se numește *perioada* lui α . Se observă că o curbă periodică este închisă. De asemenea se poate demonstra că imaginea unei curbe închise admite o reprezentare parametrică periodică.

Evident, din faptul că $\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, $t \in \mathbb{R}$ este o curbă periodică rezultă că fiecare componentă $x_i(t)$ este periodică având eventual altă perioadă principală. Reciproc, dacă fiecare

componentă $x_i(t)$ este periodică și are perioada T_i , iar $p_j T_i = p_i T_j$, $i \neq j$, $p_i, p_j \in \mathbb{Z}$, atunci α este periodică și are perioada $T = p T_1$, unde $p = \text{c.m.m.m.c.} \{p_i | i \geq 1\}$.

1.5. Exemple.

1) Fie $P = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ un punct fixat și $\bar{v} \equiv (q_1, \dots, q_n) \neq (0, \dots, 0)$ un vector nenul. Curba $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\alpha(t) = P + tv = (p_1 + tq_1, \dots, p_n + tq_n),$$

se numește *dreaptă determinată de punctul $P = \alpha(0)$ și direcția dată de vectorul v* .

Cele n ecuații parametrice $x_i = p_i + tq_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, sunt echivalente cu $n - 1$ *ecuații carteziane* în \mathbb{R}^n ,

$$\frac{x_1 - p_1}{q_1} = \dots = \frac{x_n - p_n}{q_n},$$

cu convenția că dacă un numitor este nul, atunci numărătorul respectiv este nul.

Submulțimea lui \mathbb{R}^n caracterizată prin ecuația carteziană implicită

$$\sum_{i=1}^n q_i(x_i - p_i) = 0$$

este *hiperplanul* ce trece prin punctul P și pentru care \bar{v} este o direcție normală.

2) Graficul unei funcții diferentiabile de tipul $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ este o curbă în plan (fig.14-fig.17) deoarece acest grafic poate fi privit ca imaginea funcției $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (t, f(t))$. O curbă de acest tip nu poate avea puncte multiple, nu poate fi închisă și deci nici periodică, deoarece $t_1 \neq t_2$ implică existența punctelor $(t_1, f(t_1))$ și $(t_2, f(t_2))$ care nu pot fi identice (au abscise diferite).

Ecuația $y = f(x)$ se numește *ecuația carteziană explicită* a curbei

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2, \alpha(t) = (t, f(t)), \quad t \in I.$$

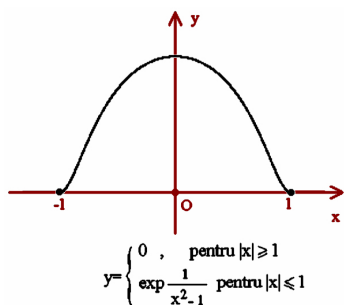


Fig. 14

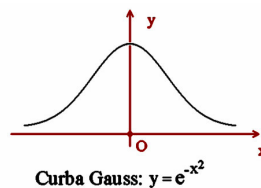


Fig. 15

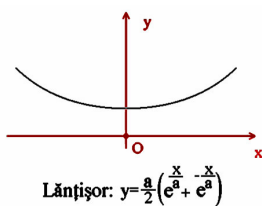


Fig. 16

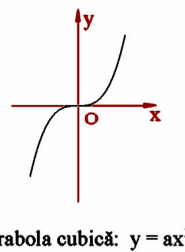


Fig. 17

În practică se întâlnesc și curbe de tipul $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (g(t), t)$, $t \in I$, cărora le corespund ecuații carteziene explicite de forma $x = g(y)$ (vezi §7).

3) Fie curba $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$. Deoarece $\alpha(0) = \alpha(2\pi) = (1, 0)$, curba este închisă.

Imaginea $\alpha([0, 2\pi])$ este cercul cu centrul în origine și de rază unu (fig.18). Restricția lui α la $[0, 2\pi)$ este injectivă și deci cercul este o curbă simplă și închisă.

Să considerăm acum funcția $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$. Evident, imaginea $\alpha(\mathbb{R})$ este tot cercul de rază unu și cu centrul în origine. Observăm însă că în acest caz, $\alpha(t) = \alpha(t + 2\pi)$ și de aceea, cercul poate fi privit ca o curbă periodică cu perioada $T = 2\pi$. În acest sens toate punctele cercului sunt puncte multiple.

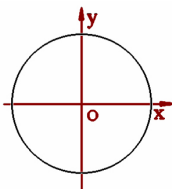


Fig. 18

4) Ne situăm în spațiul cu trei dimensiuni și considerăm curbe pentru care cel puțin una dintre coordonate este funcția identitate (grafice ale funcțiilor de tipul $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$) sau funcția liniară. Ne oprim la cazul $\alpha : I \rightarrow I \times \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (x(t), y(t), bt)$ unde $b \neq 0$, deoarece celelalte situații sunt analoge. O curbă de acest tip nu poate avea puncte multiple, nu poate fi închisă și nici periodică deoarece $t_1 \neq t_2$ implică $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$, acestea fiind puncte cu cote diferite.

Pentru concretizare să considerăm curba descrisă de un punct situat pe o suprafață cilindrică de rotație și având o mișcare compusă dintr-o rotație în jurul axei cilindrului și o translație de-a lungul acestei axe, cele două mișcări fiind proporționale între ele, curbă ce se numește *elice circulară* (fig.19).

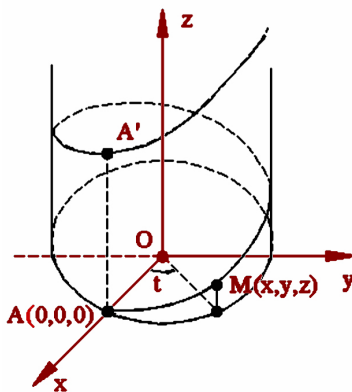


Fig. 19

Presupunând că mobilul pleacă din $A(a, 0, 0)$ găsim ecuațiile parametrice ale curbei, $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, $t \in \mathbb{R}$, unde z reprezintă translația, t rotația, iar $b = \text{const}$. Curba întâlnește fiecare generatoare a suprafeței cilindrice $x^2 + y^2 = a^2$ într-o infinitate de puncte. De exemplu, generatoarea ce trece prin punctul A este întâlnită în punctele de cotă $z = 2nb\pi$, unde n este întreg.

Arcul de curbă între două puncte "consecutive" $A(a, 0, 0)$ și $A'(a, 0, 2b\pi)$ se numește *spiră* a elicei, iar lungimea AA' se numește *pasul elicei*.

7.2 Tangenta și hiperplanul normal la o curbă

Fie $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ o curbă. Notăm cu t variabila din I a.î. $t+h \in I$, $\alpha(t) = P$, $\alpha(t+h) = Q$. Folosind vectorii liberi $\vec{\alpha}(t+h)$, $\vec{\alpha}(t)$, \overrightarrow{PQ} , construim derivata

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{\alpha}(t+h) - \vec{\alpha}(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{PQ}}{h} = \vec{\alpha}'(t)$$

al cărei reprezentant $\vec{\alpha}'(t)$ cu originea în $\alpha(t) = P$ apare ca limita vectorului \overrightarrow{PQ} , când $Q \in \alpha(I)$ se apropie de P . Vectorul $\vec{\alpha}'(t)$ legat în $\alpha(t) = P$ se numește *vector viteză* sau *vector tangent* la curba α în punctul P . Evident $\vec{\alpha}'(t) \in T_{\alpha(t)}\mathbb{R}^n$ (fig.20).

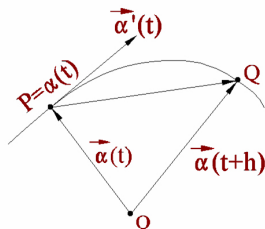


Fig. 20

Dacă raportăm pe \mathbb{R}^n la baza canonică $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$, atunci

$$\vec{\alpha}'(t) = x'_1(t)\vec{e}_1 + x'_2(t)\vec{e}_2 + \dots + x'_n(t)\vec{e}_n.$$

2.1. Definiție. Un punct $P = \alpha(t)$ al curbei α în care $\vec{\alpha}'(t) \neq \vec{0}$ se numește *punct regulat*. Dacă $\vec{\alpha}'(t) \neq \vec{0}$, $\forall t \in I$, atunci curba α se numește *regulată*, iar funcția $t \in I \rightarrow \|\vec{\alpha}'(t)\| \in [0, \infty)$ se numește *viteza curbei*.

Dacă P este un punct regulat, atunci punctul P și vectorul $\vec{\alpha}'(t)$ determină o dreaptă care apare ca limita dreptei PQ când $P = \alpha(t)$ este fix, iar Q tinde către P de-a lungul curbei.

2.2. Definiție. Fie P un punct regulat al curbei α . Dreapta care trece prin P și are ca vector director pe $\vec{\alpha}'(t)$ se numește *tangenta* la curba α în P .

Hiperplanul care trece prin P și are drept vector normal pe $\vec{\alpha}'(t)$ se numește *hiperplan normal* la curba α în P (fig.21 și fig.22).

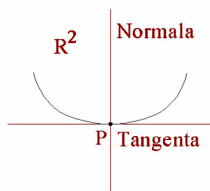


Fig. 21

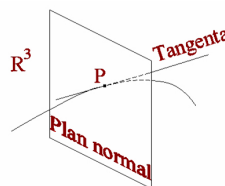


Fig. 22

Pentru elementele descrise anterior avem următoarele ecuații:

- pentru tangenta la curbă în punctul $\alpha(t)$:

$$\frac{x_1 - x_1(t)}{x'_1(t)} = \frac{x_2 - x_2(t)}{x'_2(t)} = \dots = \frac{x_n - x_n(t)}{x'_n(t)}.$$

- pentru hiperplanul normal la curbă în punctul $\alpha(t)$:

$$(x_1 - x_1(t))x'_1(t) + (x_2 - x_2(t))x'_2(t) + \dots + (x_n - x_n(t))x'_n(t) = 0.$$

Un punct al unei curbe poate să nu fie regulat. De aceea admitem următoarea

2.3. Definiție. Un punct $\alpha(t) = P \in \alpha(I)$ corespunzător unei valori a lui t pentru care $\vec{\alpha}'(t) = \vec{0}$ se numește *punct singular*. Observăm că dacă $\vec{\alpha}'(t) = \vec{0}, \forall t \in J \subset I$, atunci $\vec{\alpha}(t) = \vec{c}, \forall t \in J$, și astfel restricția lui α la J se reduce la un punct. În consecință, dacă α admite puncte singulare și nu se reduce la constante pe porțiuni, atunci aceste puncte sunt în general izolate. Dacă $\exists m > 1$ astfel încât $\vec{\alpha}'(t) = \vec{\alpha}''(t) = \dots = \vec{\alpha}^{(m-1)}(t) = \vec{0}, \vec{\alpha}^{(m)}(t) \neq 0$, atunci punctul $P = \alpha(t)$ se numește *punct singular de ordinul m* . În vecinătatea unui punct singular de ordinul m se întrebuițează formula Taylor

$$\bar{\alpha}(t+h) = \bar{\alpha}(t) + \frac{h^m}{m!} [\bar{\alpha}^{(m)}(t) + \bar{\varepsilon}(h)],$$

cu

$$\lim_{h \rightarrow 0} \bar{\varepsilon}(h) = \vec{0},$$

adunarea având sens doar în contextul vectorilor liberi și nu în contextul vectorilor legați în puncte diferite.

Notând $P = \alpha(t)$ și $Q = \alpha(t+h)$ avem

$$\lim_{h \rightarrow 0} m! \frac{\bar{\alpha}(t+h) - \bar{\alpha}(t)}{h^m} = \lim_{h \rightarrow 0} m! \frac{\overline{PQ}}{h^m} = \bar{\alpha}^{(m)}(t).$$

Vectorul $\bar{\alpha}^{(m)}(t)$ se numește *vector tangent* la curba α în punctul singular $P = \alpha(t)$. Punctul P și vectorul $\bar{\alpha}^{(m)}(t)$ definesc o dreaptă care este limita dreptei PQ când $P = \alpha(t)$ este fix, iar Q tinde către P de-a lungul curbei.

2.4. Definiție. Fie P un punct singular de ordinul m . Dreapta determinată de punctul P și vectorul $\bar{\alpha}^{(m)}(t)$ se numește *tangenta curbei în punctul P* .

Hiperplanul care trece prin P și are drept vector normal pe $\bar{\alpha}^{(m)}(t)$ se numește *hiperplan normal la curba α în P* (fig.23).

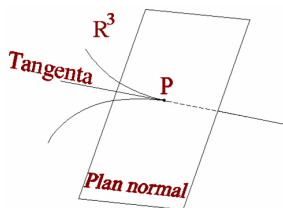


Fig. 23

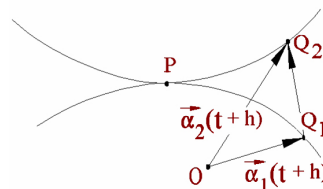


Fig. 24

Ecuatiile tangentei în $P = \alpha(t)$ sunt:

$$\frac{x_1 - x_1(t)}{x_1^{(m)}(t)} = \frac{x_2 - x_2(t)}{x_2^{(m)}(t)} = \dots = \frac{x_n - x_n(t)}{x_n^{(m)}(t)},$$

iar ecuația hiperplanului normal în $P = \alpha(t)$ este:

$$(x_1 - x_1(t))x_1^{(m)}(t) + (x_2 - x_2(t))x_2^{(m)}(t) + \dots + (x_n - x_n(t))x_n^{(m)}(t) = 0.$$

Fie $\alpha_1, \alpha_2 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ două curbe care au punct regulat comun P corespunzător valorii t din interiorul intervalului I , adică $\alpha_1(t) = \alpha_2(t) = P$. Acestor două curbe le asociem curba $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$. Dacă $\alpha(t) = P$ este un punct singular de ordinul $m+1$ pentru curba α , adică

$$\alpha^{(k)}(t) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m; \quad \alpha^{(m+1)}(t) \neq 0,$$

atunci spunem că α_1 și α_2 au în punctul P un *contact de ordinul m* . Denumirea provine din faptul că relațiile anterioare descriu un zerou multiplu de ordinul $m + 1$ pentru curba α ceea ce este echivalent cu $m + 1$ puncte confundate comune în P pentru curbele α_1 și α_2 .

2.5. Teoremă. Fie $Q_1 = \alpha_1(t + h)$, $Q_2 = \alpha_2(t + h)$. Contactul în P dintre curbele α_1 și α_2 este de ordinul m dacă și numai dacă (fig.24)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overline{Q_1 Q_2}}{h^i} \begin{cases} = \bar{0}, & \text{pentru } i = 1, \dots, m \\ \neq \bar{0}, & \text{pentru } i = m + 1. \end{cases}$$

Demonstrație. Se folosesc formulele Taylor pentru α_1 și α_2 :

$$\bar{\alpha}_i(t + h) = \bar{\alpha}_i(t) + \frac{h}{1!} \bar{\alpha}'_i(t) + \dots + \frac{h^m}{m!} \bar{\alpha}_i^{(m)}(t) + \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} [\bar{\alpha}_i^{(m+1)}(t) + \bar{\varepsilon}_i(h)],$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \bar{\varepsilon}_i(h) = 0, \quad i = 1, 2.$$

2.6. Observații.

1) Dacă $\alpha(t) = P$ este un punct regulat, rezultă că pe o vecinătate a lui t funcția $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ este injectivă.

2) Un punct al unei curbe poate fi simplu și regulat sau simplu și singular sau multiplu și regulat sau multiplu și singular.

3) Fie $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ două curbe astfel încât $\alpha(I) \cap \beta(J) \neq \emptyset$ și fie $P \in \alpha(I) \cap \beta(J)$ un punct regulat sau singular de ordinul m . Unghiul dintre vectorii tangenți al cele două curbe în P se numește *unghiul celor două curbe*. Dacă cei doi vectori sunt perpendiculari curbele se numesc *ortogonale*. Dacă unghiul dintre cei doi vectori este zero sau π , atunci curbele se numesc *tangente*.

4) În cinematică o curbă $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ este privită ca fiind drumul descris de un punct material în mișcare. În acest caz variabila t se numește *timp*, $\alpha(I)$ se numește *traietorie*, $\bar{\alpha}'(t)$ se numește *viteza curbei* la momentul t , iar $\bar{\alpha}''(t)$ se numește *acelerația curbei* la momentul t .

5) Derivatele $\bar{\alpha}^{(3)}(t), \bar{\alpha}^{(iv)}(t), \dots$ se numesc *acelerații de ordin superior* la momentul t . În general accelerațiile pot fi tangente la curbă doar în puncte izolate.

6) Două curbe au un contact de ordinul 1 într-un punct regulat comun dacă și numai dacă au aceeași tangentă.

2.7. Orientare.

Pe o curbă dată $\alpha(I)$, presupusă mulțime conexă, se pot stabili numai două sensuri de parcurs (ordine a punctelor curbei care corespunde ordinei din I) pe care convenim să le notăm cu $+$ și $-$. O curbă α împreună cu o alegere a unui sens de parcurs pe $\alpha(I)$ se numește *curbă orientată*.

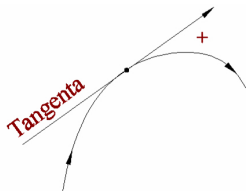


Fig. 25

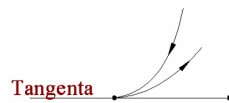


Fig. 26

Fie α o curbă regulată. Dacă $\vec{\alpha}'(t)$ este vectorul tangent la α în $\alpha(t)$, atunci este natural să considerăm drept pozitiv acel sens de parcurs pe $\alpha(I)$ care să fie coerent cu sensul lui $\vec{\alpha}'(t)$ și deci cu sensul pozitiv pe tangentă (vezi orientarea unei drepte).

Convenim să precizăm orientarea unei curbe și a tangentei sale prin săgeți (fig.25).

Dacă curba α posedă puncte singulare, atunci există situații când nu este posibil să alegem pe curbă un sens de parcurs coerent cu cel de pe tangentă (fig.26).

2.8. Exemple.

1) Curbele din \mathbb{R}^2 care se pot reprezenta printr-o ecuație carteziană explicită $y = f(x)$ sunt regulate. Într-adevăr, din egalitatea $\alpha(t) = (t, f(t))$ construim $\vec{\alpha} = t\vec{i} + f(t)\vec{j}$ și deci $\vec{\alpha}' = \vec{i} + f'(t)\vec{j}$ nu se anulează, $\forall t \in I$.

2) Fie curba plană (fig.27)

$$\alpha(t) = \begin{cases} (0, \exp \frac{1}{t}) & t < 0 \\ (0, 0) & t = 0 \\ (\exp \frac{-1}{t}, 0) & t > 0. \end{cases}$$

Observăm că în $t = 0$, funcția $\alpha(t)$ nu este o imersie. De aceea punctul $O(0, 0)$ este un punct singular. Mai mult, observăm că în acest punct singular avem

$$\vec{\alpha}'(0) = \vec{\alpha}''(0) = \dots = \vec{\alpha}^{(m)}(0) = \dots = (0, 0).$$

Pentru fiecare m întreg, putem considera curba (fig.28 pentru $m = 1$)

$$\alpha_m(t) = \begin{cases} (t^m, \exp \frac{1}{t}) & t < 0 \\ (0, 0) & t = 0 \\ (t^m + \exp \frac{-1}{t}, 0) & t > 0. \end{cases}$$

Observăm că în acest caz avem

$$\vec{\alpha}'_m(0) = \vec{\alpha}''_m(0) = \dots = \vec{\alpha}^{(m-1)}_m(0) = \vec{\alpha}^{(m+1)}_m(0) = \dots = (0, 0),$$

și $\vec{\alpha}^{(m)}_m(0) = (m!, 0)$.

Pentru $m = 1$, originea este un punct regulat (fig.28). Pentru $m > 1$, originea este un punct singular de ordinul m .

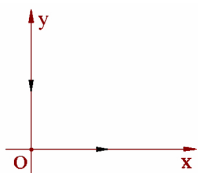


Fig. 27

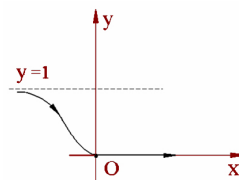


Fig. 28

3) Aplicația $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definită prin

$$\alpha(t) = \begin{cases} (\exp \frac{-1}{t}, \exp \frac{-1}{t} \sin \exp \frac{1}{t}) & t > 0 \\ (0, 0) & t = 0 \\ (-\exp \frac{-1}{t}, \exp \frac{1}{t} \sin \exp \frac{-1}{t}) & t < 0 \end{cases}$$

are o imagine cuprinsă între dreptele $y = \pm x$, având o infinitate de tangente în $(0, 0)$. De asemenea, observăm că α este diferențiabilă și

$$\vec{\alpha}'(0) = \vec{\alpha}''(0) = \dots = \vec{\alpha}^{(m)}(0) = \dots = (0, 0).$$

De aceea originea este un punct singular (fig.29). Punctele $(-1, \sin 1)$, $(1, \sin 1)$ sunt puncte asimptotice (vezi §4).

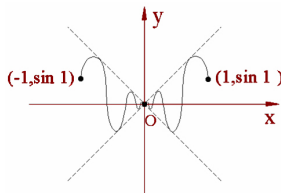


Fig. 29

4) Uneori în \mathbb{R}^3 considerăm curbe de tipul $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (x(t), y(t), t)$. Aceste curbe sunt regulate. Într-adevăr, avem $\vec{\alpha} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + t\vec{k}$ și deci $\vec{\alpha}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + \vec{k}$, care nu se anulează, $\forall t \in I$.

Aceeași proprietate o au și curbele $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (x(t), t, z(t))$ sau $\alpha(t) = (t, y(t), z(t))$. Pentru exemplificare fie curba dată prin

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t, 0, \exp \frac{1}{t}) & t < 0 \\ (0, 0, 0) & t = 0 \\ (t, \exp \frac{-1}{t}, 0) & t > 0. \end{cases}$$

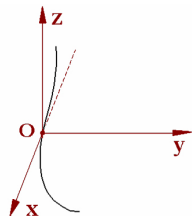


Fig. 30

Arcul $t \leq 0$ este situat în planul xOz , iar arcul $t \geq 0$ este situat în planul xOy (fig.30). Observăm că α este o curbă regulată pentru care

$$\vec{\alpha}'(0) = (1, 0, 0), \vec{\alpha}''(0) = \dots = \vec{\alpha}^{(m)}(0) = \dots = (0, 0, 0).$$

7.3 Câmpuri vectoriale pe o curbă

Noțiunea de câmp vectorial pe o curbă este o variantă a noțiunii generale de câmp vectorial. Fie $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ o curbă și $P = \alpha(t)$, $t \in I$, un punct arbitrar al său.

3.1. Definiție. O funcție Y care asociază fiecărui $t \in I$ un vector $\vec{Y}(t)$ tangent la \mathbb{R}^n în punctul $\alpha(t)$ se numește *câmp vectorial* pe curba α (fig.31).

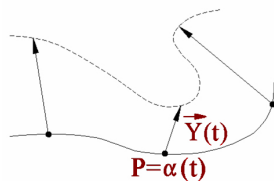


Fig. 31

Funcțiile reale și câmpurile vectoriale pe curbe apar deseori ca restricții. De exemplu, dacă \vec{X} este un câmp vectorial pe \mathbb{R}^n și $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ este o curbă, atunci $\vec{X} \circ \alpha$ este un câmp vectorial pe curba α . Orice câmp vectorial pe o curbă se poate identifica cu o altă curbă.

Evident, viteza $\vec{\alpha}'$ este un câmp vectorial pe curba α . Acest câmp se mai numește și *câmp tangent* la curba α (fig.32).

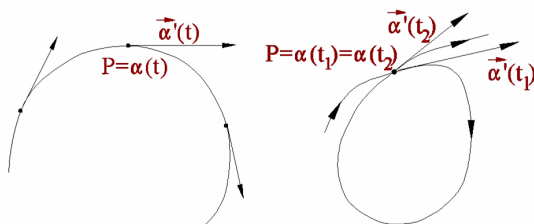


Fig. 32

Precizăm însă că spre deosebire de $\vec{\alpha}'$, câmpurile vectoriale arbitrare pe α pot să conțină sau nu vectori ale căror suporturi să fie tangente la curbă (fig.31).

În general $\vec{\alpha}'$ nu poate fi privit ca o funcție pe $\alpha(I)$ întrucât ar urma că punctului dublu $P = \alpha(t_1) = \alpha(t_2)$, $t_1 \neq t_2$, i se atașează simultan doi vectori diferiți $\vec{\alpha}'(t_1)$ și $\vec{\alpha}'(t_2)$. Această remarcă impune în mod necesar definiția 3.1.

Proprietățile câmpurilor vectoriale definite pe curbe sunt analoge cu cele ale câmpurilor vectoriale pe \mathbb{R}^n . Astfel, în raport cu reperul ortonormat $\{e_1, \dots, e_n\}$, avem

$$\vec{Y}(t) = y_1(t) \vec{e}_1(\alpha(t)) + y_2(t) \vec{e}_2(\alpha(t)) + \dots + y_n(t) \vec{e}_n(\alpha(t)),$$

funcțiile $y_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ numindu-se *coordonatele (componentele) euclidiene* ale lui \vec{Y} .

Funcțiile compuse $\vec{e}_1(\alpha(t)), \dots, \vec{e}_n(\alpha(t))$ sunt câmpuri vectoriale pe α . Aceste câmpuri vor fi notate pe scurt cu $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$.

Pentru câmpurile vectoriale pe o curbă introducem operațiile

$$\begin{aligned} (\vec{Y} + \vec{Z})(t) &= \vec{Y}(t) + \vec{Z}(t) \\ (f\vec{Y})(t) &= f(t)\vec{Y}(t) \\ \langle \vec{Y}, \vec{Z} \rangle(t) &= \langle \vec{Y}(t), \vec{Z}(t) \rangle \\ (\vec{Y} \times \vec{Z})(t) &= \vec{Y}(t) \times \vec{Z}(t) \text{ pe } \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Evident aceste operații se traduc prin operații asupra coordonatelor câmpurilor.

3.2. Definiție. Fie α o curbă regulată și \vec{Y} un câmp vectorial pe α . Dacă $\langle \vec{Y}, \vec{\alpha}' \rangle = 0$, atunci \vec{Y} se numește *câmp normal* la α . Dacă $\vec{Y}(t) = \lambda(t)\vec{\alpha}'(t)$, atunci \vec{Y} se numește *câmp tangent* la α .

Deoarece $\vec{Y}(t) = y_1(t)\vec{e}_1 + y_2(t)\vec{e}_2 + \dots + y_n(t)\vec{e}_n$, deducem că orice câmp \vec{Y} este echivalent cu o funcție de tipul $F : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. De aceea apare naturală definiția: \vec{Y} se numește *câmp diferențiabil*

dacă coordonatele sale sunt diferențiabile. De asemenea precizăm că derivata unui câmp \vec{Y} ,

$$\vec{Y}' = \frac{dy_1}{dt} \vec{e}_1 + \frac{dy_2}{dt} \vec{e}_2 + \dots + \frac{dy_n}{dt} \vec{e}_n,$$

este tot un câmp vectorial pe curba α . În particular, derivata $\vec{\alpha}''$ a câmpului viteză $\vec{\alpha}'$ asociat lui α dă *câmpul accelerație*. În general accelerația nu este dirijată după tangenta la curbă. Avem

$$\begin{aligned} (a\vec{Y} + b\vec{Z})' &= a\vec{Y}' + b\vec{Z}', a, b \in \mathbb{R} \\ (f\vec{Y})' &= f'\vec{Y} + f\vec{Y}' \\ \langle \vec{Y}, \vec{Z} \rangle' &= \langle \vec{Y}', \vec{Z} \rangle + \langle \vec{Y}, \vec{Z}' \rangle \\ (\vec{Y} \times \vec{Z})' &= \vec{Y}' \times \vec{Z} + \vec{Y} \times \vec{Z}' \text{ pe } \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Penultima formulă arată că dacă $\langle \vec{Y}, \vec{Z} \rangle = \text{constant}$, atunci

$$\langle \vec{Y}', \vec{Z} \rangle + \langle \vec{Y}, \vec{Z}' \rangle = 0.$$

În particular, dacă \vec{Y} are lungimea constantă, atunci \vec{Y} și \vec{Y}' sunt ortogonali în orice punct (fig.33). Într-adevăr relația $\|\vec{Y}\|^2 = \langle \vec{Y}, \vec{Y} \rangle = \text{constant}$, implică $\langle \vec{Y}, \vec{Y}' \rangle = 0$.

De aceea dacă ne imaginăm că α este traiectoria unui punct material ce se deplasează cu o viteză de modul constant, atunci accelerația este un câmp vectorial normal la α (dirijată după normala la curbă).

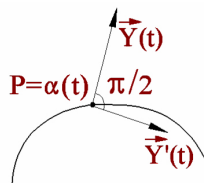


Fig. 33

3.3. Definiție. Un câmp \vec{Y} se numește *paralel* dacă coordonatele sale sunt constante (fig.34).

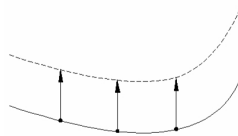


Fig. 34

3.4. Teoremă. Fie curba $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, unde I este un interval deschis din \mathbb{R} .

1) Curba α este constantă (se reduce la un punct) dacă și numai dacă câmpul viteză $\vec{\alpha}'$ este identic nul.

2) Curba neconstantă α este o dreaptă dacă și numai dacă câmpul accelerație este identic nul (câmpul viteză este paralel).

3) Un câmp \vec{Y} pe α este paralel dacă și numai dacă $\vec{Y}' = \vec{0}$.

Demonstrație. 1) Fie curba $\vec{\alpha}(t) = x_1(t)\vec{e}_1 + x_2(t)\vec{e}_2 + \dots + x_n(t)\vec{e}_n$. Dacă $x_1(t) = a_1, x_2(t) = a_2, \dots, x_n(t) = a_n, \forall t \in I$, atunci $\vec{\alpha}(t) = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \dots + a_n\vec{e}_n$ și $\vec{\alpha}'(t) = (0, 0, \dots, 0), \forall t$. Reciproc, din $\vec{\alpha}'(t) = \vec{0}, \forall t \in I$, rezultă $x'_1(t) = 0, x'_2(t) = 0, \dots, x'_n(t) = 0, \forall t \in I$ și deci $x_1(t) = a_1, x_2(t) = a_2, \dots, x_n(t) = a_n$.

2) Fie $\vec{\alpha}'(t) = (x_1^0 + l_1t)\vec{e}_2 + \dots + (x_n^0 + l_nt)\vec{e}_n$. Găsim $\vec{\alpha}(t) = l_1\vec{e}_1 + \dots + l_n\vec{e}_n$ și $\vec{\alpha}''(t) = (0, 0, \dots, 0)$. Reciproc, din $x''_1(t) = 0, x''_2(t) = 0, \dots, x''_n(t) = 0, \forall t \in I$, obținem $x_1 = x_1^0 + l_1t, x_2 = x_2^0 + l_2t, \dots, x_n = x_n^0 + l_nt$.

3) Fie $\vec{Y} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + \dots + b_n\vec{e}_n$. Rezultă $\vec{Y}' = (0, \dots, 0)$. Reciproc, din $\vec{Y}' = \vec{0}$, rezultă

$$\frac{dy_1}{dt} = 0, \frac{dy_2}{dt} = 0, \dots, \frac{dy_n}{dt} = 0, \forall t \in I,$$

sau $y_1 = b_1, y_2 = b_2, \dots, y_n = b_n$ (fig.34). □

7.4 Ramuri infinite

Fie I un interval deschis (a, b) , unde a poate fi și $-\infty$, iar b poate fi și $+\infty$ și $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ o curbă. Mulțimea $\alpha(I)$ poate fi mărginită sau nu în \mathbb{R}^n , dar în acest paragraf ne ocupăm numai de cazul în care $\alpha(I)$ este o mulțime nemărginită.

4.1. Definiție. Dacă într-o extremitate t_0 a intervalului deschis I avem $\lim_{t \rightarrow t_0} \|\vec{\alpha}(t)\| = \infty$, atunci spunem că α posedă o *ramură infinită*. Este evident că α posedă o ramură infinită în extremitatea t_0 dacă și numai dacă cel puțin una dintre coordonatele lui α tinde către $\pm\infty$ pentru $t \rightarrow t_0$ (adică mulțimea $\alpha(I)$ nu este mărginită în \mathbb{R}^n).

4.2. Definiție. Fie α o curbă care posedă o ramură infinită pentru o extremitate t_0 a lui I și $P = \alpha(t)$. Dreapta D se numește *asimptotă* la ramura infinită dacă (fig.35)

$$\lim_{t \rightarrow t_0} d(P; D) = 0,$$

unde $d(P; D)$ este distanța de la punctul P la dreapta D .

Uneori se spune că ramura infinită se apropie asimptotic de D . De asemenea, observăm că proprietatea $\lim_{t \rightarrow t_0} d(P; D) = 0$ care definește asimptota D este echivalentă cu a spune că paralela dusă prin $P = \alpha(t)$ la D tinde către D pentru $t \rightarrow t_0$ (fig.35).

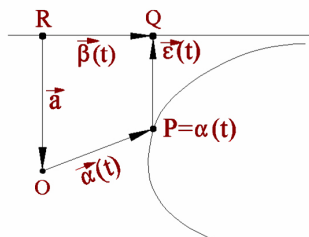


Fig. 35

4.4. Teoremă. Dacă D este o asimptotă a unei ramuri infinite, atunci direcția lui D este dată de versorul

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\vec{\alpha}(t)}{\|\vec{\alpha}(t)\|}.$$

Demonstrație. Fie α o curbă care posedă o ramură infinită într-o extremitate t_0 a lui I . Presupunem că această ramură posedă o asimptotă D (fig.35). Notăm cu Q proiecția lui P pe D și punem $\overline{PQ} = \bar{\varepsilon}(t)$. Prin ipoteză avem

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \|\bar{\varepsilon}(t)\| = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} \bar{\varepsilon}(t) = \bar{0}.$$

De asemenea notăm cu R proiecția originii O a spațiului \mathbb{R}^n pe D și punem $\overline{RO} = \bar{a}$. Segmentul orientat \overline{RQ} reprezintă pe $\bar{\beta}(t) = \bar{a} + \bar{\alpha}(t) + \bar{\varepsilon}(t)$ și

$$\|\bar{\beta}(t)\| - \|\bar{a} + \bar{\varepsilon}(t)\| \leq \|\bar{\alpha}(t)\| \leq \|\bar{\beta}(t)\| + \|\bar{a} + \bar{\varepsilon}(t)\|.$$

Astfel din $\lim_{t \rightarrow t_0} \|\bar{\alpha}(t)\| = \infty$ rezultă $\lim_{t \rightarrow t_0} \|\bar{\beta}(t)\| = \infty$. Aceasta înseamnă că în vecinătatea lui t_0 avem $\|\bar{\beta}(t)\| > 0$ și deci putem construi versorul $\frac{\bar{\beta}(t)}{\|\bar{\beta}(t)\|}$.

Dacă în inegalitățile anterioare împărțim cu $\|\bar{\beta}(t)\|$ și trecem la limită, atunci găsim

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\|\bar{\alpha}(t)\|}{\|\bar{\beta}(t)\|} = 1.$$

Versorul asimptotei D este

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\bar{\beta}(t)}{\|\bar{\beta}(t)\|} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\bar{\beta}(t)}{\|\bar{\alpha}(t)\|} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\bar{\alpha}(t) + \bar{a} + \bar{\varepsilon}(t)}{\|\bar{\alpha}(t)\|} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\bar{\alpha}(t)}{\|\bar{\alpha}(t)\|}.$$

Din unicitatea limitei rezultă că dacă asimptota există, atunci ea este unică.

4.5. Definiție. Versorul

$$\vec{u} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\bar{\alpha}(t)}{\|\bar{\alpha}(t)\|},$$

(în caz că limita există se numește *direcția asimptotică* a ramurii infinite a lui α).

4.6. Observații.

1) Studiul anterior arată că pentru a decide dacă o ramură infinită posedă o asimptotă trebuie mai întâi să vedem dacă ea admite o direcție asimptotică.

Dacă ramura nu admite o direcție asimptotică, atunci ea nu admite nici asimptotă.

Dacă ramura admite o direcție asimptotică \vec{u} , atunci prin $P = \alpha(t)$, se duce o dreaptă D_P care are direcția \vec{u} . Dacă D_P are o limită D pentru $t \rightarrow t_0$, atunci dreapta D este asimptota ramurii considerate. Dacă D_P nu are o limită pentru $t \rightarrow t_0$, atunci ramura infinită studiată nu are asimptotă.

Dacă α este o curbă regulată având o ramură infinită ce admite asimptotă, atunci asimptota este limita tangentei.

2) Pentru studiul ramurilor infinite ale curbelor plane $C : f(x, y) = a$ recomandăm lucrarea [20].

3) Fie $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ o curbă și t_0 o extremitate a intervalului deschis I . Dacă

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t) = A,$$

atunci A se numește *punct asimptotic* al curbei α . Punctele asimptotice pot să aparțină sau nu imaginii $\alpha(I)$.

4.7. Exemple.

1) Să cercetăm ramurile infinite ale *foliului lui Descartes*,

$$\alpha = (x, y) : (-\infty, -1) \cup (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3},$$

unde $a > 0$ este fixat. Pentru aceasta calculăm limitele:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) &= 0, & \lim_{t \nearrow -1} x(t) &= \infty, & \lim_{t \searrow -1} x(t) &= -\infty. \\ \lim_{t \rightarrow \pm\infty} y(t) &= 0, & \lim_{t \nearrow -1} y(t) &= -\infty, & \lim_{t \searrow -1} y(t) &= \infty. \end{aligned}$$

De aici rezultă că $O(0,0)$ este un punct asimptotic al curbei care este efectiv atins pentru $t = 0$. De asemenea pentru $t \rightarrow -1$ se obțin două ramuri infinite. Deoarece

$$\lim_{t \rightarrow -1} \frac{y(t)}{x(t)} = -1,$$

deducem că ambele ramuri infinite admit aceeași direcție asimptotică $(1, -1)$. Pe de altă parte

$$\lim_{t \leftarrow -1} (y(t) - x(t)) = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{3at}{t^2 - t + 1} = -a$$

și astfel avem asimptota oblică $y + x + a = 0$ (fig.36).

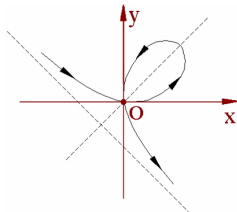


Fig. 36

2) Să cercetăm ramurile infinite ale elicei (fig.19), $\alpha = (x, y, z) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$. Deoarece $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} z(t) = \mp\infty$, rezultă că elicea admite două ramuri infinite. Ambele ramuri au direcția asimptotică $(0, 0, 1)$, direcția axei Oz , întrucât

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{x(t)}{z(t)} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{y(t)}{z(t)} = 0.$$

Evident, dreapta ce trece prin punctul $(a \cos t, a \sin t, bt)$ și este paralelă cu Oz nu admite o poziție limită pentru $t \rightarrow \pm\infty$. De aceea cele două ramuri infinite ale elicei nu admit asimptote.

7.5 Abscisa curbilinie

Fiind dată o curbă $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ putem construi alte curbe care au aceeași imagine cu α dar care parcurg această imagine cu viteze diferite.

5.1. Definiție. Fie I, J două intervale deschise ale dreptei reale, $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ o curbă și $h : J \rightarrow I$ o funcție diferentiabilă. Funcția compusă $\beta = \alpha \circ h : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ este o curbă care se numește *reparametrizarea lui α prin h* (fig.37).

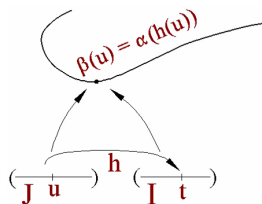


Fig. 37

În orice moment u din intervalul J , curba β este localizată în punctul $\beta(u) = \alpha(h(u))$, care este atins de curba α la momentul $h(u)$ din intervalul I . Astfel β și α urmează aceeași traiectorie dar, în general, cu viteze diferite. Practic, pentru a obține coordonatele lui β se substituie $t = h(u)$ în coordonatele lui α .

Observăm că trecerea de la α la β păstrează multiplicitatea punctelor lui $\alpha(I)$ dacă și numai dacă h este o bijecție.

5.2. Exemple

1) Fie arcul de cerc $\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t)$, $t \in (0, 2\pi)$. Punând $u = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}$ găsim reparametrizarea

$$\beta(u) = \left(r \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}, r \frac{2u}{u^2 + 1} \right), \quad u \in \mathbb{R}.$$

2) Fie curba

$$\alpha(t) = (2 \cos^2 t, \sin 2t, 2 \sin t), \quad t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Observăm că α se obține intersectând cilindrul $(x-1)^2 + y^2 = 1$ cu sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ (fig.38).

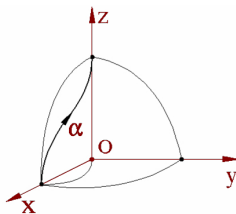


Fig. 38

Punem $u = \sin t$. Reparametrizarea lui α prin u este

$$\beta(u) = (2(1 - u^2), 2u\sqrt{1 - u^2}, 2u), \quad u \in (0, 1).$$

5.3. Lemă . Dacă β este reparametrizarea lui α prin h , atunci

$$\frac{d\vec{\beta}}{du}(u) = \frac{d\vec{\alpha}}{dh}(h(u)) \frac{dh}{du}(u).$$

Pe scurt, $\vec{\beta}' = (\vec{\alpha}' \circ h)h'$. Astfel observăm că dacă h' nu se anulează, atunci punctele regulate ale lui α sunt puncte regulate pentru β , iar punctele singulare ale lui α sunt puncte singulare de același fel pentru β . De asemenea rezultă că definiția tangentei într-un punct regulat ca și într-un punct singular de ordinul m nu depinde de parametrul ales (direcția ei rămâne invariantă, iar punctul prin care trece este fix).

Pentru ca bijecția $h : J \rightarrow I$ să fie un difeomorfism este necesar și suficient ca derivata h' să nu se anuleze; acest lucru rezultă din proprietățile de existență și de diferențiabilitate ale funcțiilor

inverse (se știe : $(h^{-1})' = \frac{1}{h' \circ h^{-1}}$). Dacă h este un difeomorfism, atunci curbele α și β se numesc *echivalente*.

Precizăm că dacă $h' > 0$, atunci h păstrează orientarea.

Fie $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ o curbă regulată dată prin ecuația vectorială $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(t)$, $t \in I$, \widehat{AB} un arc regulat al curbei, corespunzător lui $t \in [a, b] \subseteq I$ și $\vec{\alpha}'(t)$ vectorul viteză la momentul t . Lungimea $v(t) = \|\vec{\alpha}'(t)\|$ se numește *viteza curbei* la momentul t . Se consideră o diviziune a intervalului $[a, b]$:

$$d : a = t_0 < t_1 < \dots < t_{i-1} < t_i < \dots < t_n = b.$$

Punctele $M_0 = A, M_1, \dots, M_{i-1}, M_i, \dots, M_n = B$ corespunzătoare acestei diviziuni determină o linie poligonală cu vârfurile pe acest arc, care se numește *linie poligonală înscrisă în arcul \widehat{AB}* .

Înlocuind diviziunea d cu una mai fină se va obține o linie poligonală cu o lungime mai mare.

5.4. Arcul de curbă \widehat{AB} se numește *rectificabil* dacă mulțimea lungimilor liniilor poligonale înscrise în acest arc este mărginită superior, iar marginea sa superioară se numește *lungimea arcului*.

În fizică, distanța parcursă de un mobil este determinată prin integrarea vitezei sale în raport cu timpul. Geometric, definim *lungimea arcului curbei regulate α* de la $t = a$ la $t = b$ ca fiind numărul

$$\ell = \int_a^b v(t) dt, \quad a < b,$$

iar *elementul de arc* prin $ds = v(t) dt$.

Există probleme în care ne interesează numai imaginea curbei și nu ne interesează viteza cu care punctul curent parcurge această imagine. Cu alte cuvinte ne interesează imaginea din spațiul \mathbb{R}^n și nu parametrizarea particulară $t \rightarrow \alpha(t)$ care reprezintă această imagine. În asemenea probleme se obișnuiește ca α să se înlocuiască printr-o parametrizare echivalentă β pentru care viteza să fie egală cu unitatea.

5.5. Teoremă. Dacă $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ este o curbă regulată, atunci există o reparametrizare β echivalentă cu α astfel încât β să aibă viteza unu.

Curba β din teoremă se numește *reprezentare normală* a lui α .

Demonstrație. Fie $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ o curbă regulată, adică $\vec{\alpha}'(t) \neq \vec{0}$, $\forall t \in I$. Fixăm $t_0 \in I$ și considerăm funcția care dă lungimea arcului

$$s : I \rightarrow J = s(I), \quad s(t) = \int_{t_0}^t \|\vec{\alpha}'(t)\| dt.$$

Această funcție se numește *abscisa curbilinie* sau *parametru natural* (fig.39).

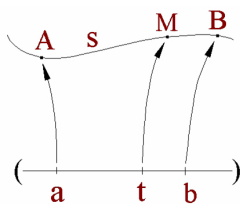


Fig. 39

Observăm că $\frac{ds}{dt} = \|\vec{\alpha}'(t)\| > 0$, adică s este strict crescătoare și deci bijectivă; teorema funcției inverse asigură că funcția inversă $s^{-1} : J \rightarrow I$ definită prin $t = t(s)$ are derivata

$$\frac{dt}{ds}(s) = \frac{1}{\frac{ds}{dt}(t(s))} > 0.$$

Mai mult, inversa $t = t(s)$ este un difeomorfism. De aceea, funcția compusă $\beta = \alpha \circ s^{-1} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ sau $\beta(s) = \alpha(t(s))$ este o reparametrizare a lui α , prin funcția $t = t(s)$, echivalentă cu α (vezi fig.37 pentru $u = s$). Să arătăm că viteza lui β este unu. Avem

$$\left\| \frac{d\vec{\beta}}{ds} \right\| = \left\| \frac{d\vec{\alpha}}{dt} \frac{dt}{ds} \right\| = \|\vec{\alpha}'(s)\| \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = 1.$$

Astfel abscisa curbilinie a unei curbe regulate se utilizează pentru obținerea unei reparametrizări de viteză unu. Precizăm că dacă α este o curbă orientată, atunci prin trecerea la reprezentarea normală orientarea nu se schimbă deoarece $\frac{dt}{ds} > 0$.

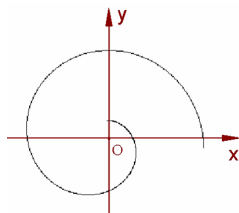


Fig. 40

5.6. Exemple.

1) Fie spirala logaritmică (fig.40)

$$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \alpha(t) = (ae^{-t}(\cos t - \sin t), ae^{-t}(\cos t + \sin t)), \quad a > 0.$$

Din $\vec{\alpha}'(t) = -2ae^{-t} \cos t \vec{i} - 2ae^{-t} \sin t \vec{j}$, rezultă că α este o curbă regulată cu viteza $v(t) = 2ae^{-t}$. Dacă fixăm $t = 0$, atunci abscisa curbilinie este dată de

$$s = \int_0^t v(t) dt = -2ae^{-t} \Big|_0^t = 2a(1 - e^{-t}).$$

De aici găsim $t = \ln \frac{2a}{2a-s}$, $s \in (-\infty, 2a)$ și astfel reprezentarea normală a lui α este

$$\beta : (-\infty, 2a) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \beta(s) = (x(s), y(s)),$$

unde

$$\begin{cases} x(s) = \frac{2a-s}{2} \left(\cos \ln \frac{2a}{2a-s} - \sin \ln \frac{2a}{2a-s} \right), \\ y(s) = \frac{2a-s}{2} \left(\cos \ln \frac{2a}{2a-s} + \sin \ln \frac{2a}{2a-s} \right). \end{cases}$$

2) Să considerăm acum elicea $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$. Deoarece ecuația vectorială a curbei este $\vec{\alpha}(t) = a \cos t \vec{i} + a \sin t \vec{j} + bt \vec{k}$, găsim $\vec{\alpha}'(t) = -a \sin t \vec{i} + a \cos t \vec{j} + b \vec{k}$ și deci $\|\vec{\alpha}'(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2} = c$. Dacă măsurăm lungimea arcului de la $t = 0$, atunci

$$s = \int_0^t c dt = ct.$$

Astfel $t = \frac{s}{c}$ și reprezentarea normală a elicei este

$$\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \beta(s) = \alpha\left(\frac{s}{c}\right) = \left(a \cos \frac{s}{c}, a \sin \frac{s}{c}, \frac{bs}{c}\right).$$

7.6 Probleme propuse

1. Fie curba $\alpha : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^4$, $\alpha(t) = (\sin t, \cos^2 t, 5 \sin t, 1 - 3 \cos^2 t)$. Să se arate că α este închisă, iar prelungirea ei $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ este periodică.

2. Fie curba $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$, $\alpha(t) = (\sin t, 1 + \cos^2 t, \sin t + \cos^2 t, \sin^2 t)$. Să se arate că punctul $\alpha\left(\frac{\pi}{4}\right)$ este regulat, iar tangenta la curbă în acest punct este perpendiculară pe dreapta de direcție $\vec{d} = (1, 1, -\sqrt{2} - 2, -1)$. Să se determine hiperplanul normal la α în punctul $\alpha\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

3. Fie \vec{Y} un câmp vectorial pe curba $\alpha(t) = (\sin t, 1 + \cos t, \sin t + \cos^2 t, \sin^2 t)$. În fiecare dintre cazurile următoare, să se exprime \vec{Y} în forma $\vec{Y} = y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + y_3 \vec{e}_3 + y_4 \vec{e}_4$.

1) $\vec{Y}(t)$ este vectorul de origine în $\alpha(t)$ și cu extremitatea în originea lui \mathbb{R}^4 .

2) $\vec{Y}(t) = \vec{\alpha}'(t) - \vec{\alpha}''(t)$.

3) $\vec{Y}(t)$ are lungimea unu și este perpendicular pe $\vec{\alpha}'(t)$, $\vec{\alpha}''(t)$ și pe $\vec{\alpha}'''(t)$.

4) \vec{Y} este vectorul cu originea în $\alpha(t)$ și cu extremitatea în $\alpha(t + \pi)$.

4. Să se cerceteze ramurile infinite și să se determine asimptotele curbelor (dacă există)

1) $\alpha = (x, y) : (\mathbb{R} \setminus \{1\}) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $x(t) = \frac{t^3 + 2}{t^3 - 1}$, $y(t) = \frac{3t}{t^3 - 1}$;

2) $\alpha = (x, y) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $x(t) = \frac{2 + t^2}{1 + t^2}$, $y(t) = \frac{t^3}{1 + t^2}$.

5. Considerăm curba

$$\alpha = (\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}) \rightarrow \mathbb{R}^5, \quad \alpha(t) = \left(\frac{1}{t-1}, \frac{2t}{t^2-1}, \frac{t^2+1}{t^2-1}, \frac{2}{t+1}, \frac{t}{t+1}\right).$$

a) Să se arate că punctul $(-1, 0, -1, 2, 0)$ se află pe curbă și să se determine tangenta și hiperplanul normal la curbă în acest punct.

b) Să se cerceteze ramurile infinite ale curbei și să se determine asimptotele (dacă acestea există)

Capitolul 8

Curbe în \mathbb{R}^2

8.1 Tangenta și normala unei curbe plane

Raportăm planul la reperul natural și considerăm curba

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \alpha(t) = (x(t), y(t)).$$

Fie $P = \alpha(t)$ un punct regulat al curbei. Se știe (§2) că dreapta care trece prin P și are ca vector director pe $\vec{\alpha}'(t)$ se numește *tangenta* la curba α în P . Deoarece suntem în plan, hiperplanul normal se reduce la o dreaptă, numită *normala* curbei.

6.1. Definiție. Dreapta care trece prin punctul regulat $P = \alpha(t)$ și este perpendiculară pe $\vec{\alpha}'(t)$ se numește *normala curbei* în punctul P (fig.21). Într-un punct regulat fixat, $P = \alpha(t)$, tangenta și normala la curbă au respectiv ecuațiile:

$$\frac{x - x(t)}{x'(t)} = \frac{y - y(t)}{y'(t)},$$

$$(x - x(t))x'(t) + (y - y(t))y'(t) = 0.$$

Dacă $P = \alpha(t)$ este un punct singular de ordinul m , atunci dreapta care trece prin P și are ca vector director pe $\vec{\alpha}^{(m)}(t)$ se numește *tangenta* curbei în punctul P .

6.2. Definiție. Fie $P = \alpha(t)$ un punct singular de ordinul m pentru curba α . Dreapta care trece prin punctul P și este perpendiculară pe $\vec{\alpha}^{(m)}(t)$ se numește *normala curbei* în punctul P .

Într-un punct singular de ordinul m , $P = \alpha(t)$, tangenta și normala la curbă au respectiv ecuațiile

$$\frac{x - x(t)}{x^{(m)}(t)} = \frac{y - y(t)}{y^{(m)}(t)},$$

$$(x - x(t))x^{(m)}(t) + (y - y(t))y^{(m)}(t) = 0.$$

6.3. Observație. Segmentul de pe tangență (normală) determinat de punctul de pe curbă și de intersecția acestei tangente (normale) cu Ox , se numește *segment tangență (normală)*. Proiecția

acestui segment pe Ox se numește *subtangentă* (*subnormală*) (fig.41, PT-segment tangentă, PN-segment normală, ST-subtangentă, SN-subnormală).

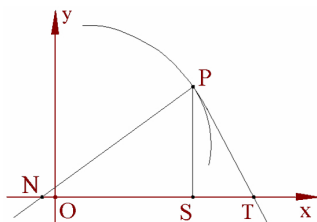


Fig. 41

8.2 Curbe definite prin ecuații carteziene implicite

Curbele plane pot fi introduse pornind de la funcții diferentiabile de tipul $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \rightarrow f(x, y)$. Deoarece

$$J(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right),$$

punctele critice ale funcției f (dacă există!) se află rezolvând sistemul:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Punctele în care cel puțin una dintre aceste derivate nu se anulează sunt puncte regulate.

Mulțimea

$$C = f^{-1}(c) = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = c, \quad c = \text{fixat}\}$$

se numește *mulțime de nivel constant c* sau *mulțime de ecuație carteziană implicită $f(x, y) = c$* . Pe scurt se scrie

$$C : f(x, y) = c.$$

Precizăm că în general C conține atât puncte regulate cât și puncte critice ale lui f .

Fie $(x_0, y_0) \in C$. Mulțimea tuturor punctelor din C a căror distanță față de (x_0, y_0) este mai mică decât un număr $\varepsilon > 0$ se numește *vecinătate* a lui (x_0, y_0) în C .

7.1. Teoremă. *Dacă o soluție (x_0, y_0) a ecuației $f(x, y) = c$ este un punct regulat al funcției f , atunci există o vecinătate a acestui punct în care ecuația $f(x, y) = c$ definește o curbă simplă și regulată (fig.42).*

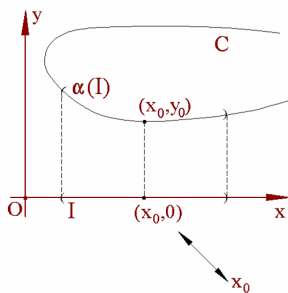


Fig. 42

Demonstrație. Se subînțelege că C nu este vidă. Ipoteza că $P(x_0, y_0)$ este un punct regulat asigură că în P , cel puțin una dintre derivatele $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ nu se anulează. Fie $\frac{\partial f}{\partial y}(P) \neq 0$. Teorema funcției implicite definită de o ecuație de forma $f(x, y) = c$ arată că există o vecinătate I a lui x_0 în \mathbb{R} și o funcție diferentiabilă $x \rightarrow y(x)$ astfel încât pentru orice $x \in I$ să avem

$$f(x, y(x)) = c, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Rezultă că porțiunea din C din vecinătatea punctului P este reprezentată de graficul funcției $x \rightarrow y(x)$ sau de imaginea aplicației $\alpha : I \rightarrow C$, $\alpha(t) = (t, y(t))$ și deci această porțiune este o curbă simplă și regulată.

În general, mulțimea $C \setminus \{\text{punctele critice ale lui } f\}$ constă din arce simple și regulate. Dacă mulțimea punctelor critice ale lui f care sunt incluse în C nu este prea ciudată, atunci $C : f(x, y) = c$ se numește *curbă de ecuație carteziană implicită* $f(x, y) = c$.

Dacă $f(x, y)$ este un polinom de gradul n , atunci curba C se numește *curbă algebrică de ordinul n* . În particular avem următoarele denumiri: *curbe algebrice de ordinul unu (drepte)*, *curbe algebrice de ordinul doi (conice)*, *curbe algebrice de ordinul trei (cubice)*, *curbe algebrice de ordinul patru (cuartice)* etc.

Reprezentarea analitică explicită a unei curbe plane este:

$$C : y = y(x), \quad x \in J \subseteq \mathbb{R} \quad (8.1)$$

7.2. Tangenta. Fie $P(x_0, y_0)$ un punct regulat al curbei C . Tangenta la curba C în punctul P are ecuația

$$(x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0,$$

iar normala la curba C în punctul P are ecuația

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}.$$

Pentru o curbă plană reprezentată explicit prin $C : y = y(x)$ tangenta în punctul regulat $P(x_0, y_0)$ are ecuația

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0),$$

iar normala în P este:

$$y - y_0 = \frac{-1}{y'(x_0)}(x - x_0).$$

7.3. Observații

1) În situații concrete curba C poate fi dată printr-o ecuație și prin inecuații în x, y care precizează o anumită porțiune din plan.

2) Reprezentarea curbei C (sau a unei porțiuni din C) în forma $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, se poate face prin intermediul teoremei 7.1 sau prin artificii de calcul.

Fie $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^2$ traiectoria unui punct material în mișcare și $f(x, y) = c$ ecuația carteziană implicită a lui $\alpha(I)$. Această ecuație nu descrie faptul că $\alpha(I)$ poate fi parcursă de mai multe ori.

De aceea în problemele în care drumul parcurs este esențial se preferă informația mai bogată dată de funcția

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

3) Fie curba $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. În general trecerea de la reprezentarea parametrică la reprezentarea carteziană explicită se poate face numai local. Într-adevăr, dacă $x'(t_0) \neq 0$ atunci teorema funcției inverse arată că în vecinătatea punctului $x_0 = x(t_0)$ restricția lui $x = x(t)$ admite inversa $t = t(x)$. Astfel restricția lui $y = y(t)$ apare ca o funcție compusă de tipul

$$y = y(t(x)).$$

4) În general dacă există o funcție f astfel încât

$$f(x(t), y(t)) = c, \quad \forall t \in I,$$

atunci $f(x, y) = c$ este ecuația carteziană implicită a curbei

$$\alpha(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in I.$$

5) Fie $C : f(x, y) = c$ o curbă regulată. Gradientul $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j}$, definit pe C , este un câmp vectorial normal la C .

7.4. Exemple.

1) Dreapta. Ecuația carteziană implicită a unei drepte din plan este $ax + by + c = 0$, iar ecuațiile parametrice ale unei drepte sunt $x = x_0 + lt$, $y = y_0 + mt$, $t \in \mathbb{R}$.

2) Cercul. Cercul de rază r și cu centrul în (x_0, y_0) are ecuația carteziană implicită $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$. Obișnuit cercul se reprezintă prin ecuațiile parametrice $x = x_0 + r \cos t$, $y = y_0 + r \sin t$, $t \in [0, 2\pi)$.

3) Elipsa are ecuația carteziană implicită (canonică) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. Ea se poate parametriza în forma $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $t \in [0, 2\pi)$.

4) Hiperbola are ecuația carteziană implicită (canonică) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. Ramura din dreapta a hiperbolei se poate reprezenta prin

$$x = a \cosh t, y = b \sinh t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

5) Parabola are ecuația carteziană (canonică) $x = \frac{y^2}{2p}$. De aceea ea se poate parametriza în forma

$$x = \frac{t^2}{2p}, y = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

8.3 Forma unei curbe în vecinătatea unui punct al său

Fie curba $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ și P un punct din $\alpha(I)$. Mulțimea tuturor punctelor din $\alpha(I)$ a căror distanță față de P este mai mică decât un număr $\varepsilon > 0$ se numește *vecinătate* a lui P în $\alpha(I)$.

Fie $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ o curbă din plan, ipoteză care va fi subînțeleasă în cele ce urmează. Considerăm un punct particular $P \in \alpha(I)$ așa ca $\alpha(t) = P$ și cercetăm care este aspectul curbei în vecinătatea lui P . În particular cercetăm care este poziția curbei în raport cu tangenta în acest punct.

Pentru un h din vecinătatea lui zero, punctul $Q = \alpha(t + h)$, $t + h \in I$, este în vecinătatea punctului P . De aceea putem folosi formula Taylor

$$\bar{\alpha}(t + h) = \bar{\alpha}(t) + \frac{h}{1!}\bar{\alpha}'(t) + \frac{h^2}{2!}\bar{\alpha}''(t) + \dots + \frac{h^n}{n!}[\bar{\alpha}^{(n)}(t) + \bar{\varepsilon}(h)]$$

cu $\lim_{h \rightarrow 0} \bar{\varepsilon}(h) = 0$. Evident, avem

$$\overline{PQ} = \bar{\alpha}(t + h) - \bar{\alpha}(t).$$

Vom face studiul urmărind două cazuri: cazul în care P este un punct *regulat* și cazul în care P este *singular*.

a) P este un punct *regulat*.

Prin ipoteză în P avem $\bar{\alpha}'(t) \neq \vec{0}$ și tangenta în P este definită de punctul P și de vectorul $\bar{\alpha}'(t)$.

8.1. Presupunem că $\bar{\alpha}'(t)$ și $\bar{\alpha}''(t)$ determină o bază în $T_P\mathbb{R}^2$. Formula Taylor de ordinul doi dă

$$\overline{PQ} = h\bar{\alpha}'(t) + \frac{h^2}{2}\bar{\alpha}''(t) + \frac{h^2}{2}\bar{\varepsilon}(h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \bar{\varepsilon}(h) = \vec{0}.$$

Astfel pentru $|h|$ suficient de mic, perechea $\left(h, \frac{h^2}{2}\right)$ constituie cu aproximație coordonatele vectorului \overline{PQ} față de baza $\bar{\alpha}'(t), \bar{\alpha}''(t)$. Dacă h trece prin zero, atunci prima coordonată își schimbă semnul, iar a doua și-l păstrează. De aceea arcul se află în semiplanul ce conține pe $\bar{\alpha}''(t)$ și traversează în P dreapta determinată de P și de $\bar{\alpha}''(t)$. Ținând cont că dreapta determinată de P și $\bar{\alpha}'(t)$ este tangenta la α în P , deducem că arcul are aspectul din fig.43.

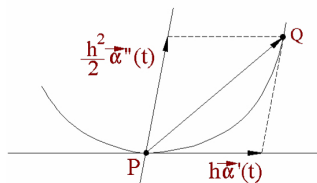


Fig. 43

8.2. Presupunem că $\bar{\alpha}''(t)$ este coliniar cu $\bar{\alpha}'(t)$ și că $\bar{\alpha}'(t)$ împreună cu $\bar{\alpha}'''(t)$ constituie o bază în $T_P\mathbb{R}^2$. Prin ipoteză $\exists r \in \mathbb{R}$ așa ca $\bar{\alpha}''(t) = r\bar{\alpha}'(t)$. Astfel formula Taylor de ordinul trei dă

$$\overline{PQ} = \left(h + r\frac{h^2}{2}\right)\bar{\alpha}'(t) + \frac{h^3}{6}\bar{\alpha}'''(t) + \frac{h^3}{6}\bar{\varepsilon}(h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \bar{\varepsilon}(h) = \vec{0}.$$

Pentru $|h|$ suficient de mic $h + r\frac{h^2}{2} \sim h$, iar $\left(h, \frac{h^3}{6}\right)$ constituie cu aproximație coordonatele lui \overline{PQ} în baza $\{\bar{\alpha}'(t), \bar{\alpha}'''(t)\}$. Dacă h trece prin zero, atunci ambele coordonate își schimbă semnul. De aceea, la trecerea prin P , punctul Q traversează și tangenta și dreapta definită de P și $\bar{\alpha}'''(t)$. Astfel, în vecinătatea lui P , curba are aspectul din fig.44, iar P se numește *punct de inflexiune*.

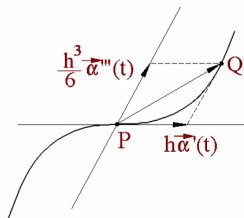


Fig. 44

8.3. Să generalizăm situațiile anterioare. Presupunem că derivatele de ordinele $2, 3, \dots, n-1$, sunt coliniare cu $\vec{\alpha}'(t)$, iar $\vec{\alpha}'(t)$ și $\vec{\alpha}^{(n)}(t)$ determină o bază în $T_P\mathbb{R}^2$.

Deoarece $\forall k, 1 < k < n, \exists r_k \in \mathbb{R}$ astfel încât $\vec{\alpha}^{(k)}(t) = r_k \vec{\alpha}'(t)$, formula Taylor de ordinul n dă

$$\overrightarrow{PQ} = \left(h + r_2 \frac{h^2}{2} + \dots + r_{n-1} \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} \right) \vec{\alpha}'(t) + \frac{h^n}{n!} \vec{\alpha}^{(n)}(t) + \frac{h^n}{n!} \vec{\varepsilon}(h),$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \vec{\varepsilon}(h) = \vec{0}.$$

De aceea pentru $|h|$ suficient de mic, perechea $\left(h, \frac{h^n}{n!} \right)$ realizează cu aproximație coordonatele lui \overrightarrow{PQ} în raport cu baza $\{ \vec{\alpha}'(t), \vec{\alpha}^{(n)}(t) \}$.

Rezultă că în vecinătatea lui P avem: dacă n este par, atunci curba are aspectul din fig.45; dacă n impar, atunci curba are aspectul din fig.44.

8.4. Observații.

1) Fie $P = \alpha(t)$ un punct regulat al unei curbe α . Dacă toate derivatele de ordinul $2, 3, \dots, n$ sunt coliniare cu $\vec{\alpha}'(t)$, în particular dacă toate sunt nule, atunci nu putem preciza poziția curbei în raport cu tangenta în P cu ajutorul acestor derivate. Tot ce putem spune este că în vecinătatea lui P abaterea curbei de la tangentă este mică.

2) Forma unei curbe $C : f(x, y) = c$ în vecinătatea unui punct regulat (x_0, y_0) este dată de forma graficului funcției $x \rightarrow y(x)$ în vecinătatea lui x_0 .

b) P este un punct singular

Prin ipoteză, în $P = \alpha(t)$ avem $\vec{\alpha}'(t) = \vec{0}$.

8.5. Presupunem că $\vec{\alpha}''(t)$ și $\vec{\alpha}'''(t)$ determină o bază în $T_P\mathbb{R}^2$. În acest caz tangenta este determinată de P și de $\vec{\alpha}''(t)$. Formula Taylor de ordinul trei arată că

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{h^2}{2} \vec{\alpha}''(t) + \frac{h^3}{6} \vec{\alpha}'''(t) + \frac{h^3}{6} \vec{\varepsilon}(h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \vec{\varepsilon}(h) = \vec{0}.$$

În vecinătatea lui $h = 0$, cuplul $\left(\frac{h^2}{2}, \frac{h^3}{6} \right)$ constituie cu aproximație coordonatele vectorului \overrightarrow{PQ} . Prima coordonată $\frac{h^2}{2}$ fiind pozitivă, arcul aparține semiplanului mărginit de dreapta definită de P și $\vec{\alpha}''(t)$ și care conține pe $\vec{\alpha}''(t)$. A doua coordonată $\frac{h^3}{6}$ își schimbă semnul când h trece prin zero. Astfel, în P , arcul traversează tangenta. Se zice că P este un *punct de întoarcere de prima speță* (fig.45).

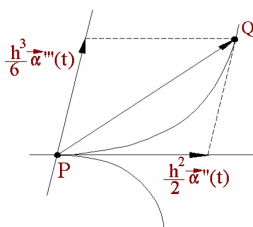


Fig. 45

8.6. Presupunem că $\vec{\alpha}'''(t)$ este colinar cu $\vec{\alpha}''(t)$ și că $\vec{\alpha}''(t)$ și $\vec{\alpha}^{(4)}(t)$ formează o bază în $T_P\mathbb{R}^2$. În acest caz tangenta în P este definită de P și de $\vec{\alpha}''(t)$. Deoarece prin ipoteză $\exists r \in \mathbb{R}$ așa ca $\vec{\alpha}'''(t) = r\vec{\alpha}''(t)$, formula Taylor de ordinul patru dă

$$\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{h^2}{2} + r\frac{h^3}{6} \right) \vec{\alpha}''(t) + \frac{h^4}{24} \vec{\alpha}^{(4)}(t) + \frac{h^4}{24} \vec{\varepsilon}(h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \vec{\varepsilon}(h) = \vec{0}.$$

Astfel pentru $|h|$ suficient de mic, perechea $\left(\frac{h^2}{2}, \frac{h^4}{24} \right)$ reprezintă cu aproximație coordonatele lui \overrightarrow{PQ} în raport cu baza $\vec{\alpha}''(t), \vec{\alpha}^{(4)}(t)$. Deoarece, ambele coordonate sunt pozitive, curba trebuie să arate ca în fig.46 (o ramură pentru h negativ, o ramură pentru h pozitiv). În acest caz se spune că P este un punct de întoarcere de speța a doua.

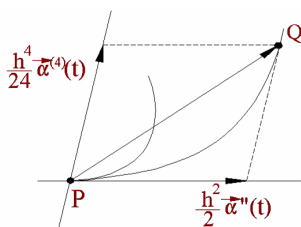


Fig. 46

8.7. Generalizând situațiile anterioare presupunem

$$\vec{\alpha}'(t) = \dots = \vec{\alpha}^{(m-1)}(t) = \vec{0}, \quad \vec{\alpha}^{(m)}(t) \neq \vec{0}.$$

De asemenea presupunem că derivatele de ordinul $m+1, m+2, \dots, n-1$ sunt coliniare cu $\vec{\alpha}^{(m)}(t)$ iar $\vec{\alpha}^{(m)}(t)$ împreună cu $\vec{\alpha}^{(n)}(t)$ determină o bază în $T_P\mathbb{R}^2$. Deoarece prin ipoteză, $\forall k, m < k < n$, $\exists r_k \in \mathbb{R}$ așa ca

$$\vec{\alpha}^{(k)}(t) = r_{k-m} \vec{\alpha}^{(m)}(t),$$

formula Taylor de ordinul n dă

$$\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{h^m}{m!} + r_1 \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} + \dots + r_{n-1} \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} \right) \vec{\alpha}^{(m)}(t) + \frac{h^n}{n!} [\vec{\alpha}^{(n)}(t) + \vec{\varepsilon}(h)],$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \vec{\varepsilon}(h) = \vec{0}.$$

Pentru $|h|$ suficient de mic, $\left(\frac{h^m}{m!}, \frac{h^n}{n!} \right)$ constituie cu aproximație coordonatele lui \overrightarrow{PQ} în baza aleasă de noi. De aceea situațiile din punctul singular P se pot rezuma în tabelul

m	n	Forma curbei
impar	par	figura 100
	impar	figura 101
par	impar	figura 102
	par	figura 103

8.8. Observații

1) Dacă în punctul singular P nu sunt îndeplinite condițiile din 8.7, atunci nu putem preciza care este forma curbei în vecinătatea acestui punct cu ajutorul accelerațiilor.

2) Fie mulțimea de nivel constant $C : f(x, y) = c$ și $(x_0, y_0) \in C$ un punct critic al lui f în care hessiana lui f nu este indic nulă. Dacă $\det d^2 f(x_0, y_0) > 0$, atunci (x_0, y_0) este un *punct izolat* în C (fig.47, a); dacă $\det d^2 f(x_0, y_0) < 0$, atunci (x_0, y_0) este un *punct dublu* pentru C (fig.47. b); dacă $\det d^2 f(x_0, y_0) = 0$, atunci (x_0, y_0) este un *punct de întoarcere* pentru C (fig.47, c). Într-un punct dublu sau de întoarcere direcțiile (l, m) ale tangentelor la C sunt date de

$$l^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2lm \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + m^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = 0.$$

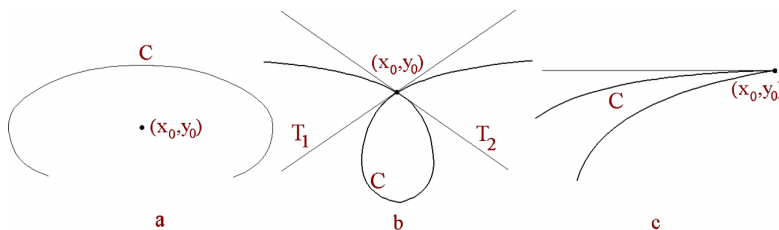


Fig. 47

Punctul izolat și punctul dublu în C sunt puncte critice izolate pentru f .

8.4 Trasarea curbelor plane

Fie $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ o curbă plană. Pentru a desena imaginea $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^2$ în raport cu reperul cartezian xOy este necesar să se urmărească următorii pași:

9.1. Stabilirea domeniului de definiție I , precizarea punctelor de acumulare ce nu aparțin lui I și calculul limitelor funcțiilor $t \rightarrow x(t)$, $t \rightarrow y(t)$ în aceste puncte. Precizarea punctelor asimptotice (dacă există!).

9.2. Intersecții cu axele.

9.3. Se cercetează simetriile lui $\alpha(I)$. Dacă $\forall t \in I$, $\exists t' \in I$ astfel încât (1) $x(t') = x(t)$, $y(t') = -y(t)$, (2) $x(t') = -x(t)$, $y(t') = y(t)$, (3) $x(t') = -x(t)$, $y(t') = -y(t)$, (4) $x(t') = y(t)$, $y(t') = x(t)$ etc, atunci curba este respectiv simetrică față de (1) axa Ox , (2) axa Oy , (3) origine, (4) prima bisectoare etc. Se observă că sistemele (1), (2), și (3) conțin ca un caz particular studiul parității și imparității funcțiilor $t \rightarrow x(t)$, $t \rightarrow y(t)$.

Dacă $\exists r \in \mathbb{R}$ astfel încât, $\forall t \in I$, punctul $\alpha(r-t)$ se deduce din $\alpha(t)$ printr-o simetrie (în raport cu un punct sau o dreaptă), atunci rezultă $t' = r - t$ ceea ce este echivalent cu $\frac{t+t'}{2} = \frac{r}{2}$. Astfel

t și t' sunt simetrice în \mathbb{R} față de $\frac{r}{2}$. În acest caz trasăm porțiunea din $\alpha(I)$ corespunzătoare lui $I \cap [r/2, \infty)$, iar restul se completează prin simetrie.

Dacă $\alpha\left(\frac{1}{t}\right)$ se duce din $\alpha(t)$ printr-o simetrie, atunci rezultă $t' = \frac{1}{t}$ sau $tt' = 1$. În acest caz trasăm porțiunea din $\alpha(I)$ corespunzătoare lui $I \cap ([-1, 0) \cup (0, 1])$, iar restul se completează prin simetrie.

9.4. Stabilirea punctelor regulate. Dintre punctele regulate trebuie precizate punctele de inflexiune și punctele în care $\vec{\alpha}^{(n)}$, $n = 2, 3, \dots$ sunt coliniari cu $\vec{\alpha}'$.

Stabilirea punctelor singulare (când există!) și a tangentelor în aceste puncte. Dintre acestea trebuie precizate punctele de inflexiune, punctele de întoarcere, punctele singulare de ordinul n în care $\vec{\alpha}^{(m)}$, $m = n + 1, n + 2, \dots$ sunt coliniari cu $\vec{\alpha}^{(n)} \neq \vec{0}$ și punctele singulare în care $\vec{\alpha}^{(k)} = \vec{0}$, $k = 1, 2, \dots$

9.5. Determinarea punctelor multiple și a tangentelor în aceste puncte. Dacă sistemul $t_1 \neq t_2$, $x(t_1) = x(t_2)$, $y(t_1) = y(t_2)$ este compatibil (determinat sau nedeterminat), atunci soluțiile sale dau punctele multiple. Dacă sistemul este incompatibil, atunci curba are numai puncte simple. Dacă cel puțin una dintre componentele funcției α este injectivă, atunci α este injectivă.

9.6. Se cercetează dacă α este o curbă periodică, adică $\exists T > 0$, $\alpha(t + T) = \alpha(t)$, $\forall t \in I$. Dacă α este periodică, de perioadă T , atunci este suficient să considerăm restricția $\alpha : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Din faptul că α este o curbă periodică rezultă că $t \rightarrow x(t)$, $t \rightarrow y(t)$ sunt periodice având eventual alte perioade decât α . Dacă $t \rightarrow x(t)$ este periodică și are perioada T_1 , $t \rightarrow y(t)$ este periodică și are perioada T_2 , iar $\frac{T_1}{T_2} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $p, q \in \mathbb{N}^*$, atunci α este periodică și are perioada $T = qT_1 = pT_2$.

9.7. Alcătuirea tabelului de variație pentru funcțiile $t \rightarrow x(t)$, $t \rightarrow y(t)$.

9.8. Stabilirea ramurilor infinite și a asimptotelor (dacă există!). Putem întâlni situațiile:

1) $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \pm\infty$, $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = b$. În acest caz asimptota are ecuația $y = b$. Pentru a decide poziția ramurii față de asimptotă, din tabel se citește semnul lui $y(t) - b$ în vecinătatea lui t_0 .

2) $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = a$, $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \pm\infty$. În acest caz asimptota are ecuația $x = a$.

3) $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \pm\infty$, $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \pm\infty$.

Dacă $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$, atunci $(1, 0)$ este direcție asimptotică. Curba nu admite asimptotă (ramură parabolică).

Dacă $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t)}{y(t)} = 0$, atunci $(0, 1)$ este direcție asimptotică. Curba nu admite asimptotă (ramură parabolică).

Dacă $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = m$, atunci $(1, m)$ este direcție asimptotică. Dacă, $\lim_{t \rightarrow t_0} (y(t) - mx(t)) = n$, atunci curba admite asimptotă $y = mx + n$. Dacă $\lim_{t \rightarrow t_0} (y(t) - mx(t)) = \pm\infty$, atunci curba nu admite asimptotă (ramura parabolică).

9.9. Exemplu

Curba de ecuație $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, $a > 0$, se numește *foliul lui Descartes*.

a) Să se găsească o reprezentare parametrică a curbei.

b) Să se construiască această curbă.

Soluție.

a) Axa Oy taie curba în origine. Intersectăm cu dreapta $y = tx$. Înlocuind în ecuația curbei obținem $x^2(x + t^3x - 3at) = 0$. Mai întâi avem $x^2 = 0$, ceea ce corespunde punctului dublu $(0, 0)$. Apoi, pentru $t \neq -1$, găsim

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

b) Pentru a construi curba, parcurgem următorii pași:

1) Domeniul de definiție. Simetrii. Se vede că $t \in (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$. În punctele de acumulare care nu fac parte din domeniul de definiție trebuie să calculăm limite. Astfel avem:

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = 0, \quad \lim_{t \nearrow -1} x(t) = \infty, \quad \lim_{t \searrow -1} x(t) = -\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} y(t) = 0, \quad \lim_{t \nearrow -1} y(t) = -\infty, \quad \lim_{t \searrow -1} y(t) = \infty.$$

Observăm că $O(0, 0)$ este punct asimptotic atât pentru $t \rightarrow \infty$ cât și pentru $t \rightarrow -\infty$. Acest punct se confundă cu punctul obișnuit $t = 0$.

Sistemul

$$\begin{cases} \frac{3at'}{1+t'^3} = \frac{3at^2}{1+t^3} \\ \frac{3at'^2}{1+t'^3} = \frac{3at}{1+t^3} \end{cases}$$

este compatibil nedeterminat deoarece este satisfăcut pentru orice t și t' din relația $tt' = 1$. Astfel curba este simetrică față de prima bisectoare. De aceea este suficient să construim porțiunea $t \in (-1, 0) \cup (0, 1]$, iar restul să completăm prin simetrie.

2) Puncte regulate. Puncte singulare. Avem

$$x' = \frac{3a - 6at^3}{(1+t^3)^2}, \quad y' = \frac{6at - 3at^4}{(1+t^3)^2}.$$

Din $x' = 0$ găsim $t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Din $y' = 0$ deducem $t_1 = 0$, $t_2 = \sqrt[3]{2}$. Aceasta înseamnă că foliul lui Descartes este o curbă regulată.

3) Puncte multiple.

Având în vedere semnificația lui t (panta unei drepte), $t \rightarrow -\infty$ și $t \rightarrow \infty$ dau același punct $(0, 0)$ pe curbă (punct asimptotic) care corespunde intersecției curbei cu axa Oy ($x = 0$). Pe de altă parte $t = 0$ dă punctul $(0, 0)$. Astfel originea este punct dublu.

Sistemul

$$\begin{cases} t_1 \neq t_2 \\ \frac{3at_1}{1+t_1^3} = \frac{3at_2}{1+t_2^3} \\ \frac{3at_1^2}{1+t_1^3} = \frac{3at_2^2}{1+t_2^3} \end{cases}$$

arată că nu mai avem și alte puncte multiple.

Tangentele în $O(0, 0)$ sunt axele Ox și Oy .

4) Tabelul de variație pentru $x(t)$ și $y(t)$

	$-\infty$		-1		0		$1/\sqrt[3]{2}$		$\sqrt[3]{2}$		$+\infty$		
x'		$+$			$+$		0		$-$		$-$		
x	0	\nearrow	∞		$-\infty$	\nearrow	0	\nearrow	$a\sqrt[3]{4}$	\searrow	$a\sqrt[3]{2}$	\searrow	0
y'		$-$			$-$		0		$+$		$+$		0
y	0	\searrow	$-\infty$		∞	\searrow	0	\nearrow	$a\sqrt[3]{2}$	\nearrow	$a\sqrt[3]{4}$	\searrow	0

5) Ramuri infinite. Asimptote.

Pentru $t \nearrow -1$ și $t \searrow -1$ avem ramuri infinite. Deoarece

$$\lim_{t \rightarrow -1} \frac{y(t)}{x(t)} = -1,$$

rezultă că ambele ramuri infinite admit direcția asimptotică $(1, -1)$. Pe de altă parte

$$\lim_{t \rightarrow -1} (y(t) + x(t)) = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{3at}{1 + t^2 - t} = -a$$

și astfel avem asimptota oblică $y + x + a = 0$.

6) Trasarea curbei (fig.36).

8.5 Formule Frenet în plan

Fie $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\beta(s) = (x(s), y(s))$ o curbă cu viteza unu. *Versorul tangent* este $\vec{T}(s) = \vec{\beta}'(s) = (x'(s), y'(s))$, iar *versorul normal* $\vec{N}(s)$ este definit prin rotirea lui $\vec{T}(s)$ cu $\pi/2$ (fig.48). Astfel, $\vec{N}(s) = (-y'(s), x'(s))$ și apare reperul ortonormat mobil $\{\vec{T}, \vec{N}\}$ numit *reper Frenet*.

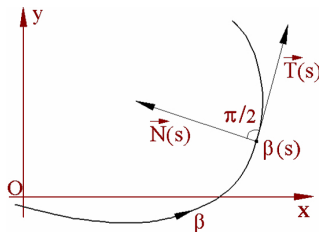


Fig. 48

Deoarece $\langle \vec{T}, \vec{T} \rangle = 1$, rezultă $\langle \vec{T}', \vec{T} \rangle = 0$ și deci $\vec{T}' = (x'', y'')$ este perpendicular pe \vec{T} . Cum avem și $\vec{N} \perp \vec{T}$ rezultă că \vec{T}' și \vec{N} sunt coliniari. Funcția $s \rightarrow k(s)$ definită prin ecuația Frenet (condiție de coliniaritate)

$$\vec{T}' = k\vec{N}$$

se numește *curbura* lui β . Pentru curbele din plan, $k(s)$ poate fi negativ, nul sau pozitiv și semnul său arată cum se încovoie $\beta(J)$.

10.1. Teoremă. Dacă $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ este o curbă cu viteza unu care are curbura k , atunci

a) sunt satisfăcute formulele Frenet: $\vec{T}' = k\vec{N}$, $\vec{N}' = -k\vec{T}$;

b) expresia curburii este $k = \frac{d\varphi}{ds}$, unde φ este unghiul care dă panta tangentei lui β în punctul curent.

Demonstrație. a) Exprimăm vectorul \vec{N}' în raport cu reperul ortonormat $\{\vec{T}, \vec{N}\}$, adică

$$\vec{N}' = (\vec{N}', \vec{T})\vec{T} + \langle \vec{N}', \vec{N} \rangle \vec{N}.$$

Derivând în $\langle \vec{N}, \vec{N} \rangle = 1$ găsim $\langle \vec{N}', \vec{N} \rangle = 0$ și derivând în $\langle \vec{N}, \vec{T} \rangle = 0$ deducem $\langle \vec{N}', \vec{T} \rangle = -\langle \vec{N}, \vec{T}' \rangle = -k$.

b) Folosim fig.49 și observația că $\vec{T} = \vec{i} \cos \varphi + \vec{j} \sin \varphi$ și deci $\vec{N} = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}$. Prin urmare $\vec{T}' = \frac{d\varphi}{ds} \vec{N}$, adică $k = \frac{d\varphi}{ds}$.

10.2. Teoremă. *Curbura k determină pe β abstractie făcând de poziția sa în plan (de o izometrie).*

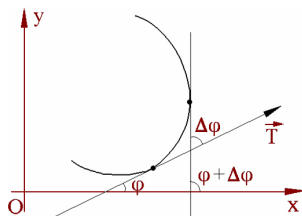


Fig. 49

Demonstrație. Ținând cont de teorema 10.1 avem

$$\frac{d\varphi}{ds} = k(s) \quad \text{și deci} \quad \varphi = \varphi_0 + \int_{s_0}^s k(s) ds,$$

unde φ_0 este unghiul pe care-l face tangenta la curba căutată în punctul $s = s_0$ cu axa Ox . Pe de altă parte

$$\frac{dx}{ds} = \cos \varphi, \quad \frac{dy}{ds} = \sin \varphi$$

și astfel

$$x = x_0 + \int_{s_0}^s \cos \varphi ds, \quad y = y_0 + \int_{s_0}^s \sin \varphi ds,$$

unde (x_0, y_0) este punctul corespunzător lui $s = s_0$.

Constantele φ_0, x_0, y_0 depind de alegerea axelor de coordonate. Notând

$$x' = \int_{s_0}^s \cos \psi ds, \quad y' = \int_{s_0}^s \sin \psi ds, \quad \psi = \int_{s_0}^s k(s) ds$$

observăm că

$$\begin{cases} x = x_0 + x' \cos \varphi_0 - y' \sin \varphi_0 \\ y = y_0 + x' \sin \varphi_0 + y' \cos \varphi_0 \end{cases}$$

și deci φ_0 determină o rotație, iar (x_0, y_0) determină o translație.

Dacă $\varphi_0 = 0$, $x_0 = y_0 = 0$, atunci punctul de la care se măsoară abscisele curbilunii coincide cu originea coordonatelor, iar sensul tangentei în acest punct coincide cu sensul lui Ox .

10.3. Teoremă. *Dacă $\vec{\alpha}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$ este o curbă regulată din plan, atunci curbura are expresia*

$$k = \frac{\langle \vec{\alpha}'', \mathcal{R}(\vec{\alpha}') \rangle}{\|\vec{\alpha}'\|^3} = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}},$$

unde am notat $\|w\| = \sqrt{\langle w, w \rangle}$ și \mathcal{R} este operatorul rotației de unghi $\frac{\pi}{2}$, adică $\mathcal{R}(t_1, t_2) = (-t_2, t_1)$, iar " ' " înseamnă derivata în raport cu t .

Funcția $\frac{1}{|k|} : I \setminus \{t \mid t \in I, k(t) = 0\} \rightarrow (0, \infty)$ se numește *rază de curbură*.

Demonstrație. Avem $\vec{\alpha}' = v\vec{T}$, $\mathcal{R}(\vec{\alpha}') = v\mathcal{R}(\vec{T}) = v\vec{N}$, $\vec{\alpha}'' = \frac{dv}{dt}\vec{T} + kv^2\vec{N}$ și deci $\langle \vec{\alpha}'', \mathcal{R}(\vec{\alpha}') \rangle = kv^3$. Evident am ținut seama că rotația este o funcție liniară. \square

Pentru o curbă plană $C : y = y(x)$, reprezentată explicit, curbura are expresia

$$k = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}.$$

8.6 Noțiuni de teoria contactului a două curbe

11.1. Teoremă. Curbele $\alpha_1 : y = f_1(x)$, $\alpha_2 : y = f_2(x)$ au în punctul comun $M_0(x_0, y_0)$ un contact de ordinul m dacă și numai dacă

$$\begin{aligned} f_1^{(k)}(x_0) &= f_2^{(k)}(x_0), \quad k = 0, 1, \dots, m, \\ f_1^{(m+1)}(x_0) &\neq f_2^{(m+1)}(x_0). \end{aligned}$$

Demonstrație. Curbele α_1 și α_2 au în M_0 un contact de ordinul m dacă și numai dacă ecuația $f_1(x) - f_2(x) = 0$ admite pe x_0 drept rădăcină multiplă de ordinul $m+1$, adică dacă și numai dacă

$$\begin{aligned} f_1^{(k)}(x_0) - f_2^{(k)}(x_0) &= 0, \quad k = 0, 1, \dots, m, \\ f_1^{(m+1)}(x_0) - f_2^{(m+1)}(x_0) &\neq 0. \end{aligned}$$

11.2. Teoremă. Curbele $\alpha_1 : x = x(t)$, $y = y(t)$, $C : f(x, y) = 0$ au în punctul comun regulat $t_0 \leftrightarrow M_0(x_0, y_0)$ un contact de ordinul m dacă și numai dacă funcția compusă $t \rightarrow \Phi(t) = f(x(t), y(t))$ satisface

$$\Phi^{(k)}(t_0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m; \quad \Phi^{(m+1)}(t_0) \neq 0.$$

Demonstrație. Putem presupune $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Atunci C este reprezentată într-o vecinătate a lui (x_0, y_0) de arcul simplu și regulat $\alpha : x = x, y = y(x)$, $x \in I$. Restrângând eventual pe I reparametrizăm pe α prin $x = x(t)$ și găsim $\alpha_2 : x = x(t), y = y(x(t)) = u(t)$.

Deoarece $f(x(t), u(t)) = 0$ este o identitate într-o vecinătate a lui t_0 , prin derivare deducem identitățile:

$$(*) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial u} \frac{du}{dt} \right)^{(k)} f(x(t), u(t)) = 0, \quad \forall k \geq 1.$$

În particular acestea sunt adevărate pentru $t = t_0$.

Presupunem că α_1 și α_2 au în $t_0 \leftrightarrow M_0(x_0, y_0)$ un contact de ordinul m , adică

$$(**) \quad \left. \frac{d^k y(t)}{dt^k} \right|_{t=t_0} = \left. \frac{d^k u(t)}{dt^k} \right|_{t=t_0}, \quad k = 0, 1, \dots, m,$$

$$\left. \frac{d^{m+1}y(t)}{dt^{m+1}} \right|_{t=t_0} \neq \left. \frac{d^{m+1}u(t)}{dt^{m+1}} \right|_{t=t_0} .$$

Din (***) și (*) rezultă că funcția $t \rightarrow \Phi(t) = f(x(t), y(t))$ satisface

$$(***) \quad \Phi^{(k)}(t_0) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right)^{(k)} f(x(t), y(t))|_{t=t_0} = 0$$

$$\Phi^{(m+1)}(t_0) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right)^{(m+1)} f(x(t), y(t))|_{t=t_0} \neq 0$$

Reciproc, relațiile (***) și (*) implică pe (**), adică α_1 și α_2 au în $t_0 \leftrightarrow M_0(x_0, y_0)$ un contact de ordinul m .

11.3. Curbe osculatoare. Fie $\alpha_1 : x = x(t), y = y(t), t \in I$ o curbă fixată și fie $C_a : f(x, y; a_1, a_2, \dots, a_{m+1}) = 0$ o familie de curbe care depind de $m + 1$ parametri sau de parametrul vector $a = (a_1, \dots, a_{m+1})$, unde f este o funcție diferentiabilă de $m + 3$ variabile.

Se pune problema să determinăm din familia C_a o curbă care să aibă cu α_1 , într-un punct regulat dat, un contact de ordinul m , adică $m + 1$ puncte confundate. Această curbă se numește *curbă osculatoare* a curbei α_1 .

Problema găsirii curbei osculatoare se rezolvă prin înlocuirea lui $x(t)$ și $y(t)$ în f , aplicarea teoremei 11.2 și găsirea celor $m + 1$ necunoscute a_i ce determină curba osculatoare. Dacă în punctul considerat curba obținută are cel puțin un contact de ordinul $m + 1$ cu α_1 , atunci ea se numește *supraoscultoare*.

Deoarece curba osculatoare a unei curbe α_1 este de fapt poziția limită a unei curbe din familia C_a care trece prin $m + 1$ puncte ale lui α_1 , atunci când aceste puncte tind de-a lungul lui α_1 către punctul dat inițial, putem afirma că:

a) dacă $m = 2k + 1$, atunci curba osculatoare nu traversează pe α_1 în punctul regulat M_0 (fig.50),

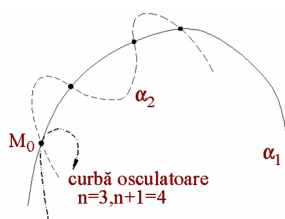


Fig. 50

b) dacă $m = 2k$, atunci curba osculatoare traversează pe α_1 în punctul regulat M_0 (fig.51).

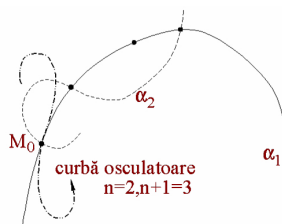


Fig. 51

11.4. Exemple.

1) **Dreaptă osculatoare.** Dreptele din plan $ax + by + c = 0$ formează o familie de curbe cu doi parametri esențiali. De aceea, fiind dată o curbă $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ se poate determina, într-unul din punctele sale regulate, fie o dreaptă osculatoare (contact ordinul întâi ~ 2 puncte confundate) fie o dreaptă supraosculatoare (de exemplu contact de ordinul al doilea ~ 3 puncte confundate) care este de fapt *tangenta* la curbă (fig.52). Pentru determinarea acestei drepte ne folosim de teorema 11.2, adică impunem condițiile

$$ax(t) + by(t) + c = 0$$

$$ax'(t) + by'(t) + c = 0.$$

Rezultă soluția (a, b, c) . În punctele singulare de ordin m ale lui α se găsesc drepte supraosculatoare. În punctele singulare de ordinul ∞ se găsește o dreaptă supraosculatoare pe care o putem numi *tangenta la curbă*.

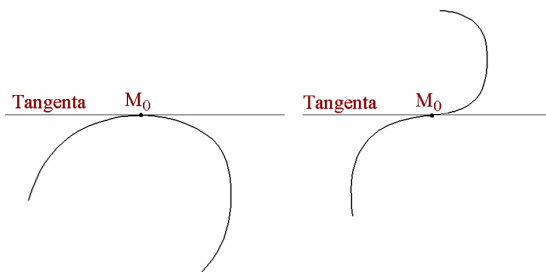


Fig. 52

2) **Cerc osculator.** Cercurile din plan, $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ sau $\|\vec{r} - \vec{c}\|^2 - R^2 = 0$, formează o familie de curbe cu trei parametri esențiali (coordonatele centrului și raza). Fiind dată o curbă $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ și un punct regulat pe ea se poate determina un *cerc osculator* (contact ordinul al doilea ~ 3 puncte confundate) sau un cerc supraosculator (de exemplu contact de ordinul al treilea ~ 4 puncte confundate). Pentru determinarea acestui cerc ne folosim de teorema 11.2 adică impunem condițiile:

$$\|\vec{\alpha} - \vec{c}\|^2 - R^2 = 0$$

$$\langle \vec{\alpha}', \vec{\alpha} - \vec{c} \rangle = 0$$

$$\langle \vec{\alpha}'', \vec{\alpha} - \vec{c} \rangle + \alpha'^2 = 0.$$

Ecuția a doua dă $\vec{c} = \vec{\alpha} + \lambda \vec{N}$, unde \vec{N} este câmpul normal unitar, iar ultima ecuație implică $\lambda = \frac{1}{k}$, unde k este curbura lui α . Ultimele două ecuații arată că în punctul $\alpha(t)$ în care lucrăm, accelerația $\vec{\alpha}''(t)$ nu poate fi coliniară cu viteza $\alpha'(t)$ căci dacă ar fi așa, atunci $\alpha(t)$ ar trebui să fie punct singular. Deci $k(t) \neq 0$. Centrul cercului osculator $\vec{c} = \vec{\alpha} + \frac{1}{k} \vec{N}$ se află pe \vec{N} și se numește *centrul de curbură*. Raza cercului osculator $R = \frac{1}{|k|}$ se obține din prima ecuație și se numește *raza de curbură* a lui α . Cercul osculator se mai numește și *cerc de curbură* (fig.53).

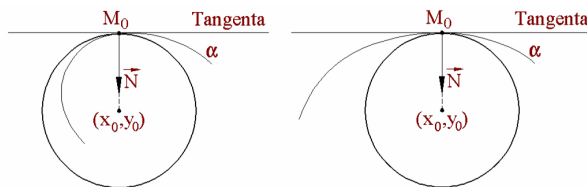


Fig. 53

Explicit, centrul cercului osculator este dat de formulele

$$x_0 = x - y' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}, \quad y_0 = y + x' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'},$$

iar raza cercului osculator este

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{|x'y'' - x''y'|}.$$

Curba $\gamma = \vec{\alpha} + \frac{1}{k} \vec{N}$, care este de fapt locul geometric al centrelor de curbură ale lui α , se numește *evoluta* sau *desfășurata* lui α .

3) Fie o curbă α și un punct regulat pe această curbă. În acest punct se poate determina o parabolă osculatoare care să aibă cu α un contact de ordinul trei; o elipsă sau hiperbolă osculatoare care să aibă cu α un contact de ordinul patru etc. Curbele osculatoare se folosesc în teoria aproximării.

Fie C_a o familie de curbe din plan reprezentată prin ecuația $f(x, y; a) = 0$, unde f este o funcție diferențiabilă în raport cu cele trei argumente.

11.5. Definiție. O curbă $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(a) = (x(a), y(a))$ se numește înfășurătoarea familiei C_a dacă satisface condițiile:

1) $\forall P \in \alpha(I)$ se poate indica o curbă unică a familiei care să conțină punctul P ca un punct regulat și care să aibă în P un contact de ordinul $n \geq 1$ cu $\alpha(I)$.

2) \forall curba din familia C_a , există un punct regulat P al său, care să aparțină și lui $\alpha(I)$ și în care cele două curbe să aibă un contact de ordinul $n \geq 1$.

3) Nici o curbă a familiei C_a să nu aibă un arc comun cu $\alpha(I)$.

Cu alte cuvinte, înfășurătoarea este curba la care sunt tangente curbele din familia C_a (fig.54).

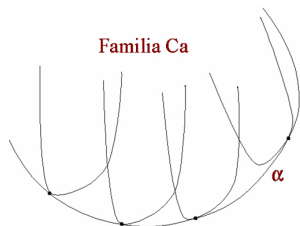


Fig. 54

11.6. Teoremă. Înfășurătoarea familiei C_a este inclusă în curba Γ definită prin sistemul

$$\begin{cases} f(x, y; a) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial a}(x, y; a) = 0. \end{cases}$$

Demonstrație. Fie ecuația (1) $f(x, y; a) = 0$ în necunoscuta a și parametrul $M(x, y)$. Locul geometric al punctelor $M(x, y)$ cu proprietatea că ecuația (1) are o rădăcină cel puțin dublă este curba Γ descrisă de sistemul

$$f(x, y; a) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial a}(x, y; a) = 0.$$

Fiecare curbă C_a este tangentă la curba Γ întrucât intersecția $C_a \cap \Gamma$ corespunde la rădăcina dublă a . De aceea curba Γ conține înfășurătoarea familiei de curbe C_a .

Curba Γ mai conține și punctele critice ale lui f . Într-adevăr dacă $x = x(a)$, $y = y(a)$ sunt ecuațiile parametrice ale lui Γ , atunci $f(x(a), y(a)) = 0$, $\forall a$.

Derivând rezultă identitatea

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{da} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{da} + \frac{\partial f}{\partial a} = 0.$$

11.7. Exemflu. Să se determine înfășurătoarea curbelor

$$C_a : f(x, y; a) = (y - a)^2 - (x - a^2)^3 = 0.$$

Soluție. Alcătuim sistemul

$$\begin{aligned} f(x, y; a) &= (y - a)^2 - (x - a^2)^3 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial a}(x, y; a) &= -2(y - a) + 6a(x - a^2)^2 = 0, \end{aligned}$$

care conduce la $y^2 - x = 0$, de unde rezultă

$$\alpha(a) = \left(\frac{9a^4 + 1}{9a^2}, \frac{27a^4 + 1}{27a^3} \right).$$

Observăm însă că punctele pentru care $y^2 - x = 0$ sunt puncte critice pentru familia C_a adică puncte în care avem

$$f(x, y; a) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y; a) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y; a) = 0.$$

De aceea numai curba α este înfășurătoarea familiei C_a .

11.8. Definiție. Înfășurătoarea normalelor unei curbe plane se numește *evoluta* curbei.

Fie o curbă C dată prin ecuațiile ei parametrice

$$C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in I \subseteq \mathbb{R}.$$

Normala în punctul curent, M , al curbei C are ecuația:

$$(x - x(t))x'(t) + (y - y(t))y'(t) = 0.$$

Atunci când punctul M parcurge curba, normalele la curbă formează o familie de drepte ce depinde de parametrul t . Sistemul de ecuații care determină înfășurătoarea normalelor curbei plane C este:

$$\begin{cases} (x - x(t))x'(t) + (y - y(t))y'(t) = 0 \\ (x - x(t))x''(t) + (y - y(t))y''(t) = x'^2(t) + y'^2(t). \end{cases} \quad (8.2)$$

Din acest sistem se obțin *ecuațiile parametrice ale evolutei* curbei C :

$$\begin{cases} x = x(t) - y'(t) \frac{x'^2(t) + y'^2(t)}{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)} \\ y = y(t) + x'(t) \frac{x'^2(t) + y'^2(t)}{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}. \end{cases} \quad (8.3)$$

11.9 Exemplu. Fie elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, cu ecuațiile parametrice: $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $t \in [0, 2\pi)$. Evoluta ei este astroida, reprezentată parametric prin ecuațiile:

$$C : \begin{cases} x = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t \\ y = -\frac{a^2 - b^2}{b} \sin^3 t \end{cases}$$

11.10. Definiție. Fie o curbă plană dată C . Curba Γ a cărei evolută este curba C se numește *evolventa* curbei C .

Fie curba C , parametrizată normal, prin ecuațiile:

$$C : \begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \end{cases}$$

și $P \in \Gamma$ punctul corespunzător punctului curent al curbei C , $M \in C$.

Tangenta în punctul M la curba C are ecuația:

$$\frac{x - x(s)}{x'(s)} = \frac{y - y(s)}{y'(s)} = \rho(s)$$

echivalente cu:

$$\begin{cases} x = x(s) + \rho(s)x'(s) \\ y = y(s) + \rho(s)y'(s). \end{cases} \quad (8.4)$$

Impunem condiția ca tangenta la curba C în punctul M să fie normala curbei Γ în punctul P , ceea ce implică

$$\frac{y'(s)}{x'(s)} = -\frac{(x(s) + \rho(s)x'(s))'}{(y(s) + \rho(s)y'(s))'} \Leftrightarrow (1 + \rho')(x'^2 + y'^2) + \rho(x'x'' + y'y'') = 0.$$

Dar

$$\vec{T}^2 = 1 \Rightarrow x'^2 + y'^2 = 1, x'x'' + y'y'' = 0.$$

Vom obține:

$$1 + \rho' = 0 \Rightarrow \rho' = -1 \Rightarrow \rho = -s + c, c = \text{const.}$$

Ecuațiile parametrice ale evolventei sunt:

$$\begin{cases} x = x(s) + (c - s)x'(s) \\ y = y(s) + (c - s)y'(s). \end{cases} \quad (8.5)$$

Constanta arbitrară k din ecuațiile evolventei indică faptul că unei curbe C îi corespund o infinitate de evolvente.

11.11. Exemplu. Fie cercul $x^2 + y^2 = a^2$, care are reprezentarea parametrică $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $t \in [0, 2\pi)$. Evolventele acestui cerc au reprezentarea parametrică

$$\vec{\alpha}(t) = a \cos t \vec{i} + a \sin t \vec{j} + (c - at)(-\sin t \vec{i} + \cos t \vec{j}).$$

8.7 Curbe plane în coordonate polare

12.1. Presupunem că planul xOy a fost raportat la un reper polar și că perechii (x, y) îi corespunde perechea (ρ, θ) . În această ipoteză, o curbă plană Γ mai poate fi dată și prin *ecuația polară*, $\rho = f(\theta)$.

12.2. Fie (ρ, θ) un punct al unei curbe date, diferit de pol. Unghiul V dintre tangenta în acest punct și raza vectoare corespunzătoare este dat de $\operatorname{tg} V = \frac{\rho}{\rho'}$. Dacă considerăm un reper cartezian adecvat XOY , unde OX este pe raza vectoare corespunzătoare punctului (ρ, θ) , iar OY este perpendiculară pe OX astfel încât XOY să fie un reper orientat pozitiv, atunci tangenta și normala în (ρ, θ) au respectiv ecuațiile (fig.55)

$$Y = \frac{\rho}{\rho'}(X - \rho) \quad \text{și} \quad \frac{\rho}{\rho'}Y + X - \rho = 0.$$

Subtangenta polară OT și subnormala polară ON au respectiv lungimile $\frac{\rho^2}{|\rho'|}$ și $|\rho'|$ (fig.55).

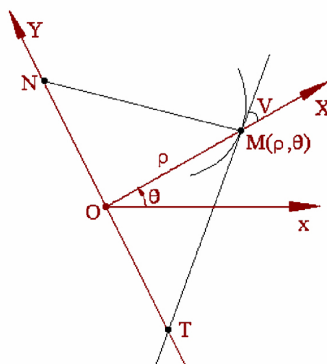


Fig. 55

Dacă curba considerată trece prin pol, atunci tangenta în pol face cu Ox unghiul θ_1 care anulează pe $\rho = f(\theta)$.

12.3. Punctele multiple ale unei curbe date prin ecuația polară $\rho = f(\theta)$ se găsesc rezolvând ecuațiile

$$f(\theta_1) = f(\theta_2 + 2k\pi), \quad f(\theta_1) = -f(\theta_2 + \pi + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

12.4. Alura curbei se stabilește cu ajutorul semnului curburii

$$k = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}.$$

Pentru $k < 0$ corespund punctele în vecinătatea cărora curba se încovoie în sens opus polului, pentru $k > 0$ corespund puncte în vecinătatea cărora curba se încovoie către pol, iar pentru $k = 0$ obținem de obicei puncte de inflexiune.

12.5. Punctele de acumulare θ_0 pentru care limita lui $\rho = f(\theta)$ este infinită, dau direcțiile asimptotice.

Fie θ_0 o direcție asimptotică. Notăm $d = \lim_{\theta \rightarrow \theta_0} f(\theta) \sin(\theta - \theta_0)$. Dacă d este finit, atunci curba admite o asimptotă D a cărei ordonată la origine este d (fig.56). Dacă $d = \infty$, atunci curba are o ramură parabolică.

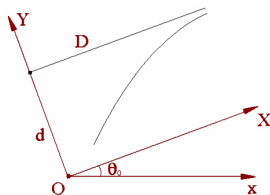


Fig. 56

12.6. Cerc asimptot, punct asimptot

Dacă există $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \rho(\theta) = a$ atunci cercul $\rho = a$ se numește cerc asimptot pentru curba dată.

Când $a = 0$ cercul asimptot se reduce la un punct și anume polul și în acest caz polul se numește punct asimptot.

12.7. Trasarea curbelor plane în coordonate polare

Pentru trasarea curbei $C : \rho = \rho(\theta)$ se urmăresc etapele:

1. Determinarea domeniului natural de definiție al funcției $\rho = \rho(\theta)$, dacă nu a fost precizat
2. Cercetarea periodicității funcției $\rho = \rho(\theta)$ și restrângerea domeniului la un interval de lungime egală cu perioada. În coordonate polare, după reprezentarea grafică pe o perioadă, se rotește graficul cu un multiplu de perioadă până se suprapune cu el însuși.
3. Cercetarea unor simetrii. Dacă $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$ sau $\rho(\pi - \theta) = -\rho(\theta)$ simetria este față de axa polară, $\rho(-\theta) = -\rho(\theta)$ sau $\rho(\pi - \theta) = \rho(\theta)$ simetrie față de perpendiculara în pol pe axa polară, dacă $\rho(\pi + \theta) = \rho(\theta)$ simetrie față de pol. După depistarea simetriilor se reduce corespunzător domeniul pe care trebuie făcut graficul.

4. Cercetarea funcției ρ . Studiul semnului primei derivate.

5. Studiul concavității cu ajutorul funcției $E = \rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''$.

6. Depistarea arcelor infinite și cercetarea existenței asimptotelor. Poziția față de asimptote; cercuri asimptote

7. Tabelul de variație al funcției ρ și semnul expresiei E și valorile funcției $tg v = \frac{\rho}{\rho'}$

8. Trasarea asimptotelor și a graficului curbei.

12.8. Exemplu

Să se traseze curba $\rho = \sqrt{\frac{\sin 3\theta}{\cos \theta}}$.

Vom urma pașii de mai sus

1. Funcția ρ este definită pe mulțimea $\frac{\sin 3\theta}{\cos \theta} \geq 0$, mai puțin punctele de tipul $\frac{(2k+1)\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, unde se anulează numitorul.

2. Numărătorul este periodic cu perioada $\frac{2\pi}{3}$, iar numitorul cu perioada 2π , deci fracția este periodică cu perioada 2π . Este suficient să se cerceteze domeniul pe $[0, 2\pi)$.

θ	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{4\pi}{3}$	2π								
$\sin 3\theta$	0	+	0	-	-	0	+	0	-	0	+	+	+	0	-	0	
$\cos \theta$	1	+	+	+	0	-	-	-	-	-	-	0	+	+	+	+	
$\frac{\sin 3\theta}{\cos \theta}$	0	+	0	-		+	0	-	0	+	0	-		+	0	-	0

Din tabel

$$\theta \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\pi, \frac{4\pi}{3}\right] \cup \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right].$$

3. Se observă $\rho(\theta + \pi) = \rho(\theta)$, prin urmare curba are o simetrie față de pol. Este suficient să facem graficul pentru $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$ și apoi să-l simetrizăm față de pol.

4. Pe domeniul considerat ρ este de clasă C^∞

$$\rho = \frac{2 \cos 3\theta \cos \theta + \cos 2\theta}{2\sqrt{\cos^3 \theta \sin 3\theta}}$$

$$\rho' = 0 \Leftrightarrow \cos 4\theta + 2 \cos 2\theta = 0 \Leftrightarrow \cos^2 2\theta + 2 \cos 2\theta - 1 = 0.$$

Această ecuație conduce la $\cos 2\theta = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$. În domeniul considerat este doar soluția $\cos 2\theta = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$, adică $\theta \simeq 34^\circ$.

5. Datorită calculurilor laborioase renunțăm la semnul funcției E .

6. Observăm că $\lim_{\rho \searrow \frac{\pi}{2}} \rho(\theta) = \infty$, deci $\theta = \frac{\pi}{2}$ este direcție asimptotică.

$$d = \lim_{\rho \searrow \frac{\pi}{2}} \rho(\theta) \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{\rho \searrow \frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\sin 3\theta}{\cos \theta}} \cos \theta = 0.$$

Deci semidreapta $\theta = \frac{\pi}{2}$ este asimptotă.

7. Cu datele obținute întocmim tabelul

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	34°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$					
ρ'	+	+	+	+	0	-	-	-	-	-	-	
ρ	0	\nearrow	$\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$	1,116	\searrow	1	\searrow	0		∞	\searrow	0
$\operatorname{tg} v = \frac{\rho}{\rho'}$	0		∞					0				0

Graficul este în figura de mai jos.

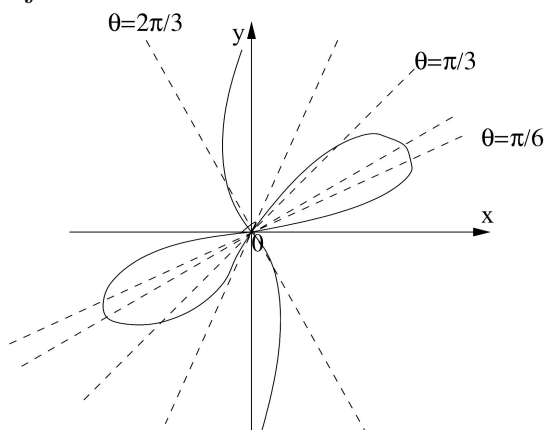


Fig. 57

8.8 Probleme propuse

1. Să se arate că

$$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \alpha(t) = \left(\frac{2+t^2}{1+t^2}, \frac{t^3}{1+t^2} \right)$$

este o curbă simplă. Să se determine punctele singulare ale curbei, tangentele și normalele în aceste puncte.

2. Curba descrisă de un punct M aflat pe un cerc de rază r ce se rostogolește (fără alunecare) de-a lungul unei drepte se numește *cicloidă*. Să se găsească ecuațiile parametrice ale cicloidei (fig.58). Să se determine abscisa curbilinie și lungimea primei arcade a curbei. Să se calculeze lungimile segmentelor tangentă, subtangentă, normală și subnormală într-un punct oarecare al cicloidei.

$$R : \begin{cases} x = r(t - \sin t) \\ y = r(1 - \cos t) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

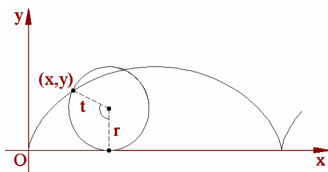


Fig. 58

3. Să se găsească o parametrizare globală pentru fiecare dintre următoarele curbe, orientate prin $\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$, unde f este funcția definită de membrul stâng al fiecărei ecuații:

- 1) $ax + by = c, \quad c \neq 0.$
- 2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0.$
- 3) $y - ax^2 = c, \quad a \neq 0.$
- 4) $x^2 - y^2 = 1, \quad x > 0.$

4. Fie curba

$$\alpha : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2, \alpha(t) = (2 \cos t - \cos 2t, 2 \sin t - \sin 2t).$$

Să se determine abscisa curbilinie corespunzătoare originii $t = 0$ și reprezentarea normală.

5. Să se arate că astroida $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \alpha(t) = (4r \cos^3 t, 4r \sin^3 t)$, (fig.59), are puncte de întoarcere și să se determine tangentele în aceste puncte.

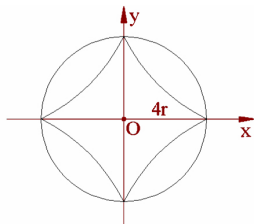


Fig. 59

6. Fie astroida $C = f^{-1}(0)$ unde $f(x, y) = y^2x + ay^2 + x^2 - ax^2$ (fig.60). Să se arate că originea este punct dublu pentru curbă. Să se determine tangentele la curbă în acest punct.

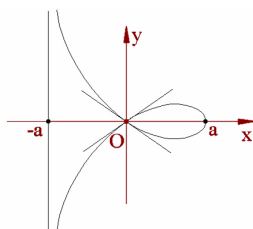


Fig. 60

7. Fie curba $C = f^{-1}(0)$, $f(x, y) = x^3 - x^2 - y^2$ (fig.61). Să se arate că originea este punct izolat al curbei C .

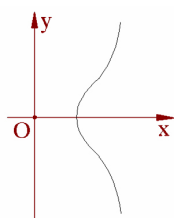


Fig. 61

8. Să se arate că originea este punct de întoarcere pentru curba cisoida lui Diocles $C = f^{-1}(0)$, $f(x, y) = x^3 + xy^2 - 2ay^2$ (fig.62).

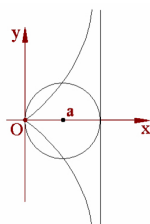


Fig. 62

9. Să se traseze următoarele curbe

- 1) Curba Gauss: $y = e^{-x^2}$ (fig.15).
- 2) Lănțișorul: $y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$ (fig.16).
- 3) Parabola cubică: $y = ax^3$ (fig.17).
- 4) Curba Agnesi: $x^2y = 4a^2(2a - y)$ (fig.63).

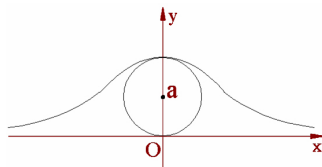


Fig. 63

- 5) Lemniscata Bernoulli: $(x^2 + y^2)^2 + 2a^2(y^2 - x^2) = 0$ (fig.64).

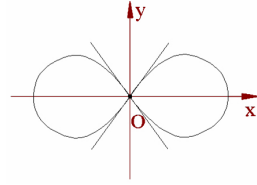


Fig. 64

6) Curba Lissajous: $x = \cos 2t$, $y = \sin 3t$ (fig.65).

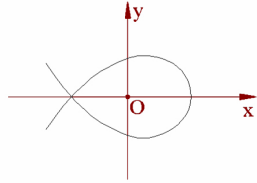


Fig. 65

7) $x = \frac{\text{cht}}{t}$, $y = \frac{\text{sh}t}{t}$, $t \neq 0$ (fig.66).

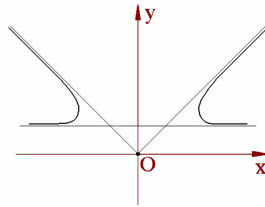


Fig. 66

8) $x = t - t^3$, $y = t^2 - t^4$ (fig.67).

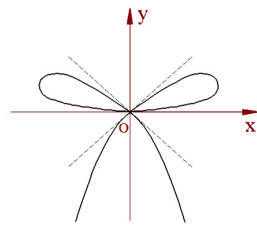


Fig. 67

10. Să se determine înfășurătoarea următoarelor familii de curbe:

1) $(x - a)^2 + y^2 - \frac{a^2}{2} = 0$.

2) $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - 1 = 0$, când $\alpha^m - \beta^m - a^m = 0$ ($a = \text{const.}$).

3) $x \cos a + y \sin a - 1 = 0$.

4) $y = ax + \frac{p}{2a}$.

11. Să se determine evoluta pentru fiecare curbă:

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$,

$$2) x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

12. Să se construiască curbele (rozete cu trei foi),

$$\rho = a \sin 3\theta, \quad \rho = a \cos 3\theta$$

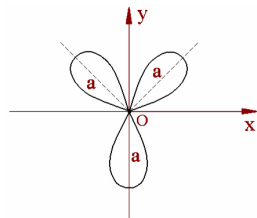


Fig. 68

Capitolul 9

Curbe în \mathbb{R}^3

9.1 Tangenta și planul normal al unei curbe în spațiu

Raportăm spațiul la reperul natural $\{O; \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}\} \equiv Oxyz$ și considerăm curba

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Curbele din spațiu se pot împărți în două categorii: *curbe strâmbе și curbe plane*.

O curbă din spațiu se numește *curbă plană* dacă $\forall t \in I, \exists a, b, c, d \in \mathbb{R}$ nu toți nuli, astfel încât $ax(t) + by(t) + cz(t) + d = 0$.

Fie $P = \alpha(t)$ un punct regulat al curbei. Se știe (§7) că dreapta care trece prin P și are ca vector director pe $\bar{\alpha}'(t)$ este *tangentă* la curba α în P .

Ecuția vectorială a tangentei în punctul regulat, fixat, P , al curbei α , este:

$$\Delta_t : (\bar{r} - \bar{\alpha}(t)) \times \bar{\alpha}'(t) = \vec{0}, \quad (9.1)$$

iar ecuațiile carteziene ale tangentei în punctul P , sunt de forma:

$$\Delta_t : \frac{x - x(t)}{x'(t)} = \frac{y - y(t)}{y'(t)} = \frac{z - z(t)}{z'(t)}.$$

1.1. Definiție. Planul care trece prin P și are drept vector normal pe $\bar{\alpha}'(t)$ se numește *plan normal* la curba α în P .

Toate dreptele care trec prin punctul P și sunt conținute în planul normal al curbei C construit în punctul P se numesc *normale* la curba C în punctul P .

Folosind faptul că vectorul director al tangentei la curba α în punctul regulat, fixat P , este vectorul normal al planului normal la curba α în P , se obține ecuația vectorială a planului normal la curba α :

$$\langle \bar{r} - \bar{\alpha}(t), \bar{\alpha}'(t) \rangle = 0, \quad (9.2)$$

sau ecuația carteziană:

$$(x - x(t))x'(t) + (y - y(t))y'(t) + (z - z(t))z'(t) = 0.$$

Dacă $P = \alpha(t)$ este un punct singular de ordinul m , se știe că dreapta care trece prin P și are ca vector director pe $\bar{\alpha}^{(m)}(t)$ este *tagenta* curbei în punctul P .

Ecuția vectorială a tangentei în punctul singular de ordinul m , fixat, P , al curbei α , este:

$$\Delta_t : (\vec{r} - \vec{\alpha}(t)) \times \vec{\alpha}^{(m)}(t) = \vec{0}, \quad (9.3)$$

iar ecuațiile carteziene ale tangentei în punctul P , sunt de forma:

$$\Delta_t : \frac{x - x(t)}{x^{(m)}(t)} = \frac{y - y(t)}{y^{(m)}(t)} = \frac{z - z(t)}{z^{(m)}(t)}$$

1.2. Definiție. Planul care trece prin P și are drept vector normal pe $\vec{\alpha}^{(m)}(t)$ se numește plan normal la curba α în P . Într-un punct singular de ordinul m , $P = \alpha(t)$, planul normal la curbă are ecuația vectorială:

$$\langle \vec{r} - \vec{\alpha}(t), \vec{\alpha}^{(m)}(t) \rangle = 0 \quad (9.4)$$

și ecuația carteziană:

$$(x - x(t))x^{(m)}(t) + (y - y(t))y^{(m)}(t) + (z - z(t))z^{(m)}(t) = 0.$$

9.2 Curbe definite prin ecuații carteziene implicite

Curbele din \mathbb{R}^3 mai pot fi introduse și pornind de la funcții diferentiabile de tipul

$$F = (f, g) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad F(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z)).$$

Deoarece

$$J(F) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix}$$

punctele critice ale lui F se află rezolvând sistemul de ecuații

$$\frac{D(f, g)}{D(y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{vmatrix} = 0, \quad \frac{D(f, g)}{D(z, x)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial z} & \frac{\partial g}{\partial x} \end{vmatrix} = 0, \quad \frac{D(f, g)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} = 0.$$

Punctele în care cel puțin unul din acești determinanți este diferit de zero sunt puncte regulate.

Mulțimea

$$C = F^{-1}(a, b) = \{(x, y, z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = a, \quad g(x, y, z) = b\},$$

se numește *mulțime de ecuații carteziene implicite* $f(x, y, z) = a$, $g(x, y, z) = b$.

Mulțimea C este de fapt intersecția a două mulțimi de nivel constant. Ea poate să conțină atât puncte regulate cât și puncte critice ale lui F .

Fie $P(x_0, y_0, z_0) \in C$. Mulțimea tuturor punctelor din C a căror distanță față de $P(x_0, y_0, z_0)$ este mai mică decât un număr $\varepsilon > 0$ se numește *vecinătate* a lui $P(x_0, y_0, z_0)$ în C .

2.1. Teoremă. *Dacă $P(x_0, y_0, z_0)$ este un punct regulat din C , atunci există o vecinătate a acestui punct în care ecuațiile*

$$f(x, y, z) = a, \quad g(x, y, z) = b$$

definesc o curbă simplă și regulată.

Demonstrație. Prin ipoteză mulțimea C nu este vidă.

În ipoteza $\frac{D(f,g)}{D(y,z)}(P) \neq 0$, teorema funcțiilor implicite asigură că sistemul $f(x,y,z) = a, \quad g(x,y,z) = b$ definește două funcții $x \rightarrow y(x), \quad x \rightarrow z(x)$, într-o vecinătate I a punctului x_0 , pentru care

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{D(f,g)}{D(z,x)}}{\frac{D(f,g)}{D(y,z)}}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\frac{D(f,g)}{D(x,y)}}{\frac{D(f,g)}{D(y,z)}}$$

Astfel porțiunea din C din jurul punctului $P(x_0, y_0, z_0)$ poate fi gândită în mai multe moduri (fig.69):

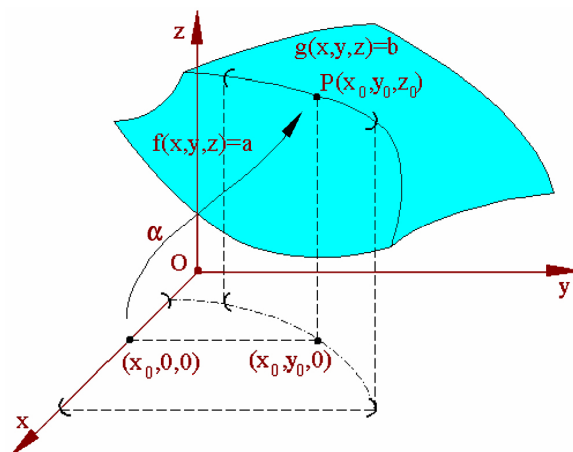


Fig. 69

- ca intersecție a două suprafețe cilindrice (vezi Cap.3),
- ca grafic al unei funcții $h : I \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad h(x) = (y(x), z(x))$,
- ca imagine a lui I printr-o funcție cu valorile $\alpha(t) = (x(t) = t, y(t), z(t))$.

De aceea această porțiune este o curbă simplă și regulată.

În ipotezele teoremei 2.1, mulțimea C este reuniunea imaginilor unor curbe simple și regulate, numindu-se *curbă de ecuații carteziene implicite* $f(x,y,z) = a, \quad g(x,y,z) = b$. Această denumire se păstrează uneori chiar dacă C conține și puncte critice, cu condiția ca mulțimea punctelor critice ale lui F să nu fie "prea ciudată".

Dacă f și g sunt polinoame, atunci C se numește *curbă algebrică*.

2.2. Tangenta. Fie $P(x_0, y_0, z_0)$ un punct regulat al lui C .

Tangenta la C în P are ecuațiile carteziene

$$\Delta_t : \frac{x - x_0}{\frac{D(f,g)}{D(y,z)}(P)} = \frac{y - y_0}{\frac{D(f,g)}{D(z,x)}(P)} = \frac{z - z_0}{\frac{D(f,g)}{D(x,y)}(P)},$$

iar planul normal corespunzător are ecuația carteziană

$$(x - x_0) \frac{D(f,g)}{D(y,z)}(P) + (y - y_0) \frac{D(f,g)}{D(z,x)}(P) + (z - z_0) \frac{D(f,g)}{D(x,y)}(P) = 0.$$

2.3. Observații

1) În situații concrete curba C poate fi dată prin două ecuații și prin mai multe inecuații în x, y, z (inecuațiile precizează o anumită porțiune din spațiu).

2) Reprezentarea curbei C (sau a unei porțiuni din C) în forma $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ se poate face prin intermediul teoremei 15.1 sau prin artificii de calcul.

3) Fie o curbă din spațiu dată în forma $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Dacă pentru $t = t_0$ avem $x'(t_0) \neq 0$, atunci teorema funcției inverse permite să spunem că funcția $x = x(t)$ are inversa $t = t(x)$ în vecinătatea lui t_0 . Astfel $y = y(t)$, $z = z(t)$ apar ca funcții compuse sau pe scurt ca funcții de tipul

$$\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$$

și deci, în vecinătatea punctului ales, curba apare ca intersecție a două suprafețe cilindrice. Această reprezentare a curbei se numește explicită.

4) În general, dacă există o funcție $F = (f, g) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ astfel încât

$$f(x(t), y(t), z(t)) = a, \quad g(x(t), y(t), z(t)) = b, \quad \forall t \in I,$$

atunci $f(x, y, z) = a$, $g(x, y, z) = b$ sunt ecuațiile carteziene implicite ale curbei $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in I$.

5) Fie $C : f(x, y, z) = a$, $g(x, y, z) = b$ o curbă regulată. Gradienții

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}, \quad \nabla g = \frac{\partial g}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial g}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial g}{\partial z} \vec{k},$$

definiți pe C , sunt câmpuri normale la C (exercițiu!).

2.4. Exemple

1) **Dreapta.** Ecuațiile carteziene implicite ale unei drepte din spațiu (intersecție de plane) sunt

$$D : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}, \quad \text{unde } \text{rang} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 2,$$

iar ecuațiile parametrice sunt

$$\alpha : x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad z = z_0 + nt, \quad t \in \mathbb{R},$$

unde $\text{rang}(l, m, n) = 1$.

2) **Cercul.** De obicei un cerc din spațiu este privit ca fiind intersecția dintre o sferă de centru $C(x_0, y_0, z_0)$ și rază r și un plan având ecuațiile carteziene implicite:

$$C : \begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2 \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}, \quad \text{unde } \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} < r.$$

3) **Conicele.** În general, intersecția dintre un plan și o cuadrică este o conică în spațiu; astfel dacă f este un polinom de gradul doi pe \mathbb{R}^3 , atunci o conică C din spațiu are ecuațiile carteziene implicite:

$$C : \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ ax + by + cz + d = 0. \end{cases}$$

9.3 Planul osculator si binormala

Inițial vom face câteva observații în legătură cu studiul formei unei curbe din spațiu în vecinătatea unui punct al său, studiu care se face în același mod și la curbele plane. Precizăm că în acest caz, figurile 44-47 ne dau forma proiecției curbei (în general proiecție oblică) pe planul determinat de cele două derivate necoliniare.

O mai bună aproximare a formei unei curbe din spațiu se poate obține utilizând trei derivate liniar independente. De exemplu, presupunem că P este un punct regulat și că $\vec{\alpha}'(t)$, $\vec{\alpha}''(t)$, $\vec{\alpha}'''(t)$ determină o bază în $T_p\mathbb{R}^3$. Utilizând formula Taylor de ordinul trei,

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{h}{1!}\vec{\alpha}'(t) + \frac{h^2}{2!}\vec{\alpha}''(t) + \frac{h^3}{3!}\vec{\alpha}'''(t) + \frac{h^3}{3!}\vec{\varepsilon}(h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \vec{\varepsilon}(h) = \vec{0},$$

ajungem la concluzia că pentru $|h|$ suficient de mic, tripletul $\left(h, \frac{h^2}{2}, \frac{h^3}{6}\right)$ dă cu aproximație coordonatele lui \overrightarrow{PQ} în baza aleasă. Când h trece prin zero prima și ultima coordonată își schimbă semnul, iar cea din mijloc și-l păstrează. Astfel, în vecinătatea lui P , arcul se află în același semispațiu cu $\vec{\alpha}'''(t)$, traversează pe $\vec{\alpha}''(t)$, $\vec{\alpha}'''(t)$ și planul determinat de P , $\vec{\alpha}'(t)$ și $\vec{\alpha}''(t)$ (fig.70).

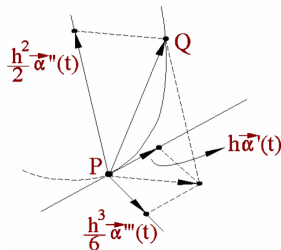


Fig. 70

Planul determinat de P , $\vec{\alpha}'(t)$ și $\vec{\alpha}''(t)$ se numește *plan osculator*. Ecuația vectorială a planului osculator în punctul P este:

$$P_O : \langle \vec{r} - \vec{\alpha}(t), \vec{\alpha}'(t) \times \vec{\alpha}''(t) \rangle = 0, \quad (9.5)$$

iar ecuația carteziană a lui

$$P_O : \begin{vmatrix} x - x(t) & y - y(t) & z - z(t) \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \end{vmatrix} = 0. \quad (9.6)$$

Normala la curba C în punctul P , perpendiculară pe planul osculator al curbei în P se numește *binormala* la curba C în punctul P . Vectorul director al binormalei curbei C în punctul $P = \alpha(t)$, este

$$\vec{\alpha}'(t) \times \vec{\alpha}''(t) = A\bar{i} + B\bar{j} + C\bar{k}.$$

Ecuația vectorială a binormalei este:

$$\Delta_{bn} : (\vec{r} - \vec{\alpha}(t)) \times (\vec{\alpha}'(t) \times \vec{\alpha}''(t)) = \vec{0}. \quad (9.7)$$

Ecuațiile carteziene ale binormalei la curba C în punctul $P = \alpha(t)$, sunt:

$$\Delta_{bn} : \frac{x - x(t)}{A} = \frac{y - y(t)}{B} = \frac{z - z(t)}{C}. \quad (9.8)$$

Astfel, în vecinătatea lui P , curba considerată are o abatere de la tangentă (*curbare*) și o abatere de la planul osculator (*torsionare*).

Se observă că dacă toate punctele curbei regulate C se află în același plan, adică este o curbă plană, atunci planul osculator este același în toate punctele curbei și coincide cu planul curbei.

9.4 Normala principală și planul rectificator

Fie o curbă C din spațiu \mathbb{R}^3 , reprezentată analitic prin ecuația sa vectorială:

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

și $P = \alpha(t)$ un punct regulat, în vecinătatea căruia curba este de clasă C^2 și $\vec{\alpha}'(t) \times \vec{\alpha}''(t) \neq \vec{0}$.

Normala la curba C în punctul P , conținută în planul osculator corespunzător punctului P se numește *normala principală* la curba C în punctul P . Normala principală se află la intersecția dintre planul normal și cel osculator construite în punctul P , deci va avea ecuațiile:

$$\Delta_{np} : \begin{cases} \langle \vec{r} - \vec{\alpha}(t), \vec{\alpha}'(t) \rangle = 0 \\ \langle \vec{r} - \vec{\alpha}(t), \vec{\alpha}'(t) \times \vec{\alpha}''(t) \rangle = 0, \end{cases} \quad (9.9)$$

sau echivalent

$$\Delta_{np} : (\vec{r} - \vec{\alpha}(t)) \times [(\vec{\alpha}'(t) \times \vec{\alpha}''(t)) \times \vec{\alpha}'(t)] = \vec{0}. \quad (9.10)$$

Planul care trece prin punctul P și este perpendicular pe normala principală la curba C în punctul P se numește *plan rectificator* al curbei C în punctul M . *Ecuația vectorială a planului rectificator* este:

$$P_r : \langle \vec{r} - \vec{\alpha}(t), (\vec{\alpha}'(t) \times \vec{\alpha}''(t)) \times \vec{\alpha}'(t) \rangle = 0, \quad (9.11)$$

echivalentă cu

$$P_r : \langle \vec{r} - \vec{\alpha}(t), \vec{\alpha}'(t) \times (\vec{\alpha}'(t) \times \vec{\alpha}''(t)) \rangle = 0. \quad (9.12)$$

9.5 Triedrul lui Frenet

Fie curba C din spațiu \mathbb{R}^3 , reprezentată analitic prin ecuația vectorială:

$$C : \vec{\alpha} = \vec{\alpha}(t), \quad t \in I$$

și $P = \vec{\alpha}(t) \in C$ un punct regulat, în vecinătatea căruia curba este de clasă C^2 și $\vec{\alpha}'(t) \times \vec{\alpha}''(t) \neq \vec{0}$.

În punctul P se pot construi cele trei drepte perpendiculare: tangenta, binormala, normala principală și cele trei plane perpendiculare: planul normal, planul osculator și planul rectificator. Fixând pe fiecare dreaptă un sens pozitiv se obține un triedru drept de referință cu aplicații în cinematică și în teoria diferențială a curbelor. Acesta este un triedru mobil, atașat în fiecare punct regulat al curbei, care se numește *triedrul lui Frenet*.

Versorul tangentei la curba C în punctul P se va nota cu \vec{T} și este:

$$\vec{T} = \frac{\vec{\alpha}'(t)}{\|\vec{\alpha}'(t)\|}.$$

Dar $ds = \|\vec{\alpha}'(t)\| dt$, de unde rezultă:

$$\vec{T} = \frac{d\vec{\alpha}}{dt} \frac{dt}{ds} \Rightarrow \vec{T} = \frac{d\vec{\alpha}}{ds}.$$

Vectorul $\frac{d^2\vec{\alpha}}{ds^2} \perp \vec{T}$, adică $\frac{d^2\vec{\alpha}}{ds^2}$ este conținut în planul normal.
Deoarece

$$\vec{T}^2 = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{d\vec{\alpha}}{ds}\right)^2 = 1,$$

derivând în raport cu s obținem $\frac{d\vec{\alpha}}{ds} \cdot \frac{d^2\vec{\alpha}}{ds^2} = 0$. De asemenea, are loc:

$$\frac{d^2\vec{\alpha}}{ds^2} = \frac{d}{ds} \left(\frac{d\vec{\alpha}}{dt} \frac{dt}{ds} \right) = \frac{d^2\vec{\alpha}}{dt^2} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + \frac{d\vec{\alpha}}{dt} \frac{d^2t}{ds^2} = \vec{\alpha}''(t) \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + \vec{\alpha}'(t) \frac{d^2t}{ds^2}$$

de unde rezultă că $\frac{d^2\vec{\alpha}}{ds^2}$ este în planul osculator.

Vectorul $\frac{d^2\vec{\alpha}}{ds^2}$ este coliniar cu normala principală. Vom alege versorul normalei principale \vec{N}

$$\vec{N} = \frac{\frac{d^2\vec{\alpha}}{ds^2}}{\left\| \frac{d^2\vec{\alpha}}{ds^2} \right\|}.$$

Versorul binormalei \vec{B} se alege astfel încât triedrul $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ să fie orientat pozitiv, adică:

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}.$$

Versorii $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ se numesc *versorii triedrului Frenet* în punctul P la curba C .

Calculăm

$$\frac{d\vec{\alpha}}{ds} \times \frac{d^2\vec{\alpha}}{ds^2} = \frac{\vec{\alpha}'(t)}{\|\vec{\alpha}'(t)\|} \times \left(\frac{\vec{\alpha}''(t)}{\|\vec{\alpha}'(t)\|^2} + \vec{\alpha}'(t) \frac{d^2t}{ds^2} \right) = \frac{1}{\|\vec{\alpha}'\|^3} (\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}''),$$

de unde rezultă că \vec{B} are același sens și aceeași direcție cu $\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}''$.

Versorul \vec{B} se va calcula cu formula:

$$\vec{B} = \frac{\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}''}{\|\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}''\|}. \quad (9.13)$$

Versorul normalei principale se va calcula prin:

$$\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T}. \quad (9.14)$$

9.6 Formule Frenet pentru curbe cu viteza unu

Ne propunem să găsim elementele matematice care măsoară curbarea și torsionarea unei curbe regulate din \mathbb{R}^3 .

6.1. Fie $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ o curbă cu viteza unu, adică $\|\vec{\beta}'(s)\| = 1, \forall s \in J$. Câmpul $\vec{T} = \vec{\beta}'$ se numește *câmp tangent unitar* al lui β . Derivând pe $\langle \vec{\beta}', \vec{\beta}' \rangle = 1$ deducem $\langle \vec{\beta}'', \vec{\beta}' \rangle = 0$ și deci $\vec{T}' = \vec{\beta}''$, $\vec{\beta}'' \perp \vec{\beta}'$. După raționamentul făcut în §8, curba β se înconvoaie în același sens cu $\vec{T}' = \vec{\beta}''$. Pe măsură ce $\|\vec{\beta}''\|$ crește, înconvoierea lui β crește. În acest fel $\vec{T}' = \vec{\beta}''$ controlează

curbura lui β , iar lungimea lui \vec{T}' dă o măsură numerică a acestei curburi. De aceea \vec{T}' se numește *câmp curbură*, iar funcția $k : J \rightarrow [0, \infty)$, $k(s) = \|\vec{T}'(s)\|$, se numește *curbura* lui β (fig.71).

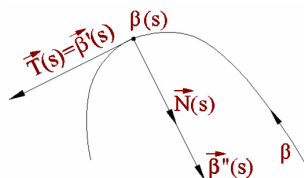


Fig. 71

Presupunem $k > 0$. În această ipoteză câmpul vectorial $\vec{N} = \frac{1}{k}\vec{T}'$ se numește *câmpul normal principal* al lui β . Câmpul \vec{N} indică în fiecare punct sensul în care se curbează β . Evident $\vec{T}(s)$ și $\vec{N}(s)$ determină planul osculator al curbei β . Pentru controlul abaterii curbei de la planul osculator (*torsionare*) în vecinătatea punctului $\beta(s)$ se utilizează unul dintre versorii normali ai acestui plan. De aceea se introduce câmpul unitar $\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$ care se numește *câmp binormal* pe β . Evident câmpurile vectoriale $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ definite pe β sunt ortonormate. Ansamblul $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ poartă numele de *câmpul reperului Frenet* pe β , iar ansamblul $\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s)$ se numește *reper Frenet* atașat punctului $\beta(s)$ de pe curbă.

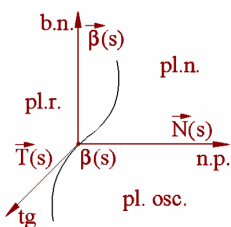


Fig. 72

Folosirea câmpului reperului Frenet în studiul unei curbe regulate β dă mai multe informații despre curbă decât ar da folosirea oricărui alt câmp de repere. Ideea de bază care pune în evidență utilitatea acestui câmp de repere constă în posibilitatea exprimării derivatelor $\vec{T}', \vec{N}', \vec{B}'$ cu ajutorul lui $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$. Știm că $\vec{T}' = k\vec{N}'$. Apoi $\vec{B}' = \langle \vec{B}', \vec{T} \rangle \vec{T} + \langle \vec{B}', \vec{N} \rangle \vec{N} + \langle \vec{B}', \vec{B} \rangle \vec{B}$. Să arătăm că \vec{B}' este colinar cu \vec{N} . Pentru aceasta este suficient să dovedim că $\langle \vec{B}', \vec{B} \rangle = 0$ și $\langle \vec{B}', \vec{T} \rangle = 0$. Prima relație este adevărată deoarece $\vec{B}(s)$ este un versor. Pentru a demonstra a doua relație derivăm pe $\langle \vec{B}, \vec{T} \rangle = 0$ și găsim

$$\langle \vec{B}', \vec{T} \rangle + \langle \vec{B}, \vec{T}' \rangle = 0 \quad \text{sau} \quad \langle \vec{B}', \vec{T} \rangle = -\langle \vec{B}, k\vec{N} \rangle = 0.$$

Rămâne $\vec{B}' = \langle \vec{B}', \vec{N} \rangle \vec{N}$. Funcția reală $\tau : J \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$\vec{B}' = -\tau \vec{N}$$

se numește *torsiunea* curbei (semnul minus este pus prin convenție și corespunde altor justificări ale formulelor Frenet). $\tau(s)$ poate fi un număr negativ, nul sau pozitiv. Ulterior vom arăta modul în care τ măsoară abaterea curbei β de la planul său osculator.

Să exprimăm acum pe \vec{N}' , în raport cu $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$. Avem

$$\vec{N}' = \langle \vec{N}', \vec{T} \rangle \vec{T} + \langle \vec{N}', \vec{N} \rangle \vec{N} + \langle \vec{N}', \vec{B} \rangle \vec{B}.$$

Deoarece $\vec{N}(s)$ este un versor rezultă că $\langle \vec{N}', \vec{N} \rangle = 0$. Pentru evaluarea lui $\langle \vec{N}', \vec{T} \rangle$ și $\langle \vec{N}', \vec{B} \rangle$ pornim de la $\langle \vec{N}, \vec{T} \rangle = 0$ și $\langle \vec{N}, \vec{B} \rangle = 0$ pe care le derivăm în raport cu s . Găsim

$$\begin{aligned}\langle \vec{N}', \vec{T} \rangle &= -\langle \vec{N}, \vec{T}' \rangle = -\langle \vec{N}, k\vec{N} \rangle = -k, \\ \langle \vec{N}', \vec{B} \rangle &= -\langle \vec{N}, \vec{B}' \rangle = -\langle \vec{N}, -\tau\vec{N} \rangle = \tau.\end{aligned}$$

Astfel am demonstrat următoarea

6.2. Teoremă (formulele Frenet). Dacă $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ este o curbă cu viteza unu, curbura $k > 0$ și torsiunea τ , atunci

$$\begin{aligned}\vec{T}' &= k\vec{N} \\ \vec{N}' &= -k\vec{T} + \tau\vec{B} \\ \vec{B}' &= -\tau\vec{N}.\end{aligned}$$

6.3. Aproximarea Frenet. Ne propunem să găsim o aproximare a unei curbe β în vecinătatea unui punct al său cu ajutorul elementelor lui Frenet. Utilizând această aproximare, arătăm în ce mod curbura și torsiunea influențează forma curbei. Pentru aceasta pornim de la aproximarea Taylor

$$\bar{\beta}(s) \simeq \bar{\beta}(0) + \frac{s}{1!}\bar{\beta}'(0) + \frac{s^2}{2!}\bar{\beta}''(0) + \frac{s^3}{3!}\bar{\beta}'''(0)$$

pe care o exprimăm cu ajutorul reperului Frenet în punctul considerat. Avem

$$\bar{\beta}'(0) = \vec{T}_0, \quad \bar{\beta}''(0) = k_0\vec{N}_0.$$

Pe de altă parte,

$$\bar{\beta}'''(0) = (k\vec{N})' = \frac{dk}{ds}\vec{N} + k\vec{N}'$$

și folosind formula lui Frenet pentru \vec{N}' găsim

$$\bar{\beta}'''(0) = -k_0^2\vec{T}_0 + \frac{dk}{ds}(0)\vec{N}_0 + k_0\tau_0\vec{B}_0.$$

Înlocuind în aproximarea Taylor și reținând numai partea principală în fiecare componentă (puterile cele mai mici ale lui s) obținem

$$\bar{\beta}(s) \sim \bar{\beta}(0) + s\vec{T}_0 + k_0\frac{s^2}{2}\vec{N}_0 + k_0\tau_0\frac{s^3}{6}\vec{B}_0.$$

Notând partea dreaptă cu $\bar{\gamma}(s)$ obținem o curbă $\gamma : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ numită *aproximarea Frenet* a lui β în vecinătatea lui $s = 0$ (fig.73). Precizăm că β are aproximări Frenet diferite în puncte diferite. Dacă înlocuim $s = 0$ cu un punct arbitrar $s = s_0$, atunci în expresiile anterioare înlocuim s cu $s - s_0$.

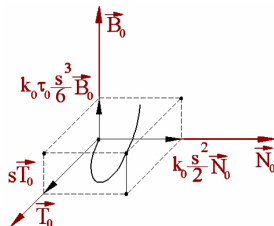


Fig. 73

Să examinăm aproximarea Frenet dată anterior. Primul termen în expresia lui $\vec{\gamma}(s)$ este chiar punctul $\beta(0)$. Primii doi termeni dau tangenta lui β în $\beta(0)$,

$$s \rightarrow \vec{\beta}(0) + s\vec{T}_0.$$

Aceasta este *cea mai bună aproximare liniară a lui β în vecinătatea lui $\beta(0)$* . Primii trei termeni dau parabola

$$s \rightarrow \vec{\beta}(0) + s\vec{T}_0 + k_0 \frac{s^2}{2} \vec{N}_0,$$

care este *cea mai bună aproximare pătratică a lui β în vecinătatea lui $\beta(0)$* . Observăm că această parabolă se află în planul osculator al lui β în punctul $\beta(0)$, are aceeași formă ca și parabola $y = k_0 \frac{x^2}{2}$ din planul xOy și este complet determinată prin curbura k_0 . Astfel k_0 măsoară abaterea curbei de la tangenta în $\beta(0)$ în sensul lui \vec{N}_0 .

În final, torsiunea τ_0 , care apare în ultimul și cel mai mic termen al lui $\vec{\gamma}$, controlează abarea lui β de la punctul său osculator, în $\beta(0)$, în direcția lui \vec{B}_0 .

9.7 Formulele Frenet pentru curbe cu viteza arbitrară

Elementele Frenet pentru o curbă regulată cu viteză arbitrară se definesc prin elementele Frenet atașate reprezentării normale a curbei respective.

7.1. Fie $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $t \rightarrow \alpha(t)$, o curbă regulată care nu are viteza unu și $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$, $s \rightarrow \beta(s)$, reprezentarea sa normală. Dacă $s : I \rightarrow J$ este abscisa curbilinie, atunci

$$\forall t \in I, \quad \alpha(t) = \beta(s(t)).$$

Formulele lui Frenet dau reprezentarea derivatelor versorilor triedrului Frenet în raport cu s , funcție de acești versori, adică exprimă $\frac{d\vec{T}}{ds}$, $\frac{d\vec{N}}{ds}$, $\frac{d\vec{B}}{ds}$ funcție de \vec{T} , \vec{N} , \vec{B} . Fie $P(s) \in \beta$ un punct nesingular al curbei și reperul Frenet în punctul P , $\{P; \vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$.

Exprimăm $\frac{d\vec{T}}{ds}$, $\frac{d\vec{N}}{ds}$, $\frac{d\vec{B}}{ds}$ în raport cu baza reperului, adică:

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = a_{11}\vec{T} + a_{12}\vec{N} + a_{13}\vec{B}; \quad (9.15)$$

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = a_{21}\vec{T} + a_{22}\vec{N} + a_{23}\vec{B}; \quad (9.16)$$

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = a_{31}\vec{T} + a_{32}\vec{N} + a_{33}\vec{B}. \quad (9.17)$$

Știm că \vec{T} este versor, $\vec{T}^2 = 1$. Derivăm această relație în raport cu s și obținem $\langle 2\vec{T}, \frac{d\vec{T}}{ds} \rangle = 0$.

Înmulțim scalar relația (9.15) cu \vec{T} :

$$\left\langle \vec{T}, \frac{d\vec{T}}{ds} \right\rangle = a_{11}\vec{T}^2 + a_{12}\vec{N} \cdot \vec{T} + a_{13}\vec{B} \cdot \vec{T} = a_{11}.$$

Folosind ortogonalitatea vectorilor bazei triedrului Frenet, se obține $a_{11} = 0$.

Analog, din (9.16) și (9.17) se obține $a_{22} = a_{33} = 0$.

Vom înmulți scalar (9.15) cu \vec{N} și (9.16) cu \vec{T} , vom aduna cele două relații și se obține

$$a_{12} + a_{21} = 0.$$

Analog, se obțin:

$$a_{13} + a_{31} = 0; \quad a_{23} + a_{32} = 0.$$

Astfel:

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = a_{12}\vec{N} + a_{13}\vec{B}; \quad (9.18)$$

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = -a_{12}\vec{T} + a_{23}\vec{B}; \quad (9.19)$$

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = -a_{13}\vec{T} - a_{23}\vec{N}. \quad (9.20)$$

Dar $\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d^2\vec{\beta}}{ds^2} = \left\| \frac{d^2\vec{\beta}}{ds^2} \right\| \vec{N}$ și din (9.18) va rezulta $a_{13} = 0$.

Se notează $a_{12} = k = \left\| \frac{d^2\vec{\beta}}{ds^2} \right\| \geq 0$, $a_{23} = \tau$ și se obțin formulele lui Frenet:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{T}}{ds} = k\vec{N} \\ \frac{d\vec{N}}{ds} = -k\vec{T} + \tau\vec{B} \\ \frac{d\vec{B}}{ds} = -\tau\vec{N}. \end{cases}$$

Scalarii k, τ care apar în relațiile lui Frenet au o semnificație geometrică deosebită. Scalarul k se numește *curbura* în punctul P a curbei, iar τ se numește *torsiunea* curbei în punctul P . Inversul curburii se numește *rază de curbura* și inversul modulului torsiunii se numește *rază de torsiune* în punctul P . Dacă $k_\beta > 0$, τ_β , \vec{T}_β , \vec{N}_β și \vec{B}_β sunt elementele Frenet pentru β , atunci pentru α definim:

- funcția curbura: $k = k_\beta \circ s$,
- funcția torsiune: $\tau = \tau_\beta \circ s$,
- câmpul tangent unitar: $\vec{T} = \vec{T}_\beta \circ s$,
- câmpul normal principal: $\vec{N} = \vec{N}_\beta \circ s$,
- câmpul binormal: $\vec{B} = \vec{B}_\beta \circ s$ (fig.74).

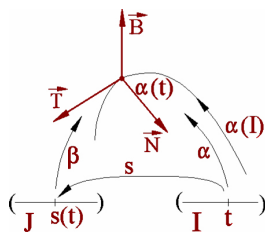


Fig. 74

7.2. Lemă. (Formulele Frenet pentru o curbă cu viteza arbitrară). Dacă $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ este o curbă regulată cu viteza scalară v și curbura $k > 0$, atunci

$$\begin{aligned}\vec{T}' &= kv\vec{N} \\ \vec{N}' &= -kv\vec{T} + \tau v\vec{B} \\ \vec{B}' &= -\tau v\vec{N},\end{aligned}$$

unde " ' " înseamnă derivata în raport cu t .

Demonstrație. Fie β reprezentarea normală a lui α . Prin definiție $\vec{T}(t) = \vec{T}_\beta(s(t))$, $t \in I$, și prin derivare găsim

$$\frac{d\vec{T}}{dt}(t) = \frac{d\vec{T}_\beta}{ds}(s(t)) \frac{ds}{dt}(t).$$

Pe de altă parte, teorema 6.2 dă

$$\frac{d}{ds}\vec{T}_\beta(s) = k_\beta(s)\vec{N}_\beta(s).$$

Înlocuind pe s cu $s(t)$ și revenind la $\vec{T}'(t)$ deducem

$$\vec{T}'(t) = s'(t)k_\beta(s(t))\vec{N}(s(t)) = v(t)k(t)\vec{N}(t).$$

Celelalte formule se demonstrează analog.

Să exprimăm acum câmpul vitează $\vec{\alpha}'$ și câmpul accelerație $\vec{\alpha}''$ în raport cu reperul ortonormat $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$.

7.3. Lemă. Dacă α este o curbă regulată cu viteza v , atunci câmpurile vitează și accelerație ale lui α sunt date de

$$\vec{\alpha}' = v\vec{T}, \quad \vec{\alpha}'' = \frac{dv}{dt}\vec{T} + kv^2\vec{N}.$$

Demonstrație. Deoarece $\vec{\alpha}(t) = \vec{\beta}(s(t))$ găsim

$$\vec{\alpha}'(t) = s'(t)\vec{\beta}'(s(t)) = v(t)\vec{T}_\beta(s(t)) = v(t)\vec{T}(t).$$

O nouă derivare dă (fig.75)

$$\vec{\alpha}'' = \frac{dv}{dt}\vec{T} + v\vec{T}' = \frac{dv}{dt}\vec{T} + kv^2\vec{N}.$$

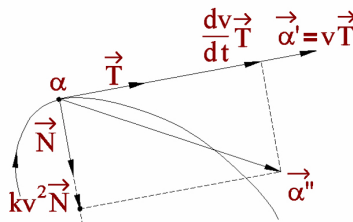


Fig. 75

Formula care dă accelerația este mai complicată decât formula care dă viteza. Prin definiție $\vec{\alpha}''$ este variația vitezei $\vec{\alpha}'$ în unitatea de timp și în general se schimbă atât lungimea cât și direcția lui $\vec{\alpha}'$.

Componenta tangențială $\frac{dv}{dt}\vec{T}$ indică variația lungimii lui $\vec{\alpha}'$, iar componenta normală $kv^2\vec{N}$ indică variația direcției lui $\vec{\alpha}'$.

Ne propunem acum să dăm formulele explicite pentru determinarea elementelor Frenet ale unei curbe regulate arbitrare.

7.4. Teoremă. Dacă $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ este o curbă regulată, atunci

$$\begin{aligned}\vec{T} &= \frac{\vec{\alpha}'}{\|\vec{\alpha}'\|}, & \vec{N} &= \vec{B} \times \vec{T}, & \vec{B} &= \frac{\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}''}{\|\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}''\|}, \\ k &= \frac{\|\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}''\|}{\|\vec{\alpha}'\|^3}, & \tau &= \frac{\langle \vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}'', \vec{\alpha}''' \rangle}{\|\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}''\|^2},\end{aligned}$$

unde " ' " înseamnă derivata în raport cu t .

Demonstrație. Deoarece $v = \|\vec{\alpha}'\| > 0$, formula $\vec{T} = \frac{\vec{\alpha}'}{\|\vec{\alpha}'\|}$ este echivalentă cu $\vec{\alpha}' = v\vec{T}$.

Folosind lema anterioară găsim

$$\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}'' = kv^3\vec{B}.$$

Deoarece $\|\vec{B}\| = 1$, $k \geq 0$ și $v > 0$, obținem

$$kv^3 = \|\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}''\|.$$

Această relație arată că pentru curbele regulate condiția $k > 0$ este echivalentă cu $\|\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}''\| > 0$. De aceea, pentru $k > 0$, vectorii $\vec{\alpha}'$ și $\vec{\alpha}''$ sunt liniar independenți și determină planul osculator în fiecare punct, ca și \vec{T} și \vec{N} . Rezultă

$$\vec{B} = \frac{\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}''}{kv^3} = \frac{\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}''}{\|\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}''\|}.$$

Pentru obținerea produsului $\langle \vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}'', \vec{\alpha}''' \rangle$ este suficient să exprimăm pe $\vec{\alpha}'''$ cu ajutorul lui $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$. Avem

$$\vec{\alpha}''' = \left(\frac{dv}{dt}\vec{T} + kv^2\vec{N} \right)' = kv^3\tau\vec{B} + \dots$$

Ceilalți termeni nu ne interesează deoarece $\langle \vec{B}, \vec{T} \rangle = 0$, $\langle \vec{B}, \vec{N} \rangle = 0$.

Rezultă

$$\langle \vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}'', \vec{\alpha}''' \rangle = k^2v^6\tau$$

și ținând seama că $\|\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}''\| = kv^3$, găsim formula pentru τ .

7.6. Exemplu. Să se determine versorii, muchiile și fețele triedrului lui Frenet pentru curba $\alpha : \begin{cases} y^2 = x \\ x^2 = z. \end{cases}$ în punctul $M_0(1, 1, 1) \in C$.

Parametrizăm curba alegând funcția $y(t) = t$. Din ecuațiile implicite ale curbei rezultă $x(t) = t^2$, $z(t) = t^4$. Parametrul t în punctul M_0 are valoarea $t_0 = 1$.

Așadar, $\vec{\alpha}(t) = t^2\vec{i} + t\vec{j} + t^4\vec{k}$, $\vec{\alpha}'(1) = 2t\vec{i} + \vec{j} + 4t^3\vec{k}$, $\vec{\alpha}''(t) = 2\vec{i} + 12t^2\vec{k}$, iar în t_0 obținem $\vec{\alpha}'(1) = 2\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{\alpha}''(1) = 2\vec{i} + 12\vec{k}$.

Scriem versorii triedrului Frenet în punctul M_0 :

$$\vec{T}_0 = \frac{\vec{\alpha}'(1)}{\|\vec{\alpha}'(1)\|} = \frac{2\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}}{\sqrt{21}}; \quad \vec{B}_0 = \frac{\vec{\alpha}'(1) \times \vec{\alpha}''(1)}{\|\vec{\alpha}'(1) \times \vec{\alpha}''(1)\|} = \frac{6\vec{i} - 8\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{101}};$$

$$\vec{N}_0 = \vec{B}_0 \times \vec{T}_0 = \frac{-31\vec{i} - 26\vec{j} + 22\vec{k}}{\sqrt{21 \cdot 101}}.$$

Putem scrie acum ecuațiile muchiilor triedrului Frenet în M_0 :

-tangentă

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{4};$$

-binormală

$$\frac{x-1}{6} = \frac{y-1}{-8} = \frac{z-1}{1};$$

-normală principală

$$\frac{x-1}{-31} = \frac{y-1}{-26} = \frac{z-1}{22}.$$

Ecuația planului normal în M_0 este

$$2(x-1) + (y-1) + 4(z-1) = 0 \Leftrightarrow 2x + y + 4z - 7 = 0;$$

ecuația planului osculator

$$6(x-1) - 8(y-1) - (z-1) = 0 \Leftrightarrow 6x - 8y - z + 3 = 0;$$

și ecuația planului rectificator

$$: -31(x-1) - 26(y-1) + 22(z-1) = 0 \Leftrightarrow -31x - 26y + 22z + 35 = 0.$$

7.6. Observație. Din punct de vedere al calculului este suficient să folosim aceeași literă α atât pentru curba dată inițial cât și pentru reprezentarea ei normală și analog aceleași notații pentru elementele Frenet.

7.7. Interpretarea geometrică a curburii

Vom considera curba α reprezentată normal, de clasă C^2 în vecinătatea unui punct regulat $P(s) \in \alpha$. Fie $P'(s + \Delta s) \in \alpha$ un punct vecin cu punctul P și versorii tangentelor $\vec{T}(s)$ și $\vec{T}(s + \Delta s)$ în punctele P respectiv P' . Unghiul dintre cei doi versori se numește *unghi de contigență* al tangentelor la curbă în punctele P și P' , notat cu $\Delta\omega$. Construind cu reprezentanții acestor versori un triunghi se obține $\Delta\vec{T} = \vec{T}(s + \Delta s) - \vec{T}(s) = 2 \sin \frac{\Delta\omega}{2}$

Din prima formulă a lui Frenet se obține:

$$k = \left\| \frac{d\vec{T}}{ds} \right\| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left\| \frac{\Delta\vec{T}}{\Delta s} \right\|.$$

Având în vedere definiția derivatei se obține

$$k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{2 \sin \frac{\Delta\omega}{2}}{\Delta\omega} \frac{\Delta\omega}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\omega}{\Delta s} \right|.$$

Curbura unei curbe într-un punct regulat al curbei P este limita modulului raportului dintre unghiul de contigență al tangentelor în punctul P și P' și arcul $\widehat{PP'}$ când P' tinde către P pe curbă. Acest raport se numește curbura medie a arcului MM' . Pentru curbele plane $\Delta\omega$ reprezintă variația unghiului ω dintre tangentă și axa Ox .

Curbura unei curbe indică gradul de abatere de la tangentă al curbei.

7.8. Interpretarea geometrică a torsiunii

Unghiul dintre versorii binormalelor construite în punctele P și P' la curbă, adică versorii $\vec{B}(s)$ și $\vec{B}(s + \Delta s)$ se numește *unghi de contigență* al binormalelor și se va nota cu $\Delta\theta$.

Făcând un raționament analog cu cel din cazul curburii și folosind a treia formulă a lui Frenet rezultă:

$$|\tau| = \left\| \frac{d\vec{B}}{ds} \right\| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left\| \frac{\Delta\vec{B}}{\Delta s} \right\| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{2 \sin \frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta\theta} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \right|.$$

Modulul torsiunii unei curbe într-un punct regulat P este limita modulului raportului dintre unghiul de contigență al binormalelor în punctul P și P' și lungimea arcului $\widehat{PP'}$ când P' tinde către P pe curbă.

Torsiunea unei curbe indică gradul de abatere de la planul osculator al curbei (gradul de răsucire al curbei).

9.8 Aplicații ale formulelor Frenet

În baza rezultatelor din §15 și §16 este suficient să facem raționamente numai pentru curbele cu viteza unu (în loc de curbe regulate) și preferăm aceste raționamente deoarece sunt mai simple.

8.1. Teoremă. *O curbă cu viteza unu $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ este o parte a unei drepte dacă și numai dacă $k = 0$.*

Demonstrație. Deoarece $k(s) = \|\vec{\beta}''(s)\|$, relația $k = 0$ este echivalentă cu $\vec{\beta}''(s) = \vec{0}$, $\forall s \in J$.

8.2. Teoremă. *Fie $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ o curbă cu viteza unu pentru care $k > 0$. β este o curbă plană dacă și numai dacă $\tau = 0$.*

Demonstrație. Fie planul $\langle \vec{r} - \vec{r}_0, \vec{a} \rangle = 0$. Dacă β se află în acest plan, atunci $\langle \beta(s) - \vec{r}_0, \vec{a} \rangle = 0$. Derivând, obținem

$$\langle \vec{\beta}', \vec{a} \rangle = \langle \beta'', \vec{a} \rangle = 0.$$

Rezultă că \vec{a} este perpendicular pe $T = \beta'$ și $\vec{N} = \frac{\vec{\beta}''}{k}$. Astfel

$$\vec{B} = \pm \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|},$$

adică $\vec{B}' = \vec{0}$ și deci $\tau = 0$.

Invers, presupunem $\tau = 0$. Din teorema 6.2 rezultă $\vec{B}' = \vec{0}$ și deci $\vec{B} = \vec{a}_0$. Vom arăta că β se află în planul care trece prin $\beta(0)$ și este perpendicular pe β (fig.76). Pentru aceasta considerăm funcția

$$f : J \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(s) = \langle \vec{\beta}(s) - \vec{\beta}(0), \vec{B} \rangle.$$

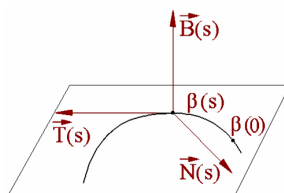


Fig. 76

Avem $\frac{df}{ds} = \langle \vec{\beta}', \vec{B} \rangle = 0$ și deci $f(s) = \text{const}$. Cum $f(0) = 0$, găsim $f(s) = 0$. Astfel

$$\langle \vec{\beta}(s) - \vec{\beta}(0), \vec{B} \rangle = 0, \quad \forall s.$$

8.3. Teoremă. Fie $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ o curbă cu viteza unu care are curbura $k > 0$ și torsiunea τ . Curba β este o parte a unui cerc (de rază r) atunci și numai atunci când $k = \text{const}$ și $\tau = 0$. În acest caz raza cercului este $r = \frac{1}{k}$.

Demonstrație. Presupunem $\tau = 0$, adică β este o curbă plană. Considerăm curba $\vec{\delta} = \vec{\beta} + \frac{1}{k}\vec{N}$. Găsim

$$\vec{\delta}' = \vec{\beta}' + \frac{1}{k}\vec{N}' = \vec{T} + \frac{1}{k}(-k\vec{T}) = \vec{0}.$$

Astfel curba δ se reduce la un punct, adică

$$\forall s \in J, \quad \vec{\beta}(s) + \frac{1}{k}\vec{N}(s) = \vec{C} \quad \text{și deci} \quad \|\vec{\beta}(s) - \vec{C}\| = \left\| \frac{-1}{k}\vec{N} \right\| = \frac{1}{k}.$$

Rezultă că β se află pe cercul cu centrul în C și de rază $\frac{1}{k}$ (fig.77).

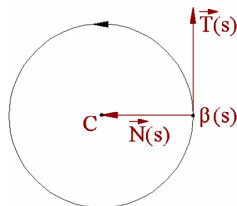


Fig. 77

Invers, fie β o parte a unui cerc de rază r . Deoarece cercul este o curbă plană avem $\vec{\beta}(s) = \vec{c} - r\vec{N}(s)$ și $\tau = 0$. De aici și din teorema 6.2 rezultă $\vec{\beta}'(s) = -rk\vec{T}(s)$, adică $rk = 1$ sau $k = \frac{1}{r}$.

În continuare ne vom ocupa de elici cilindrice.

8.4. Definiție. O curbă regulată $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $t \rightarrow \alpha(t)$ al cărui vector tangent unitar $\vec{T}(t)$ face în fiecare punct un unghi constant cu un versor dat \vec{u} , adică $\langle \vec{T}(t), \vec{u} \rangle = \cos \theta$, $\forall t \in I$, se numește *elice cilindrică*.

Condiția impusă nu este afectată de reparametrizare. De aceea ne vom ocupa de elicea cilindrică $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ care are viteza unu.

Fie o curbă cu viteza unu pentru care $\langle \vec{T}, \vec{u} \rangle = \cos \theta$. Luând pe $\beta(0)$ drept origine, funcția $h(s) = \langle \vec{\beta}(s) - \vec{\beta}(0), \vec{u} \rangle$ arată cum se ridică $\beta(s)$ în direcția lui \vec{u} (fig.78). Pe de altă parte,

$$\frac{dh}{ds} = \langle \vec{\beta}', \vec{u} \rangle = \langle \vec{T}, \vec{u} \rangle = \cos \theta$$

și astfel

$$h(s) = s \cos \theta.$$

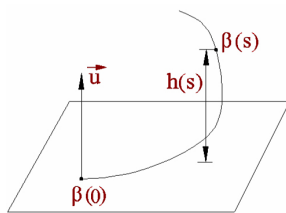


Fig. 78

Dacă prin fiecare punct al lui β ducem o dreaptă paralelă cu \vec{u} , atunci obținem o suprafață cilindrică pe care se află β . Considerentele de mai sus arată că pentru orice elice cilindrică β există o curbă γ astfel încât

$$\vec{\beta}(s) = \vec{\gamma}(s) + s \cos \theta \vec{u},$$

unde abscisa curbilinie s este măsurată, de exemplu, de la zero. Curbă γ se numește *curba secțiunii transversale* a suprafeței cilindrice pe care se află β . Ea se află în planul determinat de punctul $\beta(0)$ și de vectorul normal \vec{u} (fig.79). De asemenea, dacă curbura lui β este k , atunci un calcul simplu arată că funcția curbura a lui γ este $\frac{k}{\sin^2 \theta}$.

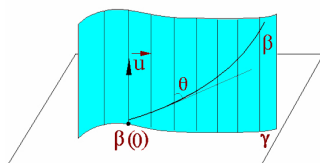


Fig. 79

8.5. Observație. Pentru o parametrizare arbitrară, avem

$$\vec{\alpha}(t) = \vec{\gamma}(t) + s(t) \cos \theta \vec{u},$$

unde $s = s(t)$ este abscisa curbilinie.

8.6. Teoremă. Fie $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ o curbă cu viteza unu care are curbura $k > 0$ și torsiunea τ . Curbă β este o elice cilindrică dacă și numai dacă $\frac{\tau}{k} = \text{const}$.

Demonstrație. Dacă β este o elice cilindrică cu $\langle \vec{T}, \vec{u} \rangle = \cos \theta$, atunci

$$0 = \langle \vec{T}, \vec{u} \rangle' = \langle \vec{T}', \vec{u} \rangle = \langle k \vec{N}, \vec{u} \rangle \Rightarrow \langle \vec{N}, \vec{u} \rangle = 0.$$

Astfel $\forall s \in J$, \vec{u} se află în planul lui $\vec{T}(s)$ și $\vec{B}(s)$. Deoarece \vec{u} este un versor, avem $\vec{u} = \vec{T} \cos \theta + \vec{B} \sin \theta$ și prin derivare găsim

$$0 = (k \cos \theta - \tau \sin \theta) \vec{N} \Rightarrow \frac{\tau}{k} = \text{ctg} \theta = \text{const}.$$

Invers, fie $\frac{\tau}{k} = \text{const}$. Alegem pe θ astfel încât $\frac{\tau}{k} = \text{ctg} \theta$ și construim câmpul $\vec{U} = \vec{T} \cos \theta + \vec{B} \sin \theta$. Deoarece $\vec{U}' = (k \cos \theta - \tau \sin \theta) \vec{N} = \vec{0}$, rezultă că \vec{U} este un câmp de vectori paraleli și deci el se reprezintă prin vectorul \vec{u} , deci $\langle \vec{T}, \vec{u} \rangle = \cos \theta$. De aceea β este o elice cilindrică.

Un caz particular al elicei cilindrice este elicea circulară. În acest caz, suprafața cilindrică este un cilindru circular drept, iar secțiunea transversală este un cerc de rază $\frac{\sin^2 \theta}{k}$.

8.7. Exemplu. Fie $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ o curbă cu viteza unu care are curbura $k > 0$ și torsiunea $\tau \neq 0$. Să se arate că β este o (parte dintr-o) elice circulară dacă și numai dacă $k = \text{const}$ și $\tau = \text{const}$.

Soluție. Pentru implicația directă vom da o demonstrație care poate servi ca model pentru determinarea elementelor Frenet pentru o curbă cu viteza unu.

Fie elicea circulară $\vec{\beta}(s) = \left(a \cos \frac{s}{c}, a \sin \frac{s}{c}, \frac{bs}{c} \right)$, unde $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $a > 0$, $b \neq 0$. Avem

$$\begin{aligned}\vec{T}(s) &= \vec{\beta}'(s) = \left(-\frac{a}{c} \sin \frac{s}{c}, \frac{a}{c} \cos \frac{s}{c}, \frac{b}{c} \right), \\ \vec{T}'(s) &= \vec{\beta}''(s) = \left(-\frac{a}{c^2} \cos \frac{s}{c}, -\frac{a}{c^2} \sin \frac{s}{c}, 0 \right)\end{aligned}$$

și deci

$$k(s) = \|\vec{T}'(s)\| = \frac{a}{c^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} > 0.$$

Deoarece $\vec{T}' = k\vec{N}$, găsim

$$\vec{N}(s) = \left(-\cos \frac{s}{c}, -\sin \frac{s}{c}, 0 \right).$$

Astfel, sensul lui \vec{N} este spre axa cilindrului (fig.80). Din $\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$, rezultă

$$\vec{B}(s) = \left(\frac{b}{c} \sin \frac{s}{c}, -\frac{b}{c} \cos \frac{s}{c}, \frac{a}{c} \right)$$

și deci

$$\vec{B}'(s) = \left(\frac{b}{c^2} \cos \frac{s}{c}, \frac{b}{c^2} \sin \frac{s}{c}, 0 \right).$$

Din $B' = -\tau\vec{N}$ rezultă

$$\tau(s) = \frac{b}{c^2} = \frac{b}{a^2 + b^2} \neq 0.$$

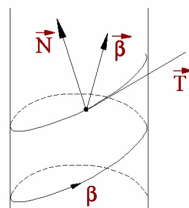


Fig. 80

Invers, fie β o curbă cu viteza unu pentru care $k = \text{const} > 0$ și $\tau = \text{const} \neq 0$. Deoarece $\frac{\tau}{k} = \text{ctg}\theta = \text{const}$, β este o elice cilindrică. Deoarece $k = \text{const}$, rezultă că secțiunea transversală γ este un cerc de rază $\frac{\sin^2 \theta}{k}$. De aceea β este o elice circulară. Luând

$$\vec{u} = \vec{k}, \quad k = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad \tau = \frac{b}{a^2 + b^2},$$

găsim reprezentarea

$$\vec{\beta}(s) = \left(a \cos \frac{s}{c}, a \sin \frac{s}{c}, \frac{bs}{c} \right).$$

8.8. Observații.

1) Curbura și torsiunea determină o curbă din spațiu abstractie făcând de poziție (adică de o izometrie) [34]. Ipoteza esențială care permite demonstrația acestei afirmații este $k > 0$.

Chiar dacă curbura k se anulează într-un singur punct, caracterul geometric al curbei se poate schimba radical în acest punct. Pentru a pune în evidență acest lucru fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție diferentiabilă care satisface condițiile $f(t) = 0$ pentru $t \leq 0$, $f(t) > 0$, $f''(t) > 0$ pentru $t > 0$ și curbele

$$\alpha_1(t) = \begin{cases} (t, 0, f(-t)), & t < 0 \\ (0, 0, 0), & t = 0 \\ (t, f(t), 0), & t > 0; \end{cases} \quad \alpha_2(t) = \begin{cases} (t, f(-t), 0), & t < 0 \\ (0, 0, 0), & t = 0 \\ (t, f(t), 0), & t > 0. \end{cases}$$

Observăm că ambele curbe au aceeași curbură care se anulează numai în $t = 0$. În $t = 0$ putem defini torsiunea, dar pentru $t \neq 0$ ambele curbe au torsiunea nulă. Într-adevăr, arcul $t < 0$ al lui α_1 se află în planul xOz , iar arcul $t > 0$ se află în planul xOy (fig.81). Curba α_2 este în întregime situată în planul xOy (fig.82). Evident cele două curbe nu pot fi suprapuse printr-o izometrie.

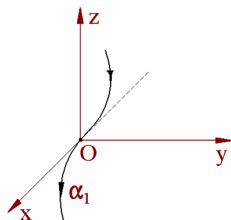


Fig. 81

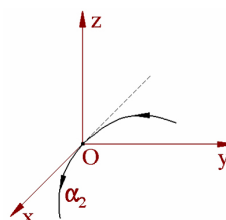


Fig. 82

2) Curbele din plan pot fi privite ca niște curbe particulare din spațiu. Mai restrictiv, orice curbă regulată din spațiu pentru care $k > 0$ este curbă plană dacă și numai dacă $\tau = 0$. De aceea am putea obține elemente Frenet pentru curbele regulate din plan doar prin particularizarea noțiunilor introduse în paragrafele precedente. Acest punct de vedere este însă prea restrictiv și nu oferă libertatea de care dispunem în plan (vezi §8).

9.9 Probleme propuse

1. Fie curba $\alpha : (0, 4) \rightarrow \mathbb{R}^4$, $\alpha(t) = (\sqrt{t}, t\sqrt{t}, 1 - t)$. Să se reparametrizeze prin $h : (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}$, $h(u) = u^2$.

2. Fie curba

$$\vec{\beta}(s) = \left(\frac{(1+s)^{3/2}}{3}, \frac{(1-s)^{3/2}}{3}, \frac{s}{\sqrt{2}} \right), \quad s \in (-1, 1).$$

Să se determine \vec{T} , \vec{N} , \vec{B} , k , π .

3. Să se determine abscisa curbilinie a fiecărei curbe

1) $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t^2/2)$,

2) $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (acht, asht, at)$,

3) $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (t \cos t, t \sin t, t^2/2)$,

luând ca origine punctul în care curba intersectează planul xOy . Să se găsească elementele Frenet \vec{T} , \vec{N} , \vec{B} , k , τ și să se scrie ecuațiile muchiilor și fețelor triedrului Frenet în acest punct.

4. Se numește *curbă Tîțeica*, curba pentru care $\frac{1}{\tau}d^2 = \text{const}$, unde τ este torsiunea într-un punct arbitrar al curbei, iar d distanța de la un punct fix la planul osculator al curbei.

Să se arate că $C : xyz = 1, \quad y^2 = x$ este o curbă Tîțeica.

5. Se consideră curba $\alpha : \vec{\alpha}(t) = 2t\bar{i} + t^2\bar{j} + \ln t\bar{k}, t \in (0, +\infty)$.

a) Să se verifice că $P(2, 1, 0)$ și $Q(4, 4, \ln 2)$ aparțin curbei și să se calculeze lungimea arcului PQ ;

b) Să se scrie triedrul lui Frenet în punctul P și să se calculeze curbura și torsiunea.

Capitolul 10

Suprafețe

10.1 Noțiunea de suprafață

Fie spațiul \mathbb{R}^3 și $T_O\mathbb{R}^3$ spațiul tangent în origine la spațiul \mathbb{R}^3 . Spațiile \mathbb{R}^3 și $T_O\mathbb{R}^3$ sunt izomorfe și de aceea de cele mai multe ori le vom identifica.

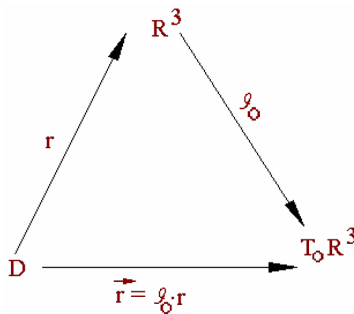


Fig. 83

O suprafață din spațiu este o submulțime M a lui \mathbb{R}^3 , netedă și cu două dimensiuni. Descrierea matematică a unei suprafețe este dată în definițiile care urmează.

Fie D o mulțime deschisă din \mathbb{R}^2 . De exemplu interiorul unui dreptunghi, al unui cerc etc.

1.1. Definiție. O funcție diferențiabilă, regulată și injectivă $r : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ se numește *hartă (de coordonate)*.

Imaginea $r(D)$ a unei hărți r este o submulțime netedă și cu două dimensiuni a lui \mathbb{R}^3 (fig.84). Pe baza diagramei 84, unde J_O este izomorfismul canonic dintre \mathbb{R}^3 și $T_O\mathbb{R}^3$, hărții r putem să-i atașăm o funcție și numai una de tipul $\vec{r} : D \rightarrow T_O\mathbb{R}^3$, ceea ce ne permite să privim mulțimea $r(D)$ ca fiind descrisă de extremitatea unui vector variabil \vec{r} cu originea fixată în O (fig.84).

Din definiția lui $r(D)$ rezultă echivalența

$$P \in r(D) \Leftrightarrow \exists (u, v) \in D, \quad P = r(u, v).$$

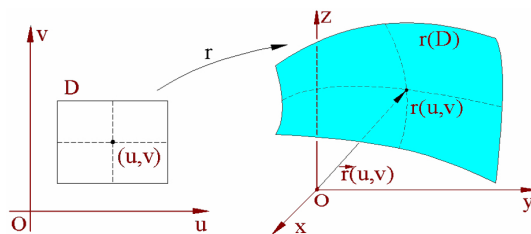


Fig. 84

Evident, funcțiile anterioare sunt caracterizate prin coordonatele lor euclidiene

$$r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in D,$$

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}, \quad (u, v) \in D.$$

Ipoieza de regularitate se face pentru a asigura netezimea lui $r(D)$, iar ipoteza că aplicația r este injectivă asigură că $r(D)$ nu se intersectează cu ea însăși.

Pentru a defini suprafața plecăm de la ideea că orice regiune suficient de mică dintr-o suprafață M trebuie să semene cu o regiune din plan. În particular, la mulțimi deschise din plan trebuie să corespundă mulțimi deschise din suprafața M și invers. Acest lucru este asigurat dacă presupunem că în vecinătatea oricărui punct al său, M se poate exprima ca imaginea unei hărți proprii. O hartă $r : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ se numește *proprie* dacă funcția inversă $r^{-1} : r(D) \rightarrow D$ este continuă (imaginea concretă pentru D poate fi aceea a unei fișii de cauciuc; în acest caz $r(D)$ se obține prin întinderea și îndoirea lui D). Pentru precizare, definim *vecinătatea* U în M a punctului $P \in M$ ca fiind mulțimea tuturor punctelor lui M a căror distanță euclidiană față de P este mai mică decât un număr $\varepsilon > 0$. O parte a lui M se numește *deschisă* dacă odată cu fiecare punct al său conține și o vecinătate U din M a acestui punct.

Hărțile ale căror imagini sunt conținute în M se numesc *hărți în M* .

1.2. Definiție. O submulțime M a lui \mathbb{R}^3 , care se bucură de proprietatea că $\forall P \in M$ există o hartă proprie în M a cărei imagine să conțină o vecinătate a lui P din M , se numește *suprafață* (fig.85).

Observăm că imaginea $M = r(D)$ a unei hărți proprii satisface definiția 1.2 și deci este o suprafață. O asemenea suprafață se numește *simplă*. Definiția 1.2 arată că orice suprafață din \mathbb{R}^3 poate fi concepută ca reuniunea unor suprafețe simple.

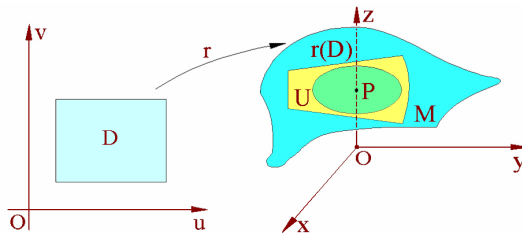


Fig. 85

1.3. Exemple.

1) Sfera este o suprafață în sensul definiției 1.2. Pentru a pune în evidență acest lucru este suficient să dovedim afirmația pentru sfera cu centrul în origine și de rază unu (fig.86)

$$M : x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

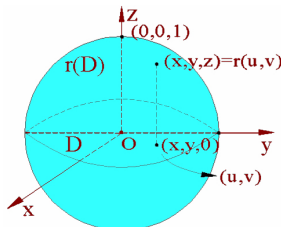


Fig. 86

Ne propunem să găsim o hartă proprie în M care să acopere o vecinătate a polului nord $(0, 0, 1)$. Prin proiecția fiecărui punct (x, y, z) al emisferei nordice a lui M pe planul xOy în $(x, y, 0)$ găsim o corespondență biunivocă a acestei emisfere cu un disc D de rază unu din planul xOy . Dacă identificăm planul xOy cu \mathbb{R}^2 prin $(x, y, 0) \leftrightarrow (x, y)$, atunci D devine un disc din \mathbb{R}^2 care constă din punctele (u, v) pentru care $u^2 + v^2 < 1$. Exprimând corespondența dintre D și emisfera nordică ca o funcție pe D găsim

$$r : D \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad r(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}).$$

Să arătăm că r este o hartă proprie. Mai întâi observăm că r este o funcție diferențiabilă și injectivă. De asemenea r este și regulată deoarece transpusa matricii Jacobian,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial u} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix}, \quad \text{unde } f = \sqrt{1 - u^2 - v^2},$$

are rangul doi, $\forall (u, v) \in D$. Funcția inversă $r^{-1} : r(D) \rightarrow D$, $r^{-1}(x, y, z) = (x, y)$, este continuă. Deci r este o hartă proprie. Facem observația că harta r acoperă o vecinătate a lui $P(0, 0, 1)$ din M . În mod necesar ea acoperă o vecinătate a oricărui alt punct Q din emisfera nordică.

Analog, putem găsi alte cinci hărți proprii, care să acopere celelalte cinci emisfere ale sferei și astfel verificăm că sfera este o suprafață în sensul definiției 1.2.

Sfera este o mulțime compactă în \mathbb{R}^3 . De aceea, din orice acoperire a sa se poate extrage o acoperire finită. Numărul minim de hărți care acoperă sfera este 2, de exemplu hărțile stereografice.

2) Suprafața $M : z = f(x, y)$. Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție diferențiabilă. Graficul său $M = \{(x, y, z) \mid z = f(x, y), (x, y) \in D\}$ este o suprafață a simplă (fig.87) deoarece poate fi acoperit de imaginea lui D prin harta proprie $r : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $r(u, v) = (u, v, f(u, v))$.

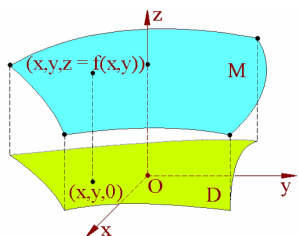


Fig. 87

O hartă de acest tip se numește *hartă Monge*, iar despre M se spune că este dată prin *ecuația carteziană explicită* $z = f(x, y)$.

3) Dăm acum un exemplu din care să rezulte necesitatea ca o hartă să fie proprie.

Presupunem că avem o fâșie dreptunghiulară de cauciuc cu ajutorul căreia construim configurația M din fig.88. Configurația M nu este o suprafață în sensul descris anterior deoarece nu satisface cerința ca în vecinătatea oricărui punct să seamene cu o porțiune din plan. Într-adevăr, de-a lungul lui Oz ea seamănă cu intersecția a două plane. Mai mult, trecerea de la fâșia plană la M este continuă în timp ce trecerea inversă nu este continuă deoarece M trebuie ruptă de-a lungul lui Oz .

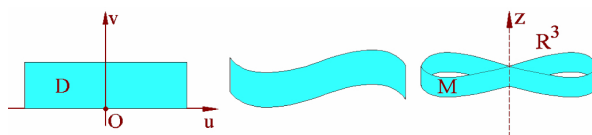


Fig. 88

Matematic, construcția anterioară se prezintă astfel: fie D dreptunghiul deschis $-\pi < u < \pi$, $0 < v < 1$ din \mathbb{R}^2 și $r : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ aplicația definită prin $r(u, v) = (\sin u, \sin 2u, v)$. Se verifică ușor că r este o hartă (aplicație diferentiabilă, injectivă și regulată). Notăm $M = r(D)$. Observăm că $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, unde

$$D_1 = \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \times (0, 1), \quad D_2 = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, 1), \quad D_3 = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \times (0, 1)$$

și deci $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$, unde $M_i = r(D_i)$, $i = 1, 2, 3$. Găsim

$$r^{-1}(x, y, z) = \begin{cases} (-\pi - \arcsin x, z) & \text{pentru } (x, y, z) \in M_1 \\ (\arcsin x, z) & \text{pentru } (x, y, z) \in M_2 \\ (\pi - \arcsin x, z) & \text{pentru } (x, y, z) \in M_3. \end{cases}$$

Funcția r^{-1} nu este continuă în punctele $(0, 0, z)$, $0 < z < 1$. Astfel r nu este o hartă proprie și deci $M = r(D)$ nu este o suprafață în sensul definiției 2.1.

4) Suprafețe definite prin ecuații carteziene implicite.

Considerăm o funcție diferentiabilă de tipul $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Deoarece

$$J(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right),$$

punctele critice ale acestei funcții f (dacă există) se află rezolvând sistemul

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 0.$$

Punctele în care cel puțin una dintre aceste derivate nu se anulează sunt puncte regulate.

Cu ajutorul lui f construim mulțimea

$$M = f^{-1}(c) = \{(x, y, z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = c, \quad c \in \mathbb{R}\},$$

care se numește *mulțime de nivel constant* c sau *mulțime de ecuație carteziană implicită* $f(x, y, z) = c$. Pe scurt, se scrie $M : f(x, y, z) = c$. Presupunem că M nu este vidă și precizăm că, în general, M conține atât puncte regulate cât și puncte critice ale lui f .

1.4. Teoremă. Dacă $M = f^{-1}(c)$ este nevidă și dacă funcția f este regulată (submersie) în punctele lui $M = f^{-1}(c)$, atunci M este o suprafață.

Demonstrație. Pentru fiecare $P(x, y, z) \in M$, trebuie să găsim o hartă proprie care să acopere o vecinătate a lui P din M (fig.89). Ipoteza că f este regulată în punctele lui M este echivalentă cu presupunerea că cel puțin una dintre derivatele parțiale $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ nu este zero în P ; fie, de exemplu, $\frac{\partial f}{\partial z}(P) \neq 0$. În acest caz, teorema funcției implicite spune că în vecinătatea lui P ecuația $f(x, y, z) = c$ definește pe z ca funcție de x și y . Mai precis, există o funcție diferentiabilă g definită pe o vecinătate D a lui (x, y) astfel încât (fig.89)

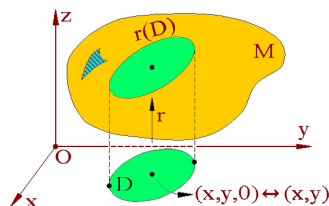


Fig. 89

(1) $\forall (u, v) \in D$, $(u, v, g(u, v)) \in M$, adică $f(u, v, g(u, v)) = c$,

(2) punctele de forma $(u, v, g(u, v))$ cu $(u, v) \in D$ constituie o vecinătate a lui P în M .

Rezultă că harta Monge $r : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $r(u, v) = (u, v, g(u, v))$ satisface cerințele din definiția 1.2. Deoarece P este arbitrar în M , tragem concluzia că M este o suprafață.

Dacă $M : f(x, y, z) = c$ este o suprafață, atunci spunem că M este definită prin *ecuația carteziană implicită* $f(x, y, z) = c$ (denumirea de suprafață pentru $M : f(x, y, z) = c$ se păstrează uneori chiar dacă M conține și puncte critice ale lui f).

Dacă f este un polinom de gradul n , atunci M se numește *suprafață algebrică de ordinul n* . În particular, avem următoarele denumiri: *suprafețe algebrice de ordinul unu (plane)*, *suprafețe algebrice de ordinul doi (cuadrice)* etc.

1.5. Observații.

1) În situații concrete M poate fi dată printr-o ecuație și prin mai multe inecuații în x, y, z (inecuațiile precizează o anumită porțiune din spațiu).

2) Reprezentarea lui M (sau a unei porțiuni din M) în forma

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

se poate face prin intermediul teoremei 1.4 sau prin artificii de calcul.

3) Fie suprafața simplă

$$M : x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in D.$$

În general, trecerea de la această reprezentare la reprezentarea carteziană explicită se poate face numai local. De exemplu, dacă $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}(u_0, v_0) \neq 0$, atunci teorema funcției inverse arată că în vecinătatea lui (u_0, v_0) restricția lui $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, admite inversa $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Astfel, restricția lui $z = z(u, v)$ apare ca o funcție compusă de tipul $z = z(u(x, y), v(x, y))$.

4) În general, dacă există o funcție $f(x, y, z)$ astfel încât

$$f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = c, \quad \forall (u, v) \in D,$$

atunci $f(x, y, z) = c$ este o ecuație carteziană implicită a suprafeței $M : x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in D$.

10.2 Curbe coordonate

În acest paragraf, vor fi prezentate unele proprietăți ale hărților care sunt necesare la studiul unei suprafețe date.

Fie $r : D \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \rightarrow r(u, v)$, o hartă. Funcțiile parțiale $u \rightarrow r(u, v)$ și $v \rightarrow r(u, v)$ sunt curbe cu imaginea în $r(D)$. Explicit, $\forall (u_0, v_0) \in D$, curba $u \rightarrow r(u, v_0)$ se numește *curba de parametru u sau curba $v = v_0$* ; curba $v \rightarrow r(u_0, v)$ se numește *curba de parametru v sau curba $u = u_0$* (fig.90). Astfel imaginea $r(D)$ este acoperită de aceste două familii de curbe, care sunt imaginile prin r ale liniilor orizontale și verticale din D . Prin orice punct al lui $r(D)$ trece o curbă din familia (u) și una din familia (v) . De aceea uneori pentru aceste curbe se întrebuintează denumirea de *curbe coordonate*.

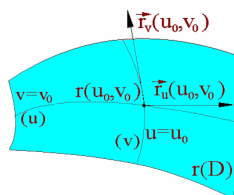


Fig. 90

Dacă $r : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ este o hartă și $(u_0, v_0) \in D$, atunci

- (1) vectorul viteză, în u_0 , al curbei de parametru u se notează $\vec{r}_u(u_0, v_0)$;
- (2) vectorul viteză, în v_0 , al curbei de parametru v se notează $\vec{r}_v(u_0, v_0)$.

Vectorii $\vec{r}_u(u_0, v_0), \vec{r}_v(u_0, v_0)$ se numesc *vitezele parțiale* ale lui r în (u_0, v_0) (fig.90).

Astfel \vec{r}_u și \vec{r}_v , sunt funcții definite pe D ale căror valori în fiecare punct $(u_0, v_0) \in D$ sunt vectori tangenți la \mathbb{R}^3 în $r(u_0, v_0)$. Indicii u și v sunt scriși pentru a sugera derivarea parțială. Dacă harta este dată cu ajutorul coordonatelor sale,

$$r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

atunci vitezele parțiale sunt date de

$$\vec{r}_u = (x_u, y_u, z_u), \quad \vec{r}_v = (x_v, y_v, z_v),$$

cu precizarea că punctul de aplicație al lui \vec{r}_u și \vec{r}_v este prin convenție $r(u, v)$.

Pentru a testa dacă o submulțime M a lui \mathbb{R}^3 este o suprafață, definiția 1.2 cere hărți proprii. Dar deîndată ce știm că M este o suprafață această condiție este de la sine îndeplinită. Într-adevăr, dacă M este o suprafață și dacă $r : D \rightarrow M$ este o hartă în M , atunci se demonstrează că r este o hartă proprie.

În unele probleme restricția ca r să fie injectivă poate fi lăsată deoparte. De aceea admitem

2.1. Definiție. O funcție diferentiabilă și regulată $r : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ a cărei imagine se află într-o suprafață M se numește *parametrizare a regiunii $r(D)$ din M* (astfel o hartă este o parametrizare injectivă).

În acest context u și v se numesc *parametri*, relațiile

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

se numesc *ecuațiile parametrice* ale lui $r(D) \subset M$, iar $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ se numește *ecuația vectorială* a lui $r(D) \subset M$. În unele cazuri $r(D)$ poate fi întreaga suprafață M .

Deoarece parametrizările au o mare importanță în aplicații, vom pune în evidență un mod prin care putem stabili dacă o funcție diferentiabilă $r : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ este o parametrizare a unei regiuni din suprafața M . În primul rând imaginea lui D prin r trebuie să fie în M . Dacă suprafața M este dată implicit prin $f(x, y, z) = c$, atunci funcția compusă $f(r)$ trebuie să aibă valoarea constantă "c".

Pentru a proba că r este regulată, considerăm vitezele parțiale \vec{r}_u și \vec{r}_v și produsul vectorial

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}.$$

Se observă că ultimele două linii dau transpusa matricei Jacobian a lui r . Astfel regularitatea lui r este echivalentă cu $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$, $\forall (u, v) \in D$, adică cu faptul că vectorii viteze parțiale sunt liniar independenți $\forall (u, v) \in D$.

10.3 Suprafețe riglate

Există mai multe moduri de a genera o suprafață. În acest paragraf ne vom referi la unul dintre aceste moduri ce este convenabil pentru anumite suprafețe. Mai întâi reamintim că o dreaptă D ce trece printr-un punct P_0 și are direcția β_0 poate fi reprezentată prin ecuația vectorială $\vec{r} = \vec{\alpha}_0 + v\vec{\beta}_0$, $v \in \mathbb{R}$ (fig.91).

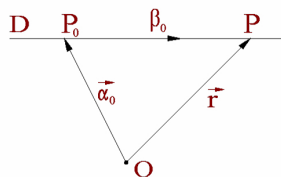


Fig. 91

3.1. Definiție. O suprafață care poate fi generată prin mișcarea unei drepte D care se sprijină pe o curbă $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ se numește *suprafață riglată*.

Dreapta D se numește *generatoarea* suprafeței riglate (fig.92).

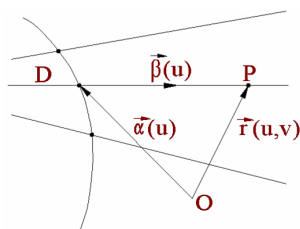


Fig. 92

Având în vedere ecuația vectorială a unei drepte, rezultă că o suprafață riglată poate fi parametrizată întotdeauna sub forma

$$\vec{r}(u, v) = \vec{\alpha}(u) + v\vec{\beta}(u), \quad (u, v) \in D = I \times \mathbb{R},$$

cu precizarea că punctele în care $\bar{r}_u \times \bar{r}_v = \bar{0}$ sunt excluse prin definiția parametrizării.

În cazurile concrete v se poate restrânge la un anumit interval și de aceea în aceste cazuri generatoarele sunt segmente de dreaptă. De asemenea, uneori se convine ca $\vec{\beta}$ să fie privit ca un câmp vectorial definit pe curba α .

1) Suprafețe cilindrice. Dacă generatoarea D se mișcă păstrând aceeași direcție, atunci suprafața riglată se numește *suprafață cilindrică*. Curba α pe care se sprijină D se numește *curbă directoare* (fig.93).

O suprafață cilindrică admite o parametrizare de forma

$$\bar{r}(u, v) = \bar{\alpha}(u) + v\vec{\beta},$$

unde $\vec{\beta}$ este un vector cu coordonatele constante.

În continuare, prin $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ vom înțelege polinoame de gradul unu în trei variabile .

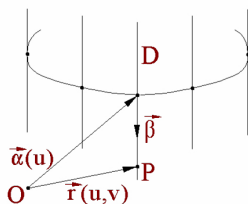


Fig. 93

3.2. Teoremă. O suprafață cilindrică cu generatoarea paralelă cu dreapta $D : P(x, y, z) = 0$, $Q(x, y, z) = 0$ este caracterizată printr-o ecuație de forma $f(P, Q) = 0$.

Demonstrație. Mulțimea dreptelor paralele cu dreapta D este reprezentată analitic prin

$$(1) \quad \begin{cases} P = u \\ Q = w, \end{cases} \quad (u, w) \in \mathbb{R}^2.$$

Condiția ca dreptele (1) să se sprijine pe curba

$$(2) \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in I$$

se obține eliminând pe x, y, z, t între cele cinci ecuații (1) și (2). Se deduce

$$(3) \quad f(u, w) = 0.$$

Regândim suprafața cilindrică ca fiind locul geometric al dreptelor (1) supuse la condiția (3). Ecuația acestui loc geometric se obține eliminând pe parametrii u și v între (1) și (3). Găsim

$$(4) \quad f(P, Q) = 0.$$

Reciproc, fie M submulțimea punctelor din spațiu caracterizate printr-o ecuație de tipul (4). Dacă planele $P = 0$ și $Q = 0$ determină o dreaptă și dacă M nu conține puncte critice ale lui f , atunci M este o suprafață cilindrică. Într-adevăr, pentru orice soluție reală (x, y, z) a lui (4) există două numere reale u și w așa ca $P(x, y, z) = u$, $Q(x, y, z) = w$. Această intersecție reprezintă o

dreaptă paralelă cu $D : P = 0, Q = 0$, iar u și w verifică condiția $f(u, w) = 0$. Deoarece w este funcție de u (teorema funcțiilor implicite!), rezultă că M admite parametrizarea

$$\bar{r}(u, v) = \bar{\alpha}(u) + v\bar{\beta},$$

unde $\bar{\beta}$ dă direcția lui D .

3.3. Observație. Suprafețele cilindrice cu generatoarele paralele cu axele Oz, Ox, Oy se pot caracteriza, respectiv, astfel

$$M : f(x, y) = 0, \quad M : f(y, z) = 0, \quad M : f(z, x) = 0.$$

3.4 Exemplu

Să se scrie ecuația suprafeței cilindrice care are ca directoare curba

$$\Gamma : \begin{cases} 2x^2 + y^2 - 2z = 0, \\ y - 2z = 0 \end{cases},$$

știind că generatoarele sunt perpendiculare pe planul curbei directoare.

Generatoarele suprafeței cilindrice fiind perpendiculare pe planul curbei $y - 2z = 0$, ele vor avea vectorul director $\vec{a} = \vec{N}(0, 1, -2)$. Ecuațiile generatoarelor vor fi $D : \frac{x-u}{0} = \frac{y-w}{1} = \frac{z}{-2}, u, w \in \mathbb{R}$. Punem condiția ca generatoarele să se sprijine pe curba Γ . Sistemul format din ecuațiile generatoarei și curbei trebuie să fie compatibil, obținându-se astfel legătura dintre cei doi parametri u, w sub forma:

$$25u^2 + 8w^2 - 10w = 0.$$

Înlocuind expresiile lui $u = x$ și $w = y + \frac{z}{2}$, obținute din ecuațiile generatoarei, în condiția de compatibilitate va apare ecuația suprafeței cilindrice

$$M : 25x^2 + 2(2y + z)^2 - 5(2y + z) = 0.$$

2) Suprafețe conice. Dacă generatoarea D se mișcă trecând printr-un punct fix V , atunci suprafața riglată se numește *suprafață conică*. Curba pe care se sprijină D se numește *curbă directoare*, iar punctul V se numește *vârf* (fig.94).

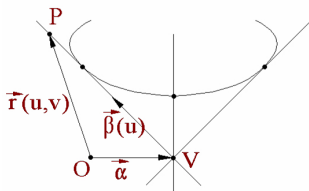


Fig. 94

O suprafață conică admite o parametrizare de forma

$$\bar{r}(u, v) = \bar{\alpha} + v\bar{\beta}(u),$$

unde $\bar{\alpha}$ este un vector cu coordonatele constante a cărui extremitate este vârful V (vârful nu aparține mulțimii pe care o numim suprafață conică, fiind exclus de definiția parametrizării).

3.5. Teoremă. Fie M o suprafață conică cu vârful

$$V : P(x, y, z) = 0, \quad Q(x, y, z) = 0, \quad R(x, y, z) = 0.$$

Mulțimea $M = \{(x, y, z) \mid R(x, y, z) = 0\}$, este caracterizată analitic printr-o ecuație de forma

$$f\left(\frac{P}{R}, \frac{Q}{R}\right) = 0.$$

Demonstrație. Mulțimea dreptelor ce trec prin punctul fix V și care nu aparțin planului $R(x, y, z) = 0$ este reprezentată prin

$$(5) \quad P - uR = 0, \quad Q - wR = 0, \quad (u, w) \in \mathbb{R}^2.$$

Condiția ca aceste drepte să se sprijine pe o curbă de ecuații (2) se obține eliminând pe x, y, z, t între cele cinci ecuații (2) și (5). Se deduce

$$(6) \quad f(u, w) = 0.$$

Regândim suprafața conică ca fiind locul geometric al dreptelor (5), supuse la condiția (6). Ecuația locului geometric se obține eliminând parametrii u, w între (5) și (6). Găsim

$$(7) \quad f\left(\frac{P}{R}, \frac{Q}{R}\right) = 0.$$

Reciproc, fie M mulțimea punctelor din spațiu caracterizate printr-o ecuație de tipul (7). Dacă planele $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$ determină un punct și dacă M nu conține puncte critice ale lui f , atunci M este o suprafață conică. Într-adevăr, pentru orice soluție reală (x, y, z) a lui (7) există două numere reale u și w așa ca $P(x, y, z) - uR(x, y, z) = 0$, $Q(x, y, z) - wR(x, y, z) = 0$, iar u și w sunt legați prin relația $f(u, w) = 0$. Deoarece w se exprimă local prin u , rezultă că suprafața admite parametrizarea

$$\bar{r}(u, v) = \bar{\alpha} + v\bar{\beta}(u),$$

unde $\bar{\alpha}$ este un vector constant a cărui extremitate indică vârful.

3.6. Observație. Din ecuația (5) se poate deduce o ecuație omogenă în trei variabile $g(P, Q, R) = 0$. Reciproc, o ecuație omogenă de tipul $g(P, Q, R) = 0$, unde $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$ determină un punct, reprezintă o suprafață conică.

3.7. Exemplu

Să se scrie ecuația suprafeței conice, care are vârful dat de intersecția planelor $P : x - y + z = 1$, $Q : x + y - z = 0$, $R : x - z = 0$, iar curba directoare are ecuațiile $C : \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0 \\ z = 0. \end{cases}$

Mulțimea dreptelor ce trec prin punctul fix V este reprezentată prin

$$D : x - y + z - 1 - u(x - z) = 0, \quad x + y - z - w(x - z) = 0, \quad (u, w) \in \mathbb{R}^2.$$

Condiția ca aceste drepte să se sprijine pe curbă C se obține eliminând x, y, z între cele patru ecuații ale sistemului format cu ecuațiile dreptelor D și ale curbei C . Se obține

$$(w + 1)^2 - 2(u - 2)^2 - 2uw + 1.$$

Eliminăm parametrii u, w între această relație și ecuațiile dreptelor D se obține ecuația suprafeței conice

$$M : (2x + y - 2z)^2 - 2(-x - y + 3z - 1)^2 - 2x^2 + 2(y - z)^2 + 2y - 2z + 1 = 0.$$

3) Suprafețe conoide. O suprafață riglată generată de o dreaptă D care se sprijină pe o dreaptă fixă Δ (axă) și pe o curbă α (curbă directoare), se numește *conoid* (fig.95).

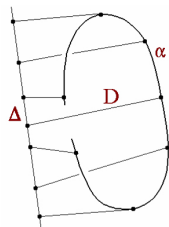


Fig. 95

Dacă Δ este luată drept axă Oz , atunci conoidul admite parametrizarea

$$\bar{r}(u, v) = (u \cos \theta(v), u \sin \theta(v), h(v)).$$

Un conoid a cărui generatoare rămâne paralelă cu un plan fix P se numește *conoid cu plan director*. Acest conoid admite o parametrizare de forma

$$\bar{r}(u, v) = \bar{\alpha}(u) + v\bar{\beta}(u),$$

unde $\bar{\beta} \parallel P$ și $(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) \parallel \Delta$.

3.8. Teoremă. Fie M conoidul cu planul director $P = 0$ și cu axa $\Delta : Q = 0, R = 0$. Mulțimea $M \setminus \{(x, y, z) \mid P(x, y, z) = u, R(x, y, z) = 0\}$ este caracterizată analitic printr-o ecuație de forma

$$f\left(P, \frac{Q}{R}\right) = 0.$$

Demonstrație. Abstracție făcând de dreptele $D : P = u, R = 0$, mulțimea dreptelor paralele cu P și care întâlnesc pe Δ este reprezentată analitic prin

$$(8) \quad \begin{cases} P = u \\ Q - wR = 0. \end{cases}$$

Condiția ca aceste drepte să se sprijine pe o curbă α de ecuații (2) se obține eliminând pe x, y, z, t între cele cinci ecuații (2) și (8). Se deduce $f(u, w) = 0$, și deci conoidul cu plan director are ecuația

$$(9) \quad f\left(P, \frac{Q}{R}\right) = 0.$$

Reciproc, fie N submulțimea punctelor din spațiu caracterizate printr-o ecuație de tipul (9). Dacă $P = 0$ este ecuația unui plan care taie dreapta $\Delta : Q = 0, R = 0$ și dacă N nu conține puncte critice ale lui f , atunci N este un conoid. Într-adevăr, pentru orice soluție reală (x, y, z) a lui (9) există două numere reale u, w așa ca $P = u, Q - wR = 0$ cu $f(u, w) = 0$.

3.9. Exemplu

Să se scrie ecuația suprafeței conoid generată de o dreaptă care se sprijină pe axa Oz , rămâne paralelă cu planul xOy și se sprijină pe dreapta

$$d : \begin{cases} x - z = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

Mulțimea dreptelor D , paralele cu planul xOy și care se sprijină pe dreapta d , este determinată de intersecția a două fascicule de plane: unul format din plane paralele cu xOy și celălalt determinat de axa Oz . Deci

$$D : \begin{cases} z = u \\ x + wy = 0 \end{cases}$$

Din condiția ca dreptele D să se sprijină pe dreapta d , se obține sistemul

$$\begin{cases} z = u \\ x + wy = 0 \\ x - z = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

Eliminăm x, y și z din sistem vom obține condiția de compatibilitate

$$2u + w(3 - u) = 0.$$

Eliminând u și v din această ecuație și ecuațiile generatoarei se deduce ecuația suprafeței conoid

$$M : 2x - \frac{x}{y}(3 - z) = 0.$$

10.4 Suprafețe de rotație

4.1. Definiție. O suprafață care poate fi generată prin rotația unei curbe C în jurul unei drepte fixe D , numită *axă de rotație*, se numește *suprafață de rotație*.

Fie $P(x, y, z) = 0$ un plan perpendicular pe axa D și $\Sigma(x, y, z) = 0$ o sferă cu centrul pe D . Avem

4.2. Teoremă. O suprafață de rotație cu axa D este caracterizată printr-o ecuație carteziană implicită de forma $f(P, \Sigma) = 0$.

Demonstrație. Orice punct de pe curba C se va deplasa într-un plan perpendicular pe axă, $P = u$ și va descrie un cerc cu centrul pe axa de rotație (fig.96, unde axa de rotație este Ox). De aceea suprafața de rotație poate fi privită ca fiind locul geometric al cercurilor cu centrele pe D , care trec prin C și ale căror plane sunt perpendiculare pe D . Astfel sistemul

$$\begin{cases} \Sigma(x, y, z) = w, & w > 0 \\ P(x, y, z) = u \\ x = x(t), & y = y(t), & z = z(t) \end{cases}$$

trebuie să fie compatibil. Eliminând pe x, y, z, t rezultă

$$(10) \quad f(u, w) = 0.$$

Regândim suprafața de rotație ca fiind locul geometric al cercurilor $\Sigma(x, y, z) = w$, $P(x, y, z) = u$ supuse la condiția (10). Eliminând parametrii w și u găsim

$$M : f(P, \Sigma) = 0.$$

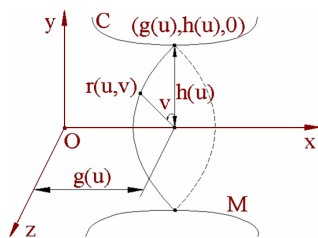


Fig. 96

Reciproca este evidentă.

Cazul cel mai simplu este acela în care C este o curbă plană cu axa D conținută în planul curbei. În acest caz, cercurile din M generate prin rotația fiecărui punct al lui C în jurul axei D se numesc *paralele*, iar diversele poziții ale lui C se numesc *meridiane*. Pentru simplificare să presupunem că C este în planul xOy , iar D este Ox (fig.96).

- 1) Dacă $C : f(x, y) = 0, z = 0, y > 0$, atunci $M : f(x, y^2 + z^2) = 0$.
- 2) Dacă C este dată prin parametrizarea

$$\alpha(u) = (g(u), h(u), 0), \quad h(u) > 0, \quad u \in I,$$

atunci M admite parametrizarea

$$r(u, v) = (g(u), h(u) \cos v, h(u) \sin v), \quad u \in I, \quad v \in \mathbb{R}.$$

4.2. Exemplu

Să se scrie ecuația suprafeței ce se obține prin rotirea dreptei Ox în jurul dreptei $D : x = y = z$

Cercurile generatoare ale suprafeței au centrul pe axa de rotație D , raza variabilă și planul fiecărui cerc este perpendicular pe D . Familia cercurilor Γ se va scrie ca intersecția dintre o sferă cu raza variabilă, cu centrul pe axa de rotație cu un fascicul de plane perpendicular pe axa de rotație. Luând originea ca un punct al dreptei D , rezultă

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = w, & w > 0 \\ x + y + z = u. \end{cases}$$

Din condiția ca Γ să se sprijine pe axa Ox , obținem sistemul:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = w^2 \\ x + y + z = u \\ y = 0 \\ z = 0, \end{cases}$$

care trebuie să fie compatibil.

Eliminăm x, y și z din sistem vom obține condiția de compatibilitate:

$$u^2 = w^2.$$

Eliminând parametrii w și u din această ecuație și ecuațiile cercurilor generatoare se obține ecuația suprafeței de rotație

$$M : xy + xz + yz = 0.$$

10.5 Vectori tangenți la o suprafață

Ne propunem să arătăm că pe orice suprafață M se poate introduce un calcul diferențial asemănător calculului diferențial obișnuit din \mathbb{R}^2 . Elementele acestui calcul: funcții, câmpuri vectoriale tangente etc, aparțin suprafeței și nu spațiului euclidian \mathbb{R}^3 în care este scufundată suprafața.

Presupunem că f este o funcție reală definită numai pe suprafața M , adică $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă $r : D \rightarrow M$ este o hartă, atunci $f \circ r : D \rightarrow \mathbb{R}$ se numește *expresia lui f în coordonate*. Dacă $f \circ r$ este diferențiabilă în sens obișnuit, oricare ar fi r , atunci f se numește *diferențiabilă*; mai general, $f : M \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ se numește *diferențiabilă* dacă se poate extinde diferențiabil la o mulțime deschisă în \mathbb{R}^3 care conține pe M .

Fie acum funcția $F : \mathbb{R}^n \rightarrow M$. Orice hartă r în M dă o expresie în coordonate $r^{-1} \circ F$ pentru F . Evident această funcție compusă este definită numai pe mulțimea (deschisă) $U \subset \mathbb{R}^n$ pentru care $F(U) \subset r(D)$. Dacă $r^{-1} \circ F$ este diferențiabilă în sens obișnuit, oricare ar fi r , atunci funcția F se numește *diferențiabilă*.

Fie M și N două suprafețe, r_1 o hartă în M și r_2 o hartă în N . O funcție $F : M \rightarrow N$ se numește *diferențiabilă* dacă funcția compusă $r_2^{-1} \circ F \circ r_1$ este diferențiabilă în sens obișnuit, oricare ar fi r_1 și r_2 .

În particular, o funcție diferențiabilă de tipul $\alpha : I \rightarrow M$, unde I este un interval deschis al dreptei reale, se numește *curbă* în M .

5.1. Teoremă. Fie curba $\alpha : I \rightarrow M$ și harta $r : D \rightarrow M$. Dacă $\alpha(I) \subset r(D)$, atunci există o pereche de funcții diferențiabile u, v definite pe I astfel încât

$$\alpha(t) = r(u(t), v(t)), \quad t \in I \quad \text{sau} \quad \alpha = r(u, v).$$

Demonstrație. Prin ipoteză, expresia în coordonate $r^{-1} \circ \alpha : I \rightarrow D$ este diferențiabilă. Ea este o curbă plană a cărei imagine se află în domeniul de definiție D al lui r (fig.97). Dacă (u, v) sunt coordonate euclidiene ale lui $r^{-1} \circ \alpha$ adică $r^{-1}(\alpha(t)) = (u(t), v(t))$, atunci $\alpha = r \circ (r^{-1} \circ \alpha) = r(u, v)$. Funcțiile u și v sunt unic determinate. Într-adevăr, din presupunerea $\alpha = r(u_1, v_1)$, rezultă

$$(u, v) = r^{-1} \circ \alpha = r^{-1}(r(u_1, v_1)) = (u_1, v_1).$$

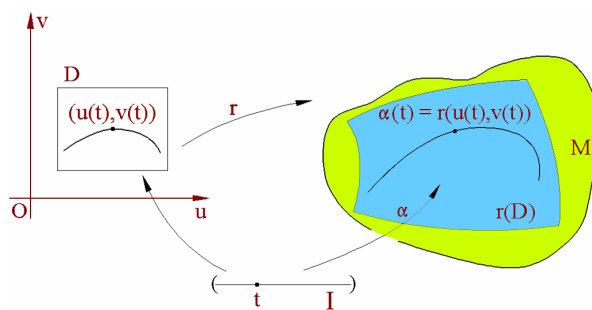


Fig. 97

Funcțiile u, v sunt numite *coordonatele curbei α* în raport cu harta r .

Dăm fără demonstrație

5.2. Teoremă. Fie M o suprafață. Dacă $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^3$ este o funcție diferențiabilă a cărei imagine se află în M , atunci funcția $F : \mathbb{R}^n \rightarrow M$ este diferențiabilă în sensul dat în acest paragraf.

Această teoremă arată legătura strânsă între calculele din \mathbb{R}^3 și calculele de pe suprafața M . De exemplu, ea implică faptul că o curbă din \mathbb{R}^3 care se află în M este o curbă a lui M .

Fie M o suprafață și r o hartă în M . Deoarece harta r este o funcție diferentiabilă definită pe $D \subset \mathbb{R}^2$ și cu valori în \mathbb{R}^3 , rezultă că r este diferentiabilă și ca funcție în M .

5.3. Consecință. Dacă r_1 și r_2 sunt hărți într-o suprafață M ale căror imagini se suprapun, atunci funcțiile compuse $r_1^{-1} \circ r_2$ și $r_2^{-1} \circ r_1$ sunt aplicații diferentiabile definite pe mulțimi deschise din plan (fig.98).

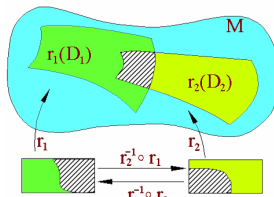


Fig. 98

De exemplu, funcția $r_2^{-1} \circ r_1$ este definită numai pentru acele puncte (u, v) din D_1 pentru care $r_1(u, v)$ se află în imaginea $r_2(D_2)$ a lui r_2 (fig.98).

După un raționament analog celui folosit pentru demonstrația teoremei 5.1, consecința 5.3 poate fi retranscrisă astfel

5.4. Consecință. Dacă r_1 și r_2 sunt hărți ale căror imagini se suprapun în M , atunci există o pereche unică de funcții diferentiabile f și g astfel încât $r_2(u, v) = r_1(f(u, v), g(u, v))$, $\forall (u, v)$ din domeniul de definiție al lui $r_1^{-1} \circ r_2$.

Analog se poate exprima r_1 în funcție de r_2 .

Consecința 5.3 sugerează o metodă concretă de a stabili dacă o funcție este sau nu diferentiabilă pe M . Dacă $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, atunci în loc să verificăm că toate expresiile sale în coordonate $f \circ r$ sunt diferentiabile în sens euclidian, este suficient să facem aceasta pentru un anumit număr de hărți care să acopere pe M . Adesea este suficientă o singură hartă. Demonstrația este un exercițiu din calculul cu funcții compuse. Într-adevăr, fie r_2 o hartă arbitrară; din faptul că $f \circ r_1$ și $r_1^{-1} \circ r_2$ sunt diferentiabile rezultă că $f \circ r_1 \circ r_1^{-1} \circ r_2$ este diferentiabilă. În general ultima funcție este o restricție a lui $f \circ r_2$. Dacă însă imaginea lui r_1 acoperă pe M , atunci $f \circ r_1 \circ r_1^{-1} \circ r_2$ reprezintă pe $f \circ r_2$ și astfel diferentiabilitatea este demonstrată.

Din punct de vedere intuitiv este clar ce înseamnă un vector tangent la o suprafață M . Definiția formală se bazează pe ideea că o curbă din M trebuie să aibă toți vectorii viteză tangenți la M .

5.5. Definiție. Fie M o suprafață și P un punct oarecare din ea. Un vector \vec{w} tangent la \mathbb{R}^3 în P se numește *tangent* la M în P dacă este vectorul viteză al unei curbe din M ce trece prin P .

Mulțimea tuturor vectorilor tangenți la M în P se numește *planul tangent* al lui M în P și se notează cu $T_P M$ (fig.99). Imaginea concretă a lui $T_P M$ în \mathbb{R}^3 poartă aceeași denumire.

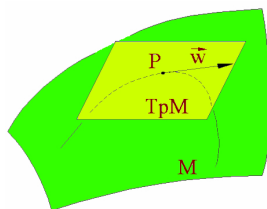


Fig. 99

Teorema următoare arată că $T_P M$ este un subspațiu vectorial bidimensional al spațiului tangent $T_P \mathbb{R}^3$.

5.6. Teoremă. Fie P un punct al unei suprafețe M și r o hartă în M astfel încât $r(u_0, v_0) = P$. Un vector \vec{w} tangent la \mathbb{R}^3 în P este tangent la M dacă și numai dacă \vec{w} poate fi scris ca o

combinație liniară a lui $\vec{r}_u(u_0, v_0)$ și $\vec{r}_v(u_0, v_0)$.

Demonstrație. Vitezele parțiale \vec{r}_u și \vec{r}_v sunt vectori tangenți la M în orice punct al lui $r(D)$ deoarece curbele coordonate ale lui r sunt curbe în M (fig.100).

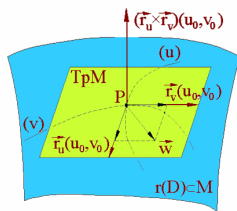


Fig. 100

Să presupunem că \vec{w} este tangent la M în P , dacă există o curbă α pe M pentru care $\alpha(0) = P$ și $\alpha'(0) = \vec{w}$. După teorema 5.1, curba α poate fi scrisă în forma $\alpha = r(u, v)$ sau $\vec{\alpha}(t) = \vec{r}(u(t), v(t))$. Regula de derivare a funcțiilor compuse dă

$$\vec{\alpha}' = \vec{r}_u(u, v) \frac{du}{dt} + \vec{r}_v(u, v) \frac{dv}{dt}.$$

Deoarece $\alpha(0) = P = r(u_0, v_0)$, avem $u(0) = u_0$, $v(0) = v_0$ și deci, pentru $t = 0$, găsim

$$\vec{w} = \vec{\alpha}'(0) = \frac{du}{dt}(0) \vec{r}_u(u_0, v_0) + \frac{dv}{dt}(0) \vec{r}_v(u_0, v_0).$$

Observație. $\vec{0}_P \in T_P M$, deoarece punctul P poate fi gândit ca fiind curba constantă $\gamma(t) = P$, $\forall t \in I$ și $\vec{\gamma}'(t) = \vec{0}$.

Invers să presupunem că vectorul $\vec{w} \in T_P \mathbb{R}^3$ poate fi scris în forma $\vec{w} = c_1 \vec{r}_u(u_0, v_0) + c_2 \vec{r}_v(u_0, v_0)$. Calculul anterior arată că \vec{w} este vectorul viteză al curbei $\alpha(t) = r(u_0 + tc_1, v_0 + tc_2)$ din M la momentul $t = 0$. Astfel \vec{w} este tangent la M în P .

Deoarece vitezele parțiale sunt vectori liniari independenți, teorema anterioară arată că, $\forall P \in r(D) \subset M$, vitezele parțiale formează o bază a planului tangent $T_P M$.

5.7. Definiție. O funcție \vec{X} care asociază fiecărui punct $P \in M$ un vector $\vec{X}(P)$ tangent la \mathbb{R}^3 în P se numește *câmp vectorial euclidian* pe suprafața M .

Fie $\vec{X} = f(x, y, z)\vec{i} + g(x, y, z)\vec{j} + h(x, y, z)\vec{k}$ un câmp vectorial euclidian pe suprafața M . Dacă funcțiile coordonate f, g, h sunt diferentiabile pe M , atunci câmpul \vec{X} se numește *diferențiabil*.

Un câmp vectorial euclidian \vec{Y} pentru care, $\forall P \in M$, $\vec{Y}(P)$ este tangent la M în P se numește *câmp vectorial tangent* la M . Dacă \vec{Y} este un câmp vectorial tangent la M , atunci oricare ar fi harta $r : D \rightarrow M$, avem

$$\vec{Y}(r(u, v)) = F(u, v)\vec{r}_u + G(u, v)\vec{r}_v.$$

De aceea \vec{Y} este diferentiabil dacă și numai dacă funcțiile F și G sunt diferentiabile pe D .

În continuare presupunem că lucrăm numai cu câmpuri diferentiabile și precizăm că de cele mai multe ori câmpurile pe M sunt definite local (numai în anumite regiuni ale lui M).

5.8. Observație. Câmpurile vectoriale tangente la M aparțin calculului din M , deoarece conform definiției 5.5 ele dau în fiecare punct vitezele unor curbe din M .

10.6 Normala și planul tangent la o suprafață

Fie M o suprafață și P un punct al său. Un vector \vec{z} cu originea în P care este ortogonal planului tangent $T_P M$, adică ortogonal oricărui vector tangent la M în P , se numește *vector normal* la M . Un câmp vectorial euclidian \vec{Z} definit pe M se numește *câmp normal* pe M dacă fiecare vector $\vec{Z}(P)$ este normal la M .

Deoarece $T_P M$ este un subspațiu bidimensional al lui $T_P \mathbb{R}^3$, există numai o *direcție normală* la M în P , adică toți vectorii \vec{z} normali în P sunt coliniari. Astfel, dacă \vec{z} nu este zero, rezultă că $T_P M$ constă numai din vectorii lui $T_P \mathbb{R}^3$ care sunt ortogonali lui \vec{z} . Dreapta ce trece prin P și este perpendiculară pe planul tangent $T_P M$ se numește *normala* suprafeței în punctul P . Fie $r(D)$ regiunea din M acoperită de harta $r : D \rightarrow M$. Funcția vectorială

$$\vec{Z}(u, v) = \vec{r}_u \times \vec{r}_v$$

atașează fiecărui punct din D un vector normal la M în $r(u, v)$ (fig.100). De aceea $\vec{Z}(u, v)$ poate fi privit ca un câmp normal definit local pe M .

Dacă gândim $T_P M$ ca fiind determinat de punctul $P(x_0, y_0, z_0)$ și de vectorul normal $\vec{Z}(u_0, v_0)$, atunci planul tangent la suprafața M în punctul P are ecuația

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_{u_0} & y_{u_0} & z_{u_0} \\ x_{v_0} & y_{v_0} & z_{v_0} \end{vmatrix} = 0,$$

unde

$$x_0 = x(u_0, v_0), \quad x_{u_0} = x_u(u_0, v_0) \quad \text{etc.}$$

Normala la M în P are ecuațiile

$$\frac{x - x_0}{D(y, z)} = \frac{y - y_0}{D(z, x)} = \frac{z - z_0}{D(x, y)} = \frac{z - z_0}{D(u_0, v_0)}.$$

Dacă suprafața M este dată prin ecuația carteziană implicită, atunci este ușor să punem în evidență câmpul normal și câmpurile tangente.

6.1. Teoremă. *Dacă $M : f(x, y, z) = c$ este o suprafață, atunci gradientul*

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k},$$

definit pe M , este un câmp vectorial normal care nu se anulează în nici un punct al lui M (fig.101).

Demonstrație. Gradientul nu se anulează pe M deoarece prin ipoteză derivatele parțiale f_x, f_y, f_z nu se pot anula simultan în nici un punct al lui M (§1).

Să arătăm acum că $\langle \nabla f(P), \vec{w} \rangle = 0, \quad \forall \vec{w} \in T_P M$. Pentru aceasta observăm că dacă α este o curbă pe M , atunci $f(\alpha) = f(x(t), y(t), z(t)) \equiv c$. Deci

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha) \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha) \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}(\alpha) \frac{dz}{dt} = 0.$$

Alegând pe α astfel încât să aibă viteza inițială

$$\vec{\alpha}'(0) = \vec{w} = w_1\vec{i} + w_2\vec{j} + w_3\vec{k},$$

în $\alpha(0) = P$, găsim

$$\begin{aligned} 0 &= f_x(\alpha(0))\frac{dx}{dt}(0) + f_y(\alpha(0))\frac{dy}{dt}(0) + f_z(\alpha(0))\frac{dz}{dt}(0) = \\ &= f_x(P)w_1 + f_y(P)w_2 + f_z(P)w_3 = \langle \nabla f(P), \vec{w} \rangle. \end{aligned}$$

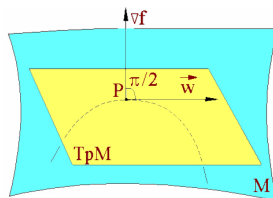


Fig. 101

Din punct de vedere analitic, ecuația planului tangent la M în $P(x_0, y_0, z_0)$ este

$$(x - x_0)f_{x_0} + (y - y_0)f_{y_0} + (z - z_0)f_{z_0} = 0,$$

iar ecuațiile normalei sunt

$$\frac{x - x_0}{f_{x_0}} = \frac{y - y_0}{f_{y_0}} = \frac{z - z_0}{f_{z_0}}.$$

În particular, pentru reprezentarea carteziană explicită $z = f(x, y)$ avem: planul tangent,

$$z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0),$$

și normala,

$$\frac{x - x_0}{p_0} = \frac{y - y_0}{q_0} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

6.2. Observații. 1) Planul tangent $T_P M$ este aproximația liniară a suprafeței M în vecinătatea lui P .

2) Câmpurile vectoriale normale aparțin calculului din \mathbb{R}^3 . Ele sunt folosite în studiul lui M din punctul de vedere al unui observator din \mathbb{R}^3 .

6.3. Exemplu Să se scrie ecuația planului tangent și ecuațiile normalei în punctul $P(1, \frac{1}{2}, 2)$ la suprafața $M : z = \frac{1}{xy}$

Se poate scrie reprezentarea implicită a suprafeței $M : xyz = 1$. Vectorul perpendicular pe planul tangent pentru această reprezentare a suprafeței este $\text{grad}f(P) = f_x(P)\vec{i} + f_y(P)\vec{j} + f_z(P)\vec{k}$.

Se obține $\text{grad}f(x, y, z) = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$.

Planul tangent la suprafață în punctul P va fi:

$$(x - 1) + 2(y - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(z - 2) = 0$$

iar normala la suprafață în punctul P va avea ecuațiile:

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - \frac{1}{2}}{2} = \frac{z - 2}{\frac{1}{2}}.$$

Suprafețe conexe. Fie $\alpha : I \rightarrow M$ o curbă de pe suprafața M și $[a, b] \subset I$. Restricția $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ se numește *segment de curbă* sau *1-segment* pe suprafața M .

7.1. Definiție. O suprafață M se numește *conexă* (dintr-o bucată) dacă $\forall P, Q \in M$ există un segment de curbă $\alpha : [a, b] \rightarrow M$, cel puțin continuă, astfel încât $\alpha(a) = P$ și $\alpha(b) = Q$, adică imaginea $\alpha([a, b]) \subset M$ unește punctele P și Q (fig.102).

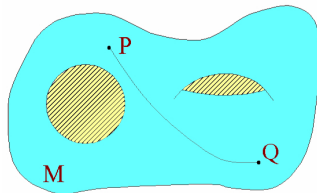


Fig. 102

O suprafață conexă M este "dintr-o singură bucată". De exemplu, exceptând hiperboloidul cu două pânze care nu este conex, toate cuadricele nedegenerate sunt conexe.

7.2. Teoremă. Fie M_1 și M_2 două suprafețe. Dacă M_1 este conexă iar $F : M_1 \rightarrow M_2$ este o aplicație surjectivă și diferențiabilă, atunci M_2 este conexă.

Demonstrație. Fie R, S două puncte arbitrare din M_2 . Deoarece F este surjectivă există $P, Q \in M_1$ astfel încât $F(P) = R$, $F(Q) = S$. Dar, prin ipoteză M_1 este conexă și deci există un segment de curbă α care unește pe P cu Q . Imaginea lui α prin funcția continuă F este un segment de curbă ce unește pe R cu S , adică M_2 este conexă.

7.3. Consecință. Dacă D este o mulțime deschisă și conexă din plan, iar $r : D \rightarrow M$ este o parametrizare, atunci regiunea $r(D) \subset M$ este conexă.

7.4. Exemplu. Hiperboloidul cu o pânză este conex deoarece el este mulțimea valorilor funcției diferențiabile

$$r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad r(u, v) = (x, y, z),$$

$$x = a \operatorname{ch} u \cos v, \quad y = b \operatorname{ch} u \sin v, \quad z = c \operatorname{sh} u \quad (a, b, c > 0),$$

definită pe mulțimea conexă \mathbb{R}^2 .

Analog putem stabili că fiecare dintre pânzele hiperboloidului cu două pânze este conexă. Deoarece aceste două pânze sunt mulțimi disjuncte, rezultă că hiperboloidul cu două pânze nu este conex.

7.5. Teoremă. Fie M o suprafață conexă și $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ o aplicație diferențiabilă.

(1) Dacă $df = 0$, atunci $f = \text{const}$.

(2) Dacă f nu se anulează pe M , atunci $f > 0$ sau $f < 0$ peste tot.

Demonstrație. Fie $P, Q \in M$ două puncte arbitrare. Prin ipoteză acestea pot fi unite printr-un segment de curbă $\alpha : [a, b] \rightarrow M$. Utilizând funcția diferențiabilă $f \circ \alpha : [a, b] \rightarrow [f(\alpha(c)), f(\alpha(d))]$, $c, d \in [a, b]$, căreia îi aplicăm teorema creșterilor finite și proprietatea lui Darboux, deducem $f = \text{const}$, și respectiv $f > 0$ sau $f < 0$ peste tot.

7.6. Observație. O suprafață M poate fi privită ca un spațiu topologic. În acest sens, M este conexă dacă verifică una din condițiile:

(1) M nu este reuniunea a două mulțimi nevide, disjuncte și deschise;

(2) singurele submulțimi închise și deschise ale lui M sunt $\emptyset \subset M$ și M .

Suprafețe simplu conexe. Suprafața M se numește *simplu conexă* (fără găuri) dacă orice curbă închisă de pe M poate fi deformată prin continuitate (fără a părăsi punctele suprafeței) astfel încât să se reducă la un punct (fig.103). De exemplu, sfera este (conexă și) simplu conexă;

cilindrul circular drept (este conex dar) nu este simplu conex, deoarece cercurile situate în plane perpendiculare pe axa cilindrului nu se pot reduce la un punct fără a ieși din cilindru; hiperboloidul cu două pânze (nu este conex dar) este simplu conex etc.

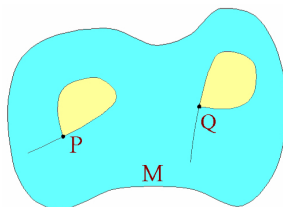


Fig. 103

Suprafețe compacte. Fie $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ și *intervalul bidimensional* închis (dreptunghi închis) $D_0 : a \leq u \leq b, c \leq v \leq d$.

Fie M o suprafață. O funcție diferențiabilă de tipul $r : D_0 \rightarrow M$ se numește *2-segment* (placă) în M , fig.104. (Atributul diferențiabilă este folosit în sensul că r se poate extinde diferențiabil la un interval bidimensional deschis ce conține pe D_0).

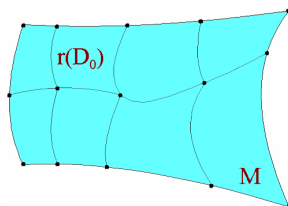


Fig. 104

7.7. Definiție. Suprafața M se numește *compactă* dacă poate fi acoperită prin imaginile unui număr finit de 2-segmente.

De exemplu sfera este o suprafață compactă deoarece este acoperită de imaginea 2-segmentului $r(u, v) = (x_0 + a \cos u \sin v, y_0 + a \sin u \sin v, z_0 + a \cos v)$, $(u, v) \in D_0 = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$. De asemenea torul de rotație este o suprafață compactă.

Se știe că orice funcție (reală) continuă pe un dreptunghi închis D_0 își atinge maximum (minimum) într-un punct din D_0 . Acest rezultat îl folosim pentru a demonstra teorema următoare.

7.8. Teoremă. Dacă f este o funcție continuă definită pe o suprafață compactă M , atunci f își atinge maximum (minimum) într-un punct din M .

Demonstrație. Fie $r_i : D_{0i} \rightarrow M$, $1 \leq i \leq k$, 2-segmentele ale căror imagini acoperă pe M . Deoarece aplicațiile r_i sunt diferențiabile, iar f este continuă rezultă că $f \circ r_i : D_{0i} \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții continue. De aceea, pentru fiecare i , există punctul $(u_i, v_i) \in D_{0i}$ în care $f \circ r_i$ ia valoarea maximă. Fie $f(r_1(u_1, v_1))$ cel mai mare dintre numerele $f(r_i(u_i, v_i))$. Să arătăm că $P = r_1(u_1, v_1)$ este punctul în care f are valoarea maximă. Într-adevăr, deoarece r_i sunt în număr finit, $\forall Q \in M$, există un indice i așa ca $Q = r_i(u, v)$ și avem

$$f(P) = f(r_1(u_1, v_1)) \geq f(r_i(u_i, v_i)) \geq f(r_i(u, v)) = f(Q),$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Teorema anterioară poate fi folosită pentru a proba că o suprafață nu este compactă. De exemplu, cilindrul M cu generatoarele paralele cu Oz nu este o suprafață compactă deoarece funcția coordonată z dă cota $z(P)$, $\forall P \in M$, și astfel ea nu are valoare maximă pe M .

O submulțime M din \mathbb{R}^3 se numește *închisă* în \mathbb{R}^3 dacă complementara sa $\mathbb{R}^3 \setminus M$ este deschisă în \mathbb{R}^3 .

O submulțime M din \mathbb{R}^3 se numește *mărginită* dacă distanța euclidiană dintre două puncte oarecare ale sale este mai mică decât un număr real dat. Cu alte cuvinte, M este mărginită dacă poate fi inclusă într-o sferă de rază finită. Astfel problema mărginirii lui M se reduce la cercetarea existenței maximului funcției $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ pe M sau la existența minimelor și maximelor funcțiilor $f(x, y, z) = x, y, z$ pe M .

7.9. Teorema Heine–Borel. *O submulțime din \mathbb{R}^3 este compactă dacă și numai dacă ea este închisă și mărginită.*

Fie $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție diferentiabilă. O suprafață de tipul $M : f(x, y, z) = c$ este închisă deoarece ea constă din punctele $f^{-1}(\{c\})$, mulțimea $\{c\}$ este o submulțime închisă din \mathbb{R} , iar f este o funcție continuă. Astfel, o suprafață $M : f(x, y, z) = c$ este compactă dacă și numai dacă ea este mărginită în \mathbb{R}^3 . De exemplu elipsoidul este compact, dar hiperboloizii nu sunt compacți.

7.10. Teoremă. *Dacă $f(x, y, z)$ este un polinom omogen de gradul $n \geq 1$ care are cel puțin o valoare strict pozitivă, atunci $M : f(x, y, z) = 1$ este o suprafață. Dacă $f(P) > 0$ exceptând $P(0, 0, 0)$, atunci M este compactă și reciproc.*

Demonstrație. Prin ipoteză există un punct $P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ așa ca $f(x, y, z) = a > 0$. Astfel M conține punctul $\frac{1}{\sqrt[n]{a}}(x, y, z)$ și deci M nu este vidă. Din formula lui Euler pentru funcțiile omogene rezultă că orice punct Q care satisface $f_x(Q) = 0, f_y(Q) = 0, f_z(Q) = 0$ satisface și $f(Q) = 0$. De aceea $Q \notin M$ și astfel M este o suprafață regulată.

Să presupunem $f > 0$ exceptând originea. Fie sfera S și $i : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ injecția naturală. Funcția compusă $f \circ i : S \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă. Deoarece S este compactă funcția $f \circ i$ are o valoare minimă b și $b > 0$. Dacă $Q \in \mathbb{R}^3$, avem

$$f(Q) = \|Q\|^n f\left(\frac{Q}{\|Q\|}\right) \geq \|Q\|^n b.$$

De aceea pentru $f(Q) = 1$ găsim $\|Q\| \leq \frac{1}{\sqrt[n]{b}}$. Rezultă că $M = f^{-1}(1)$ este conținută în sfera închisă cu centrul în O și de rază $\frac{1}{\sqrt[n]{b}}$. Astfel M este mărginită și deci M este compactă.

Reciproc, presupunem că M este o suprafață compactă. Rezultă că M este mărginită și deci $f(Q) \geq \|Q\|^n b$. De aceea $f > 0$, exceptând originea.

Suprafețe orientabile. În această secțiune ne propunem să arătăm că suprafețele pot avea două fețe sau numai o față.

7.11. Definiție. O suprafață M se numește *orientabilă* dacă posedă un câmp vectorial normal \vec{Z} care nu se anulează în nici un punct al lui M .

Din secțiunea 6 rezultă că:

- orice suprafață simplă este orientabilă;
- orice suprafață $M : f(x, y, z) = c$ (care nu posedă puncte critice ale lui f) este orientabilă. De exemplu planul, sfera, quadricile nedegenerate etc sunt suprafețe orientabile. În particular, orice suprafață dată cartezian explicit este orientabilă.

Dăm fără demonstrație următoarea teoremă.

7.12. Teoremă. *Orice suprafață simplă conexă și conexă este orientabilă.*

Pe de altă parte, are loc următorul rezultat:

7.13. Teoremă. Orice suprafață conexă și compactă M este orientabilă.

Într-adevăr, dacă M este o suprafață conexă și compactă, atunci \mathbb{R}^3 se descompune în două părți conexe, una mărginită și alta nemărginită. Suprafața M admite două câmpuri vectoriale normale unitare opuse dintre care unul indică regiunea nemărginită. Prin urmare M este orientabilă.

7.14. Teoremă. Dacă M_2 este o suprafață orientabilă, iar $F : M_1 \rightarrow M_2$ este o aplicație regulată, atunci suprafața M_1 este orientabilă.

Demonstrație. Presupunem că M_2 admite câmpul normal nenul

$$\mu(\vec{v}, \vec{w}) = \langle \vec{Y}(Q), \vec{v} \times \vec{w} \rangle, \quad \vec{v}, \vec{w} \in T_Q M_2, \quad Q = F(P), \quad P \in M_1.$$

Fie F_* aplicația liniară asociată matricei Jacobian a reprezentării în coordonate a lui F . Dacă \vec{a}, \vec{b} sunt doi vectori liniari independenți din $T_P M_1$, atunci $F_* \vec{a}, F_* \vec{b}$ sunt doi vectori liniari independenți din $T_Q M_2$ deoarece F este regulată. Definim

$$(F^* \mu)(\vec{a}, \vec{b}) = \mu(F_* \vec{a}, F_* \vec{b}).$$

Deoarece F este regulată rezultă $F^* \mu \neq 0$. Construim

$$\vec{Z}(P) = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{(F^* \mu)(\vec{a}, \vec{b})}.$$

Această expresie este independentă de alegerea lui \vec{a} și \vec{b} și dă în fiecare punct un vector normal nenul. De aceea $P \rightarrow \vec{Z}(P)$ este un câmp normal cu valori nenule pe M_1 , adică M_1 este orientabilă.

Un câmp vectorial normal unitar pe o suprafață orientabilă M se numește *orientare* pe M .

7.15. Teoremă. Orice suprafață conexă și orientabilă admite exact două orientări.

Demonstrație. Fie \vec{Z} un câmp normal (global) definit pe M cu valori nenule. Cu ajutorul lui putem construi pe $\pm \vec{U} = \pm \frac{\vec{Z}}{\|\vec{Z}\|}$ care sunt câmpuri normale unitare. Să arătăm acum că orice alt

câmp normal unitar trebuie să fie $+\vec{U}$ sau $-\vec{U}$. Fie \vec{V} un câmp normal unitar arbitrar definit pe M . Evident avem $\vec{V} = \langle \vec{V}, \vec{U} \rangle \vec{U}$, unde $f = \langle \vec{V}, \vec{U} \rangle$ are în fiecare punct valorile -1 sau $+1$. Rezultă că f are peste tot fie valoarea -1 fie valoarea $+1$, c.c.t.d.

Intuitiv, teorema 7.15 arată că, suprafețele conexe și orientabile au două fețe. O suprafață orientabilă împreună cu o alegere a unei orientări (alegerea unei fețe) se numește suprafață *orientată*. Convențional fața care corespunde alegerii sensului dat de $+\vec{U}$ se notează cu $+$ (*fața pozitivă*), iar fața opusă se notează cu $-$ (*fața negativă*); fig.105; orientare în concordanță cu regula burghiului drept.

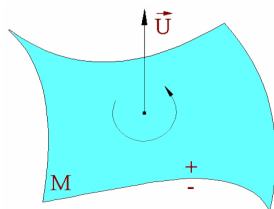


Fig. 105

Pentru suprafețele orientabile ce mărginesc un volum finit sensul pozitiv pe normală se ia prin convenție din interior către exterior (fig.106).

Dacă M nu este conexă, dar se compune din porțiuni conexe și orientabile (de exemplu hiperboloidul cu două pânze), atunci orientarea componentelor determină o orientare a lui M .

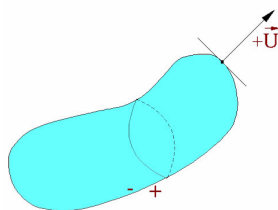


Fig. 106

Să ne referim acum la suprafețele neorientabile, adică la suprafețele care au o singură față. Cel mai simplu exemplu este banda lui Möbius. Un model al ei se poate obține dacă răsucind o dată bucățica dreptunghiulară de hârtie $ABCD$, se lipesc capetele ei în așa fel încât punctul A să coincidă cu C , iar B cu D .

Banda lui Möbius (fig.107) nu este global orientabilă deoarece orice câmp normal \vec{Z} definit pe M trebuie să se anuleze într-un punct al lui M și să-și schimbe sensul la trecerea prin acest punct. Pentru a vedea acest lucru fie $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ o curbă închisă pe M cu $\alpha(0) = \alpha(1)$ ca în fig.107.

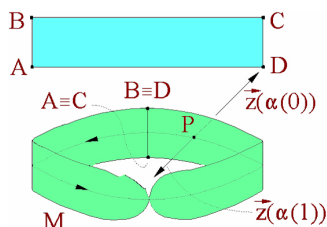


Fig. 107

Dacă presupunem că \vec{Z} nu se anulează în nici un punct, atunci răsucirea în M dă contradicția $\vec{Z}(\alpha(0)) = -\vec{Z}(\alpha(1))$, deoarece funcția $\vec{Z}(\alpha(t))$ este prin ipoteză diferentiabilă (continuă).

7.16. Teoremă. Orice punct P al unei suprafețe neorientabile M este cuprins într-o regiune conexă și orientabilă.

Demonstrație. Fie D o mulțime deschisă și conexă din plan și $r : D \rightarrow M$ o hartă în M . După teorema 7.3, $r(D)$ este conexă. Mai mult, imaginea $r(D)$ este orientabilă deoarece $\vec{Z} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v$ este un câmp normal nenul.

Teorema anterioară arată că pe suprafețele neorientabile există numai câmpuri normale locale cu valori nenule. În sprijinul acestei informații vom da un exemplu folosind modelul riglat al benzii Möbius. Fie $\alpha(u) = (\cos u, \sin u, 0)$ un cerc de rază unu situat în planul xOy și $[PQ]$ un segment de lungime unu așezat radial cu mijlocul pe cercul α . Presupunem că mijlocul segmentului descrie cercul α și simultan segmentul se rotește în jurul mijlocului său (momentan în planul normal al cercului), astfel încât în momentul când mijlocul segmentului încheie o rotație de 360° , segmentul încheie o rotație de 180° . Suprafața riglată care ia naștere este o bandă Möbius particulară de ecuație vectorială

$$\vec{r}(u, v) = \vec{\alpha}(u) + v\vec{\beta}(u), \quad v \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],$$

unde

$$\vec{\beta}(u) = \left(\cos \frac{u}{2}\right) \vec{\alpha} + \left(\sin \frac{u}{2}\right) \vec{k}.$$

Deoarece $\vec{Z} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$ dă local un câmp vectorial normal cu valori nenule, rezultă că banda Möbius riglată este local orientabilă.

10.7 Aplicația Weingarten

În acest paragraf și în paragrafele următoare introducem elementele matematice ce caracterizează forma suprafeței într-o vecinătate a unui punct al său. Toate aceste elemente au la bază o transformare liniară definită pe planul tangent și cu valori în planul tangent numită *aplicația Weingarten*.

Fie M o suprafață, \vec{X} un câmp vectorial euclidian definit pe M și \vec{v} un vector tangent la M în punctul P . Vectorul $D_{\vec{w}}\vec{X}$ se numește *derivata covariantă a lui \vec{X} pe suprafața M* . Această derivată se poate calcula în două moduri: (1) luăm o curbă α de pe suprafața M astfel încât $\alpha(0) = P$ și $\alpha'(0) = \vec{w}$. Explicităm compunerea $\vec{X} \circ \alpha$ și

$$D_{\vec{w}}\vec{X} = \left. \frac{d}{dt}\vec{X}(\alpha(t)) \right|_{t=0}.$$

(2) exprimăm pe \vec{X} în forma $\vec{X} = f\vec{i} + g\vec{j} + h\vec{k}$ și atunci

$$D_{\vec{v}}\vec{X} = D_{\vec{v}}f\vec{i} + D_{\vec{v}}g\vec{j} + D_{\vec{v}}h\vec{k}.$$

Chiar dacă \vec{X} este un câmp tangent la M , derivata covariantă $D_{\vec{w}}\vec{X}$ nu este în general tangentă la M (fig.108).

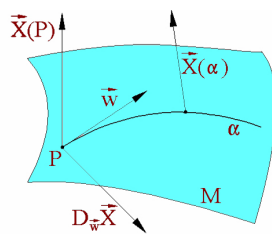


Fig. 108

Presupunem acum că M este o porțiune orientabilă dintr-o suprafață conexă și că ea a fost orientată prin alegerea câmpului normal unitar \vec{U} .

8.1. Definiție. Fie P un punct din M și $T_P M$ spațiul tangent la M în P . Funcția definită prin

$$S_P(\vec{w}) = -D_{\vec{w}}\vec{U}, \quad \vec{w} \in T_P M,$$

se numește *aplicația lui Weingarten a lui M în punctul P* .

Deoarece $T_P M$ constă din vectorii ortogonali lui \vec{U} , derivata $D_{\vec{w}}\vec{U}$ indică variația planelor tangente în sensul lui \vec{w} și aceasta dă o descriere infinitezimală a modulului în care se curbează M .

8.2. Teoremă. *Aplicația Weingarten este o transformare liniară a spațiului tangent în el însuși (fig.109).*

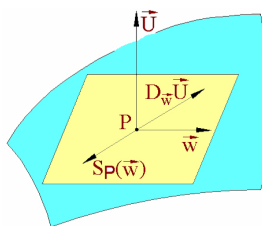


Fig. 109

Demonstrație. Pentru a arăta că S_P are valorile în $T_P M$ trebuie să demonstrăm că $S_P(\vec{w}) \perp \vec{U}(P)$. Pornim de la relația $1 = \langle \vec{U}, \vec{U} \rangle$ pe care o derivăm în raport cu \vec{w} . În baza proprietăților derivatei covariante avem

$$0 = D_{\vec{w}}(1) = D_{\vec{w}}\langle \vec{U}, \vec{U} \rangle = 2\langle D_{\vec{w}}\vec{U}, \vec{U} \rangle = -2\langle S_P(\vec{w}), \vec{U}(P) \rangle,$$

c.c.t.d.

Liniaritatea lui S_P este o consecință a liniarității derivatei covariante

$$S_P(a\vec{v} + b\vec{w}) = -D_{a\vec{v}+b\vec{w}}\vec{U} = -aD_{\vec{v}}\vec{U} - bD_{\vec{w}}\vec{U} = aS_P(\vec{v}) + bS_P(\vec{w}).$$

Funcția $P \rightarrow S_P$ va fi numită *aplicația Weingarten* a suprafeței M și va fi notată cu S .

Să presupunem acum că $t \rightarrow \alpha(t)$ este o curbă din M , iar \vec{U} este restricția câmpului normal unitar la α . În acest caz, observăm că

$$S(\vec{\alpha}') = -\vec{U}'.$$

8.3. Teoremă. *Aplicația Weingarten este simetrică, adică*

$$\langle S_P(\vec{v}), \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, S_P(\vec{w}) \rangle, \quad \forall \vec{v}, \vec{w} \in T_P M.$$

O demonstrație simplă a acestei teoreme este dată în §12.

Teorema 8.3 este echivalentă cu faptul că matricea atașată transformării liniare S_P în raport cu o bază ortonormată a lui $T_P M$ este simetrică.

Elementele intrinseci ale transformării liniare simetrice S_P și anume determinantul, urma, valorile proprii (care sunt reale deoarece S_P este simetrică) și vectorii proprii au semnificații geometrice pe care le vom pune în evidență în paragrafele următoare. Pentru explicitarea acestor elemente este suficient să alegem o bază $\{\vec{v}, \vec{w}\}$ în planul tangent, să explicităm matricea atașată lui S_P în raport cu această bază,

$$\begin{aligned} S_P(\vec{v}) &= a\vec{v} + b\vec{w}, \\ S_P(\vec{w}) &= c\vec{v} + d\vec{w}, \end{aligned} \quad \Rightarrow [S]_{\{\vec{v}, \vec{w}\}} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

și să determinăm determinantul, urma, valorile proprii și vectorii proprii ai acestei matrice.

8.4. Exemple

1) Fie $M : ax + by + cz + d = 0$ un plan din \mathbb{R}^3 . Evident, aceasta este o suprafață conexă și orientabilă. Orientăm pe M alegând

$$\vec{U} = \frac{a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Deoarece câmpul \vec{U} este paralel avem $S(\vec{w}) = -D_{\vec{w}}\vec{U} = 0$, $\forall \vec{w} \in T_P M = M$. Operatorul Weingarten este identic zero ceea ce corespunde faptului intuitiv că planele nu se îndoaie (fig.110).

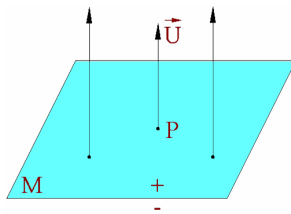


Fig. 110

2) Fie $M : x^2 + y^2 = r^2$ un cilindru circular drept din \mathbb{R}^3 . Aceasta este o suprafață conexă și orientabilă. Orientăm pe M alegând

$$\vec{U} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + 0\vec{k}}{r}.$$

Fie P un punct din M , fie \vec{e}_1 un versor tangent la generatoarea ce trece prin P și \vec{e}_2 un versor tangent la cercul de secțiune ce trece prin P . Alegând $\vec{e}_1 = (0, 0, -1)_P$, găsim $S_P(\vec{e}_1) = 0, \quad \forall P$, adică de-a lungul generatoarei, \vec{U} rămâne paralel cu el însuși. Analog $\vec{e}_2 = (-y, x, 0)_P$ și găsim

$$S_P(\vec{e}_2) = -D_{\vec{e}_2}x\vec{i} + D_{\frac{\vec{e}_2}{y}}y\vec{j} = -\frac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{r} = -\frac{\vec{e}_2}{r}, \quad \forall P \in M.$$

Aceasta arată că de-a lungul cercului de secțiune cilindrul se curbează uniform (fig.111).

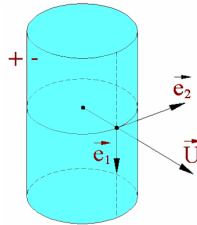


Fig. 111

3) Fie sfera $M : x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Orientăm pe M alegând

$$\vec{U} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{r}.$$

Găsim

$$S(\vec{w}) = -D_{\vec{w}}\vec{U} = -\frac{1}{r}(D_{\vec{w}}x\vec{i} + D_{\vec{w}}y\vec{j} + D_{\vec{w}}z\vec{k}) = -\frac{\vec{w}}{r}, \quad \forall \vec{w} \in T_P M; \quad \forall P \in M.$$

Astfel în acest caz aplicația Weingarten se reduce la multiplicarea cu $-\frac{1}{r}$. Această uniformitate a lui S reflectă rotunjirea sferelor, adică faptul că în fiecare punct al său P , sfera se curbează în același mod în toate direcțiile (fig.112).

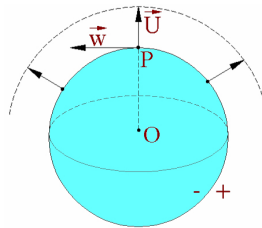


Fig. 112

10.8 Curbura normală

Forma unei suprafețe influențează forma oricărei curbe de pe suprafață respectivă. Reciproc, folosind forma curbelor de pe o suprafață ce trec printr-un punct fixat putem determina forma

suprafeței în jurul acestui punct. Presupunem că lucrăm într-o regiune a unei suprafețe conexe M orientată prin alegerea câmpului normal unitar \vec{U} .

9.1. Lemă. Dacă α este o curbă din M , iar \vec{U} este restricția câmpului normal unitar la α , atunci

$$\langle S(\vec{\alpha}'), \vec{\alpha}' \rangle = \langle \vec{\alpha}'', \vec{U} \rangle.$$

Demonstrație. Deoarece $\vec{\alpha}'$ este tangent la M avem $\langle \vec{\alpha}', \vec{U} \rangle = 0$. Prin derivare găsim $\langle \vec{\alpha}'', \vec{U} \rangle + \langle \vec{\alpha}', \vec{U}' \rangle = 0$. Știm însă că $S(\vec{\alpha}') = -\vec{U}'$ și astfel formula din lema este adevărată.

Formula din lema precedentă arată că componenta normală a accelerației lui α , componentă care apare din cauza îndoirii suprafeței, depinde numai de $\vec{\alpha}'$ și $S(\vec{\alpha}')$. Cu alte cuvinte componenta normală a accelerației în punctul P este aceeași pentru toate curbele de pe suprafață ce trec prin P cu aceeași viteză \vec{w} (fig.113).

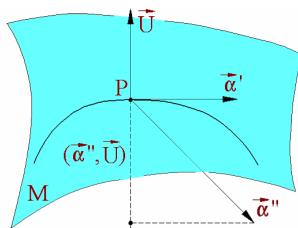


Fig. 113

Această observație ne sugerează să caracterizăm încovoierea suprafeței după o direcție prin funcția din definiție următoare.

9.2. Definiție. Fie \vec{e} un versor tangent la M în P . Numărul $k_n(\vec{e}) = \langle S(\vec{e}), \vec{e} \rangle$ se numește *curbura normală* a lui M în direcția lui \vec{e} .

Deoarece avem

$$k_n(-\vec{e}) = \langle S(-\vec{e}), -\vec{e} \rangle = \langle -S(\vec{e}), -\vec{e} \rangle = \langle S(\vec{e}), \vec{e} \rangle = k_n(\vec{e}),$$

numărul $k_n(\vec{e})$ este definit pe direcția tangentă la M în P generată de versorul \vec{e} . Astfel, deși evaluăm pe k_n pe versori, avem totuși de-a face cu o funcție reală pe mulțimea direcțiilor tangente la M în punctul P .

Fie \vec{e} un versor tangent la M în P . Considerăm o curbă α de viteză unu pe M astfel încât $\alpha(0) = P$ și $\vec{\alpha}'(0) = \vec{e}$. Utilizând lema 9.1 și formulele lui Frenet pentru curba α , găsim

$$\begin{aligned} k_n(\vec{e}) &= \langle S(\vec{e}), \vec{e} \rangle = \langle S(\vec{\alpha}'(0)), \vec{\alpha}'(0) \rangle = \langle \vec{\alpha}''(0), \vec{U}(P) \rangle = \\ &= k_\alpha(0) \langle \vec{N}(0), \vec{U}(P) \rangle = k_\alpha(0) \cos \varphi, \end{aligned}$$

unde $k_\alpha(0) \geq 0$ este curbura lui α în punctul P , iar φ este unghiul dintre normala principală a curbei și normala suprafeței (fig.114).

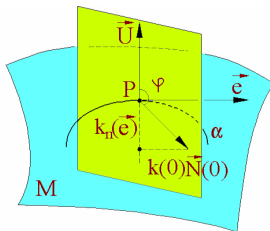


Fig. 114

Această formulă arată că: (1) dacă vectorul $\vec{N}(0)$ este colinar cu vectorul $\vec{U}(P)$, atunci $k_n(\vec{e}) = \pm k_\alpha(0)$; (2) dintre toate curbele lui M tangente la versorul \vec{e} în punctul P , cea mai mică curbura o are intersecția dintre M și planul determinat de $P, \vec{U}(P), \vec{e}$, curbă ce se numește *secțiunea normală* a lui M în direcția lui \vec{e} .

Pentru secțiunea normală σ , de viteză unu, avem (fig.115): $\vec{\sigma}'(0) = \vec{e}$, accelerația $\vec{\sigma}''(0) = k_\sigma(0)\vec{N}(0)$ aparține planului de secțiune și este perpendiculară pe $\vec{\sigma}'(0) = \vec{e}$, $\vec{N}(0) = \pm\vec{U}(P)$, $k_n(\vec{e}) = \pm k_\sigma(0)$.

Astfel, am demonstrat teorema lui Meusnier:

Centrul de curbura al unei curbe de pe o suprafață Σ este proiecția pe planul său osculator a centrului de curbura a secțiunii normale.

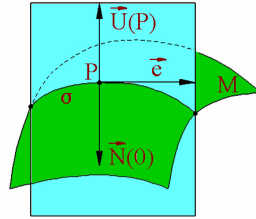


Fig. 115

Fie P un punct din suprafața M , fie \vec{e} un versor tangent la M în P și $k_n(\vec{e})$ curbura normală corespunzătoare. Utilizând secțiunea normală a lui M în direcția lui \vec{e} și ținând cont că normala principală \vec{N} a unei curbe din spațiu arată sensul în care aceasta se curbează, putem da următoarele interpretări geometrice ale semnului lui $k_n(\vec{e})$ relativ la alegerea câmpului normal unitar \vec{U} .

1) Presupunem $k_n(\vec{e}) > 0$. Rezultă că $\vec{U}(P)$ și $\vec{N}(0)$ au același sens. De aceea în vecinătatea lui P și în direcția lui \vec{e} suprafața se încovoie în sensul indicat de $\vec{U}(P)$ (fig.116).

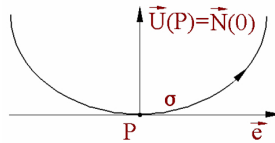


Fig. 116

2) Presupunem $k_n(\vec{e}) < 0$. Rezultă că $\vec{U}(P)$ și $\vec{N}(0)$ au sensuri opuse. De aceea în vecinătatea lui P și în direcția lui \vec{e} suprafața se curbează contrar sensului lui $\vec{U}(P)$ (fig.117).

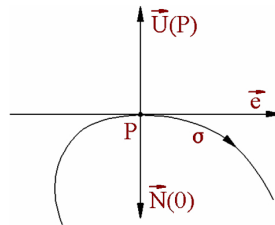


Fig. 117

3) Fie $k_n(\vec{e}) = 0$. Rezultă $k_\sigma(0) = 0$ și $\vec{N}(0)$ nu este definit. Nu putem spune precis care este forma suprafeței în vecinătatea punctului considerat pe direcția \vec{e} . Putem însă afirma că într-o vecinătate a lui P pe direcția \vec{e} suprafața se curbează foarte puțin.

Presupunem acum că fixăm punctul P și că extremitatea lui \vec{e} descrie un cerc în planul tangent. Diversele secțiuni normale ce se pot face ne dau informații despre forma suprafeței în vecinătatea lui P în diferite direcții (fig.118).

Fie

$$k_1 = \min_{\|\vec{e}\|=1} k_n(\vec{e}) \quad \text{și} \quad k_2 = \max_{\|\vec{e}\|=1} k_n(\vec{e}).$$

Aceste numere există deoarece mulțimea determinată de relația $\|\vec{e}\| = 1$ este compactă (cerc), iar funcția $\vec{e} \rightarrow k_n(\vec{e})$ este continuă.

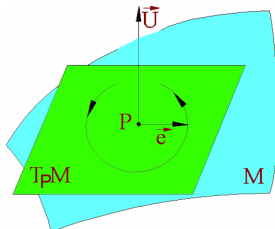


Fig. 118

9.3. Definiție. Numerele k_1 și k_2 se numesc *curburile principale* ale lui M în punctul P . Direcțiile pentru care se găsesc aceste valori extreme se numesc *direcții principale* ale lui M în P . Versorii acestor direcții se numesc *vectori principali* ai lui M în punctul P .

Dacă în punctul P avem $k_1 = k_2$, atunci rezultă $k_n(\vec{e}) = \text{const}$, adică M se curbează la fel în toate direcțiile și toate direcțiile ce trec prin P sunt principale.

9.4. Definiție. Dacă $k_n(\vec{e}) = \text{const}$, $\forall \vec{e} \in T_P M$, $\|\vec{e}\| = 1$, atunci punctul P se numește *punct ombilical*.

9.5. Teoremă.

(1) Dacă P este un punct ombilical, atunci operatorul Weingarten în P se reduce la multiplicarea cu $k_1 = k_2$.

(2) Dacă P nu este un punct ombilical ($k_1 \neq k_2$), atunci există două (și numai două) direcții principale ortogonale. Dacă \vec{e}_1 și \vec{e}_2 sunt vectorii principali, atunci

$$S(\vec{e}_1) = k_1 \vec{e}_1, \quad S(\vec{e}_2) = k_2 \vec{e}_2.$$

Formulare alternativă: curburile principale ale lui M în P sunt valorile proprii ale lui S . Vectorii principali ai lui M în P sunt vectorii proprii ai lui S .

Demonstrație. Varianta 1.

Fixăm o bază ortonormată $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$ în planul tangent $T_P M$ (fig.119). Avem

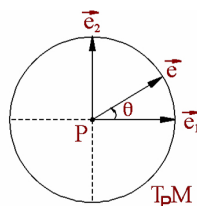


Fig. 119

$$S(\vec{f}_1) = S_{11}\vec{f}_1 + S_{21}\vec{f}_2, \quad S(\vec{f}_2) = S_{12}\vec{f}_1 + S_{22}\vec{f}_2,$$

unde

$$S_{ij} = \langle S(\vec{f}_i), \vec{f}_j \rangle = \langle \vec{f}_i, S(\vec{f}_j) \rangle = S_{ji}.$$

Determinăm valorile proprii și vectorii proprii ai lui S . Deoarece $[S_{ij}]$ este simetrică valorile proprii sunt reale:

$$\begin{vmatrix} S_{11} - k & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} - k \end{vmatrix} = 0, \quad k^2 - (S_{11} + S_{22})k + S_{11}S_{22} - S_{12}^2 = 0$$

$$\Delta = (S_{11} + S_{22})^2 - 4(S_{11}S_{22} - S_{12}^2) = (S_{11} - S_{22})^2 + 4S_{12}^2 \geq 0.$$

$k_1 = k_2 \Leftrightarrow S_{11} = S_{22}, S_{12} = 0$ în acest caz versorii proprii sunt nedeterminați (orice versori sunt versori proprii). Aplicația S se reduce la multiplicarea cu S_{11} .

Presupunem $k_1 < k_2$. Să verificăm relațiile $k_1 = \min_{\|\vec{e}\|=1} k_n(\vec{e})$, $k_2 = \max_{\|\vec{e}\|=1} k_n(\vec{e})$. Avem

$$S(\vec{e}_1) = k_1\vec{e}_1, \quad S(\vec{e}_2) = k_2\vec{e}_2, \quad \vec{e} = \cos\theta\vec{e}_1 + \sin\theta\vec{e}_2,$$

$$k_n(\vec{e}) = (S(\vec{e}), \vec{e}) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta.$$

Deci

$$k_1 \leq k_n(\vec{e}) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta \leq k_2, \quad \forall \theta \in [0, 2\pi].$$

Valoarea k_1 se atinge pentru $\theta = 0$; $\theta = \pi$ (minim), k_2 se atinge pentru $\theta = \frac{\pi}{2}$; $\theta = \frac{3\pi}{2}$ (maxim).

Deci valorile proprii ale lui S sunt extremele (globale) ale curburii normale.

Varianta II. (*extreme cu legături*). Fie $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$ bază ortonormată și (S_{ij}) matrice simetrică. Atunci avem

$$\vec{e} = \eta_1\vec{f}_1 + \eta_2\vec{f}_2, \quad \|\vec{e}\| = 1, \quad \sum_{i=1}^2 \eta_i^2 = 1.$$

Dar $k_n(\vec{e}) = \sum_{i,j} S_{ij}\eta_i\eta_j$ este o formă pătratică și avem

$$\phi = \sum_{i,j} S_{ij}\eta_i\eta_j - k\left(\sum_i \eta_i^2 - 1\right).$$

Rezultă sistemul

$$\begin{cases} \frac{\partial\phi}{\partial\eta_i} = 2(\sum S_{ij}\eta_j - k\eta_i) = 0 \\ \sum \eta_i^2 = 1 \end{cases}$$

Acesta este compatibil nedeterminat (deci admite soluții nebanale d.n.d.)

$$\begin{vmatrix} S_{11} - k & S_{12} \\ S_{12} & S_{22} - k \end{vmatrix} = 0,$$

adică

$$k^2 - (S_{11} + S_{22})k + S_{11}S_{22} - S_{12}^2 = 0,$$

ecuație de gradul doi al cărei discriminant este

$$\Delta = (S_{11} - S_{22})^2 + 4S_{12}^2 \geq 0.$$

În cazul $k_1 \neq k_2$ (deci $\Delta > 0$), rezultă vectori proprii ortogonali; îi normăm și îi notăm \vec{e}_1, \vec{e}_2 . Atunci

$$k = \sum_{i,j} S_{ij}\eta_i\eta_j; \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial\eta_i^2} = 2(S_{ii} - \lambda), \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial\eta_i\partial\eta_j} = 2S_{ij}, \quad i \neq j$$

$$\frac{1}{2}d^2\phi = (S_{11} - k)d\eta_1^2 + 2S_{12}d\eta_1d\eta_2 + (S_{22} - k)d\eta_2^2$$

și $\eta_1d\eta_1 + \eta_2d\eta_2 = 0$. Fie $\eta_1 \neq 0 \Rightarrow d\eta_1 = -\frac{\eta_2}{\eta_1}d\eta_2$. Atunci

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}d^2\phi &= \frac{(S_{11}-k)\eta_2^2 - 2S_{12}\eta_1\eta_2 + (S_{22}-k)\eta_1^2}{\eta_1^2}d\eta_2^2 = \\ &= \frac{S_{11}(1-\eta_1^2) - 2S_{12}\eta_1\eta_2 + S_{22}(1-\eta_2^2) - k}{\eta_1^2}d\eta_2^2 = \\ &= \frac{S_{11}+S_{22} - (S_{11}\eta_1^2 + 2S_{12}\eta_1\eta_2 + S_{22}\eta_2^2) - k}{\eta_1^2}d\eta_2^2 = \frac{S_{11}+S_{22}-2k}{\eta_1^2}d\eta_2^2. \end{aligned}$$

Dar

$$k_{1,2} = \frac{S_{11} + S_{22} \pm \sqrt{\text{tr}(S)^2 - 4\Delta}}{2}$$

și deci $S_{11} + S_{22} - 2k$ este sau pozitiv sau negativ.

Ca o consecință avem

9.6. Formula Euler. Fie k_1, k_2 curburile principale și \vec{e}_1, \vec{e}_2 vectorii principali ai lui M în P . Dacă $\vec{e} = \cos\theta\vec{e}_1 + \sin\theta\vec{e}_2$, atunci (fig.119)

$$k_n(\vec{e}) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta.$$

Vom utiliza acum curburile principale $k_1(P)$ și $k_2(P)$ pentru a construi o aproximație pătratică a suprafeței M în vecinătatea punctului P . Pentru aceasta presupunem că:

- (1) P este originea lui \mathbb{R}^3 ,
- (2) $T_P M \equiv xOy$,
- (3) $\vec{i}_P = (1, 0, 0)_P$ și $\vec{j}_P = (0, 1, 0)_P$ sunt vectori principali.

În vecinătatea lui P suprafața M poate fi reprezentată în forma $z = f(x, y)$ pe care o orientăm cu ajutorul câmpului normal unitar (fig.120)

$$\vec{U} = \frac{-f_x\vec{i} - f_y\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}.$$

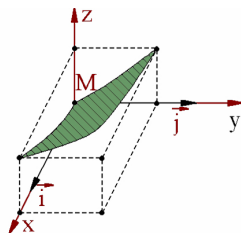


Fig. 120

Din (1) și (2) rezultă $f(0, 0) = f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$. De aceea avem următoarea aproximație Taylor

$$z \sim \frac{1}{2}(x^2 f_{x^2}(0, 0) + 2xy f_{xy}(0, 0) + y^2 f_{y^2}(0, 0)).$$

Prin calcul direct găsim

$$\begin{aligned} S(\vec{i}) &= f_{x^2}(0, 0)\vec{i} + f_{xy}(0, 0)\vec{j}, \\ S(\vec{j}) &= f_{xy}(0, 0)\vec{i} + f_{y^2}(0, 0)\vec{j}. \end{aligned}$$

Din (3) și din teorema 9.5 deducem $f_{xy}(0,0) = 0$, $f_{x^2}(0,0) = k_1$ și $f_{y^2}(0,0) = k_2$. Aceste raționamete arată că în vecinătatea punctului P suprafața M are aproximativ aceeași formă cu suprafața

$$z = \frac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2),$$

pe care o vom numi *aproximarea pătratică* a lui M în vecinătatea lui P .

Definițiile 9.3, 9.4 și teoremele 9.5, 9.6 au fost formulate pentru punctul P . Ele sunt valabile în toate punctele din regiunea orientată a lui M , unde este definit câmpul vectorial normal unitar \vec{U} . De aceea

$$P \rightarrow k_i(P), \quad i = 1, 2,$$

vor fi două funcții reale k_1, k_2 definite pe aceeași regiune cu \vec{U} . Aceste funcții se numesc *curburile principale* ale lui M .

9.7. Exemplanu. Fie elicoidul drept $M : x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = v$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Ne propunem să găsim curbura normală și curburile principale în punctul curent al lui M . Pentru aceasta reprezentăm pe M în forma $\vec{r} = u \cos v \vec{i} + u \sin v \vec{j} + v \vec{k}$. Vitezele parțiale sunt

$$\vec{r}_u = \cos v \vec{i} + \sin v \vec{j}, \quad \vec{r}_v = -u \sin v \vec{i} + u \cos v \vec{j} + \vec{k}.$$

Deoarece $\vec{r}_u \perp \vec{r}_v$, o bază ortonormată a planului tangent în punctul curent al suprafeței este formată din

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \frac{1}{\|\vec{r}_u\|} \vec{r}_u = \cos v \vec{i} + \sin v \vec{j}, \\ \vec{e}_2 &= \frac{1}{\|\vec{r}_v\|} \vec{r}_v = \frac{-u \sin v \vec{i} + u \cos v \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1+u^2}}. \end{aligned}$$

Orientăm pe M prin câmpul normal unitar

$$\vec{U} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|} = \frac{\sin v}{\sqrt{1+u^2}} \vec{i} - \frac{\cos v}{\sqrt{1+u^2}} \vec{j} + \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \vec{k}.$$

Avem

$$\begin{aligned} S(\vec{e}_1) &= -\frac{d}{du} \vec{U} = \frac{u \sin v}{(1+u^2)^{3/2}} \vec{i} - \frac{u \cos v}{(1+u^2)^{3/2}} \vec{j} - \frac{1}{(1+u^2)^{3/2}} \vec{k}, \\ S(\vec{e}_2) &= -\frac{1}{\|\vec{r}_v\|} \frac{d}{dv} \vec{U} = -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \left(\frac{\cos v}{\sqrt{1+u^2}} \vec{i} + \frac{\sin v}{\sqrt{1+u^2}} \vec{j} \right). \end{aligned}$$

De aceea găsim

$$\begin{aligned} S_{11} &= \langle S(\vec{e}_1), \vec{e}_1 \rangle = 0, & S_{22} &= \langle S(\vec{e}_2), \vec{e}_2 \rangle = 0, \\ S_{12} &= \langle S(\vec{e}_1), \vec{e}_2 \rangle = \langle \vec{e}_1, S(\vec{e}_2) \rangle = -\frac{1}{1+u^2}. \end{aligned}$$

Fie

$$\vec{e} = \cos \theta \vec{e}_1 + \sin \theta \vec{e}_2.$$

Obținem

$$f(\theta) = k_n(\vec{e}(\theta)) = -\frac{\sin 2\theta}{1+u^2}$$

și deci

$$-\frac{1}{1+u^2} \leq k_n(\vec{e}(\theta)) \leq \frac{1}{1+u^2},$$

adică

$$\begin{aligned} k_1 &= k_n \left(\frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{e}_1 - \vec{e}_2) \right) = \frac{1}{1+u^2}, \\ k_2 &= k_n \left(\frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \right) = -\frac{1}{1+u^2}. \end{aligned}$$

10.9 Curbura Gauss

Fie M o suprafață și S aplicația Weingarten. În acest paragraf vom da semnificațiile geometrice ale determinantului și urmei operatorului S .

10.1. Definiție. Funcția $K = \det S : M \rightarrow \mathbb{R}$ se numește *curbura Gauss* a suprafeței M . Funcția $H = \frac{1}{2}$ urma $S : M \rightarrow \mathbb{R}$ se numește *curbura medie a suprafeței M* .

Curbura Gauss K și curbura medie H se exprimă cu ajutorul curburilor principale k_1 și k_2 .

10.2. Lemă. *Curbura Gauss și curbura medie au respectiv expresiile*

$$K = k_1 k_2, \quad H = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

Demonstrație. Fie P un punct din M . Toate matricele ce se pot atașa aplicației S_P au același determinant și aceeași urmă. De aceea pentru găsirea determinantului și urmei lui S_P este suficient să alegem în planul tangent $T_P M$ o bază convenabilă în raport cu care aplicația S_P să fie reprezentată de o matrice simplă. Alegând drept bază vectorii principali \vec{e}_1, \vec{e}_2 din teorema 9.5 rezultă că lui S_P îi corespunde matricea

$$\begin{pmatrix} k_1(P) & 0 \\ 0 & k_2(P) \end{pmatrix}$$

și astfel lema este evidentă.

Observație. Dacă \vec{U} se schimbă în $-\vec{U}$, atunci k_1 și k_2 se schimbă respectiv în $-k_1, -k_2$, curbura medie H se schimbă în $-H$, iar curbura Gauss K rămâne neschimbată.

În continuare vom da interpretarea geometrică a semnului curburii Gauss.

10.3. Interpretarea semnului lui $K(P)$

1) Presupunem că în punctul $P \in M$ avem $K(P) > 0$. Din $K = k_1 k_2$ rezultă că $k_1(P)$ și $k_2(P)$ au același semn. Din formula Euler rezultă $k_n(\vec{e}) > 0$ sau $k_n(\vec{e}) < 0$. Aceasta înseamnă că în vecinătatea lui P suprafața se înconvoaie fie în sensul lui \vec{U} , fie în sens contrar. Aproximarea pătratică a lui M în vecinătatea lui P este paraboloidul eliptic $2z = k_1(P)x^2 + k_2(P)y^2$ (fig.121).

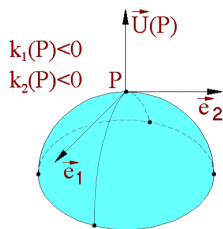


Fig. 121

2) Presupunem $K(P) < 0$. Din $K = k_1 k_2$ rezultă că $k_1(P)$ și $k_2(P)$ au semne opuse. Aproximarea pătratică a lui M , în vecinătatea lui P este paraboloidul hiperbolic $2z = k_1(P)x^2 + k_2(P)y^2$. De aceea în vecinătatea lui P suprafața arată ca o șa (fig.122).

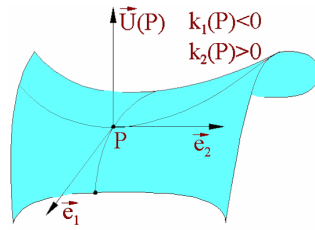


Fig. 122

3) Presupunem $K(P) = 0$. Deoarece $K = k_1 k_2$, considerăm următoarele două cazuri:

(a) numai una dintre curburi principale este zero, de exemplu $k_1(P) \neq 0$, $k_2(P) = 0$. În acest caz, aproximarea pătratică este cilindrul parabolic

$$2z = k_1(P)x^2$$

și deci, în vecinătatea lui P , suprafața M arată ca o albie (fig.123);

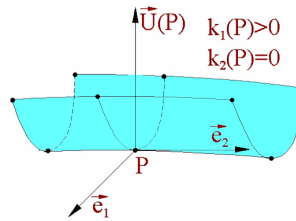


Fig. 123

(b) ambele curburi principale sunt zero

$$k_1(P) = k_2(P) = 0.$$

Aproximarea pătratică se reduce la planul $z = 0$ și nu putem obține nici o informație cu privire la forma lui M în vecinătatea lui P . Un punct $P \in M$ pentru care $k_1(P) = 0$, $k_2(P) = 0$ se numește *punct planar*.

10.4. Exemple

1) Torul de rotație este un exemplu de suprafață pe care avem de-a face cu cazurile 1), 2) și 3) (a).

În punctele regiunii A (fig.124) avem $K > 0$ deoarece în aceste puncte torul se îndepărtează față de planul tangent. În punctele regiunii B avem $K < 0$ deoarece în vecinătatea oricărui punct din această regiune torul seamănă cu o șa. Pe cele două cercuri care separă regiunile A și B avem $K = 0$ deoarece de-a lungul acestor cercuri torul seamănă (local) cu o albie.

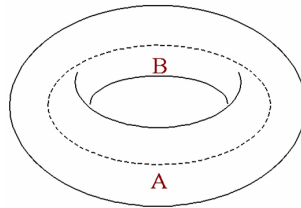


Fig. 124

2) Punctul $O(0, 0, 0)$ de pe suprafața (fig.125)

$$z = x^3 - 3xy^2 = \operatorname{Re}(x + iy)^3$$

este un punct planar.

Punctul de întâlnire a trei văi separate de trei dealuri este un punct planar.

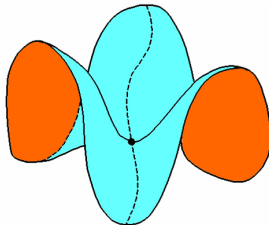


Fig. 125

În continuare vom da formule pentru calculul funcțiilor K și H .

10.5. Lemă. Dacă \vec{v}_1 și \vec{v}_2 sunt doi vectori liniar independenți tangenți la suprafața M în punctul P , atunci

$$\begin{aligned} S(\vec{v}_1) \times S(\vec{v}_2) &= K(P)\vec{v}_1 \times \vec{v}_2, \\ S(\vec{v}_1) \times \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \times S(\vec{v}_2) &= 2H(P)\vec{v}_1 \times \vec{v}_2. \end{aligned}$$

Demonstrație. Deoarece \vec{v}_1 și \vec{v}_2 formează o bază a planului tangent $T_P M$ putem scrie

$$\begin{aligned} S(\vec{v}_1) &= a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 \\ S(\vec{v}_2) &= c\vec{v}_1 + d\vec{v}_2. \end{aligned}$$

Astfel

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

este matricea lui S în raport cu baza \vec{v}_1, \vec{v}_2 . Găsim

$$K(P) = \det S = ad - bc, \quad H(P) = \frac{1}{2} \operatorname{urma} S = \frac{1}{2}(a + d).$$

Folosind proprietățile produsului vectorial deducem

$$S(\vec{v}_1) \times S(\vec{v}_2) = (a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2) \times (c\vec{v}_1 + d\vec{v}_2) = (ad - bc)\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = K(P)\vec{v}_1 \times \vec{v}_2.$$

Analog se găsește relația în care intră $H(P)$.

Fie acum \vec{V}_1 și \vec{V}_2 două câmpuri vectoriale liniar independente definite pe o regiune orientată a lui M și tangente la M . În baza lemei precedente avem

$$\begin{aligned} S(\vec{V}_1) \times S(\vec{V}_2) &= K\vec{V}_1 \times \vec{V}_2, \\ S(\vec{V}_1) \times \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \times S(\vec{V}_2) &= 2H\vec{V}_1 \times \vec{V}_2. \end{aligned}$$

Deoarece câmpurile \vec{V}_1 și \vec{V}_2 sunt liniar independente, adică $\|\vec{V}_1 \times \vec{V}_2\|^2 > 0$, înmulțind scalar ambii membri ai acestor ecuații cu câmpul normal $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2$ și utilizând identitatea Lagrange

$$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \times \vec{d} \rangle = \begin{vmatrix} \langle a, c \rangle & \langle a, d \rangle \\ \langle b, c \rangle & \langle b, d \rangle \end{vmatrix},$$

găsim

$$K = \frac{\begin{vmatrix} \langle S(\vec{V}_1), \vec{V}_1 \rangle & \langle S(\vec{V}_1), \vec{V}_2 \rangle \\ \langle S(\vec{V}_2), \vec{V}_1 \rangle & \langle S(\vec{V}_2), \vec{V}_2 \rangle \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \langle \vec{V}_1, \vec{V}_1 \rangle & \langle \vec{V}_1, \vec{V}_2 \rangle \\ \langle \vec{V}_2, \vec{V}_1 \rangle & \langle \vec{V}_2, \vec{V}_2 \rangle \end{vmatrix}}$$

$$H = \frac{\begin{vmatrix} \langle S(\vec{V}_1), \vec{V}_1 \rangle & \langle S(\vec{V}_1), \vec{V}_2 \rangle \\ \langle \vec{V}_2, \vec{V}_1 \rangle & \langle \vec{V}_2, \vec{V}_2 \rangle \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \langle \vec{V}_1, \vec{V}_1 \rangle & \langle \vec{V}_1, \vec{V}_2 \rangle \\ \langle S(\vec{V}_2), \vec{V}_1 \rangle & \langle S(\vec{V}_2), \vec{V}_2 \rangle \end{vmatrix}}{2 \begin{vmatrix} \langle \vec{V}_1, \vec{V}_1 \rangle & \langle \vec{V}_1, \vec{V}_2 \rangle \\ \langle \vec{V}_2, \vec{V}_1 \rangle & \langle \vec{V}_2, \vec{V}_2 \rangle \end{vmatrix}}.$$

Evident funcțiile K și H astfel obținute sunt diferențiabile. Dacă funcțiile K și H sunt cunoscute, atunci curburile principale sunt date de formulele din consecința următoare.

10.6. Consecință. Pe o regiune orientată Σ din M curburile principale sunt date de

$$k_1, k_2 = H \pm \sqrt{H^2 - K}.$$

Demonstrație. Relațiile rezultă din faptul că

$$K = k_1 k_2, \quad H = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

și deci

$$H^2 - K = \frac{(k_1 - k_2)^2}{4}.$$

Formulele precedente arată că funcțiile k_1 și k_2 sunt continue pe Σ . Aceste funcții nu sunt diferențiabile în punctele în care $H^2 - K = 0$, adică în punctele ombilicale. Dacă Σ nu posedă puncte ombilicale, atunci funcțiile k_1 și k_2 sunt diferențiabile.

Să prezentăm acum unele tipuri de suprafețe.

10.7. Definiție. O suprafață pentru care $K = \text{const}$ se numește *suprafață cu curbură constantă*. În particular suprafețele pentru care $K = 0$ se mai numesc și *local euclidiene*.

10.8. Exemple.

1) Suprafața de rotație

$$z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2} + \text{sech}^{-1} \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z > 0$$

numită *pseudosferă* (fig.126) are curbura $K = -1$.

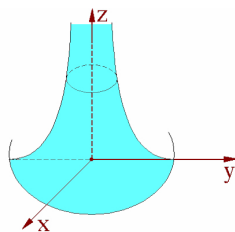


Fig. 126

2) Planul, cilindrul circular drept, conul fără vârf, banda riglată Möbius etc sunt exemple de suprafețe local euclidiene.

Suprafețele *desfășurabile* (adică suprafețele riglate pentru care câmpul normal este paralel în \mathbb{R}^3 de-a lungul fiecărei generatoare) sunt local euclidiene.

Reciproc, suprafețele conexe, închise (ca submulțime în \mathbb{R}^3) și local euclidiene sunt desfășurabile. De asemenea ele sunt local izometrice cu planul, adică există o aplicație definită pe suprafața respectivă și cu valori în plan care păstrează produsul scalar al vectorilor tangenți (izometrie locală).

3) Sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ are curbura $K = 1$.

10.9. Definiție. O suprafață pentru care $H = 0$ se numește *suprafață minimală*.

Facem observația că suprafețele minimale au curbura Gauss K cel mult zero, deoarece din

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = 0 \quad \text{rezultă} \quad k_1 = -k_2.$$

Exemplu. Elicoidul cu plan director (fig.127) este o suprafață minimală.

Denumirea de suprafață minimală provine din aceea că, dintre toate suprafețele ce trec printr-o curbă închisă, suprafața de arie minimă are curbura medie nulă.

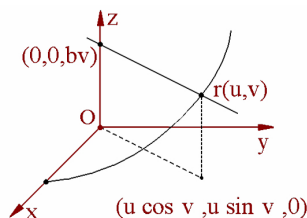


Fig. 127

10.10 Formele fundamentale ale unei suprafețe

Fie V un spațiu vectorial euclidian real și $\mathcal{T} : V \rightarrow V$ o transformare liniară simetrică. Funcției \mathcal{T} i se poate atașa forma biliniară simetrică

$$\mathcal{A} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{A}(v, w) = \langle \mathcal{T}(v), w \rangle$$

și deci implicit forma pătratică

$$Q : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad Q(v) = \mathcal{A}(v, v) = \langle \mathcal{T}(v), v \rangle.$$

Forma biliniară simetrică \mathcal{A} (implicit forma pătratică Q) atașată unei transformări liniare simetrice \mathcal{T} conține exact aceeași informație ca și \mathcal{T} deoarece \mathcal{T} poate fi recuperată din formula

$$\langle \mathcal{T}(v), w \rangle = \frac{1}{2}[Q(v+w) - Q(v) - Q(w)],$$

care este adevărată pentru orice vector v, w din V .

Fie M o suprafață, P un punct din M și $T_P M$ spațiul tangent la M în punctul P . Forma biliniară simetrică I_P asociată *identității* pe $T_P M$, adică funcția reală definită prin

$$I_P(\vec{v}, \vec{w}) = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle, \quad \vec{v}, \vec{w} \in T_P M,$$

se numește *prima formă fundamentală a suprafeței M în punctul P* . Se observă că I_P nu este altceva decât un produs scalar fiind restricția produsului scalar din \mathbb{R}^3 la subspațiul bidimensional $T_P M$. Funcția $P \rightarrow I_P$ se numește *prima formă fundamentală a suprafeței M și se notează cu I* . Geometria pe M derivată din prima formă fundamentală se numește *geometrie intrinsecă*. Conținutul acesteia rezultă din faptul că funcția I , și deci cunoașterea produsului scalar pe fiecare $T_P M$, permite calcularea lungimii unui arc de curbă de pe suprafața M , a unghiului dintre doi vectori tangenți la suprafața M , a ariei unei porțiuni din suprafața M etc. De exemplu, dacă $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ este o curbă regulată, atunci lungimea lui α este dată prin

$$l(\alpha) = \int_a^b \left\| \frac{d\vec{\alpha}}{dt} \right\| dt.$$

Presupunem că M este o suprafață conexă și notăm cu Ω mulțimea curbelor regulate $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ care unesc punctul $P = \alpha(a)$ cu punctul $Q = \alpha(b)$. Distanța de la P la Q se definește prin

$$d(P, Q) = \inf_{\alpha \in \Omega} l(\alpha).$$

Această expresie definește o *distanță (metrică) d* pe M și deci o suprafață conexă este un exemplu de spațiu metric. Mai mult, topologia lui M determinată de metrica d coincide cu topologia originală a lui M (ca subvarietate).

Fie M o suprafață orientată, P un punct din M și $T_P M$ spațiul tangent la M în punctul P . Forma biliniară simetrică II_P asociată aplicației Weingarten S_P , adică funcția reală definită prin

$$II_P(\vec{v}, \vec{w}) = \langle S_P(\vec{v}), \vec{w} \rangle, \quad \vec{v}, \vec{w} \in T_P M,$$

se numește a *doua formă fundamentală a suprafeței M în punctul P* . Forma pătratică corepunzătoare se poate exprima prin

$$II_P(\vec{v}, \vec{v}) = \langle S_P(\vec{v}), \vec{v} \rangle = \langle \vec{\alpha}''(t_0), \vec{U}(P) \rangle,$$

unde $\alpha : I \rightarrow M$ este o curbă din M pentru care $\alpha(t_0) = P$, $\vec{\alpha}'(t_0) = \vec{v}$, iar \vec{U} este câmpul vectorial unitar normal la M . În particular, pentru $\|\vec{v}\| = 1$, numărul $II_P(\vec{v}, \vec{v})$ este egal cu curbura normală a lui M în punctul P , în direcția \vec{v} . Funcția $P \rightarrow II_P$ se numește a *doua formă fundamentală a suprafeței M și se notează cu II* . Cunoașterea acesteia este echivalentă cu cunoașterea aplicației Weingarten. De aceea geometria pe M produsă de a doua formă fundamentală conține elemente matematice ce permit descrierea formei suprafeței local sau global: curbura normală, curburi principale, curbura Gauss, curbura medie etc. Deși toate acestea sunt introduse pornind de la câmpul vectorial unitar normal pe suprafața M , adică de la un element care aparține calculului din \mathbb{R}^3 , totuși Gauss a demonstrat că curbura care azi îi poartă numele este un element intrinsec (se poate exprima cu coeficienții primei forme fundamentale). Proprietățile suprafeței M care nu depinde numai de prima formă fundamentală se numesc *proprietăți rigide*.

Primele două forme fundamentale împreună cu anumite relații între coeficienții lor fixează suprafața M până la o izometrie în \mathbb{R}^3 .

Forma biliniară simetrică III_P asociată pătratului aplicației lui Weingarten S_P , adică funcția reală definită prin

$$III_P(\vec{v}, \vec{w}) = \langle S_P^2(\vec{v}), \vec{w} \rangle = \langle S_P(\vec{v}), S_P(\vec{w}) \rangle, \quad \vec{v}, \vec{w} \in T_P M$$

se numește a *treia formă fundamentală a suprafeței M în punctul P* . Aceasta determină funcția $P \rightarrow III_P$, notată cu III și numită a *treia formă fundamentală a suprafeței M* .

Formele fundamentale I, II, III , curbura medie H și curbura Gauss K sunt legate prin relația

$$III - 2H \cdot II + K \cdot I = 0.$$

10.11 Formule de calcul

Fie M o suprafață. Ne propunem să exprimăm curbura Gauss K , curbura medie H și curburile principale k_1, k_2 cu ajutorul unei hărți în M . Fie $r : D \rightarrow M$ o hartă cu ajutorul căreia reprezentăm o porțiune $r(D)$ din M . Acestei hărți îi atașăm trei funcții reale

$$E = \langle \vec{r}_u, \vec{r}_u \rangle, \quad F = \langle \vec{r}_u, \vec{r}_v \rangle, \quad G = \langle \vec{r}_v, \vec{r}_v \rangle$$

definite pe D . Funcțiile E și G sunt strict pozitive deoarece reprezintă pătratele lungimilor vitezelor parțiale. Unghiul θ dintre \vec{r}_u și \vec{r}_v depinde de F (fig.128) deoarece

$$F = \|\vec{r}_u\| \|\vec{r}_v\| \cos \theta = \sqrt{EG} \cos \theta.$$

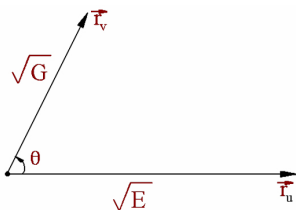


Fig. 128

Funcțiile E, F și G măsoară modul în care r îndoaie regiunea plană D pentru a realiza din ea regiunea curbă $r(D)$ din M . Aceste funcții determină complet prima formă fundamentală a suprafeței. Într-adevăr, dacă \vec{a} și \vec{b} sunt doi vectori tangenți la M în punctul $r(u, v)$, atunci avem

$$(*) \quad \vec{a} = a_1 \vec{r}_u + a_2 \vec{r}_v, \quad \vec{b} = b_1 \vec{r}_u + b_2 \vec{r}_v$$

și deci

$$I(\vec{a}, \vec{b}) = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = E a_1 b_1 + F(a_1 b_2 + a_2 b_1) + G a_2 b_2.$$

În particular, vectorul $d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$ este tangent la $r(D)$ și deci pătratul elementului de arc (al unei curbe de pe $r(D)$) este

$$ds^2 = \langle d\vec{r}, d\vec{r} \rangle = E du^2 + 2F du dv + G dv^2.$$

Acesta este indus de pătratul elementului de arc din \mathbb{R}^3 , $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, via $dx = x_u du + x_v dv$, etc.

Fie o curbă Γ de pe suprafața M , dată prin ecuațiile:

$$\Gamma : u = u(t), v = v(t), \quad t \in I$$

cu u și v funcții derivabile.

Ecuția curbei Γ în spațiu va fi:

$$\Gamma : \vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t)), t \in I. \quad (10.1)$$

Abscisa curbilinie pe curba Γ este:

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\vec{r}_u(u(t), v(t))u'(t) + \vec{r}_v(u(t), v(t))v'(t)\| dt, \quad (10.2)$$

unde am notat $\|w\| = \sqrt{\langle w, w \rangle}$.

Elementul de arc al curbei va fi:

$$ds = \sqrt{E(u(t), v(t))u'^2(t) + 2F(u(t), v(t))u'(t)v'(t) + G(u(t), v(t))v'^2(t)} dt. \quad (10.3)$$

Lungimea unui arc de curbă de pe curba Γ , corespunzător lui $t \in [a, b]$ este:

$$l_{\widehat{AB}} = \int_a^b \sqrt{E(u(t), v(t))u'^2(t) + 2F(u(t), v(t))u'(t)v'(t) + G(u(t), v(t))v'^2(t)} dt. \quad (10.4)$$

Pentru o curbă coordonată Γ_v și arcul ei $\widehat{A_1A_2}$, cu $v \in [v_1, v_2]$, se obține:

$$l_{\widehat{A_1A_2}} = \int_{v_1}^{v_2} \sqrt{G} dv, \quad (10.5)$$

deoarece din ecuația curbei $\Gamma_v : u = u_0$ rezultă $du = 0$.

Analog, pentru un arc de curbă al curbei Γ_u , cu $u \in [u_1, u_2]$, se obține:

$$l_{\widehat{A_1A_2}} = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{E} du. \quad (10.6)$$

Sa arătăm că și unghiul dintre două curbe se poate exprima prin prima formă fundamentală.

Fie două curbe oarecare de pe suprafață M , notate cu Γ_1 și Γ_2 , date prin ecuațiile:

$$\Gamma_1 : \begin{cases} u = u_1(t) \\ v = v_1(t) \end{cases}, \quad \Gamma_2 : \begin{cases} u = u_2(t) \\ v = v_2(t) \end{cases}$$

care se intersectează în punctul $P(t_0)$, cu $u_0 = u_1(t_0) = u_2(t_0)$, $v_0 = v_1(t_0) = v_2(t_0)$.

Unghiul dintre vectorii tangenți la cele două curbe în punctul lor comun de intersecție se numește *unghiul dintre cele două curbe*.

Vectorul tangent la curba Γ_1 în punctul P este

$$\frac{d\bar{r}_1}{dt}(t_0) = \bar{r}'_{u_0} \frac{du_1}{dt}(t_0) + \bar{r}'_{v_0} \frac{dv_1}{dt}(t_0).$$

Însă vectorul $d\bar{r}(t_0) = \bar{r}'_{u_0} du + \bar{r}'_{v_0} dv$, cu $du = u'_1(t)dt$, $dv = v'_1(t)dt$ este colinear cu $\bar{r}'_1(t_0)$.

Vectorul tangent la curba Γ_2 în punctul P este

$$\frac{d\bar{r}_2}{dt}(t_0) = \bar{r}'_{u_0} \frac{du_2}{dt}(t_0) + \bar{r}'_{v_0} \frac{dv_2}{dt}(t_0).$$

Pe curba Γ_2 vom nota simbolul diferențialei cu δ , deci $\delta\bar{r}(t_0) = \bar{r}'_{u_0} \delta u + \bar{r}'_{v_0} \delta v$, cu $\delta u = u'_2(t)\delta t$, $dv = v'_2(t)\delta t$ este colinear cu $\bar{r}'_2(t_0)$.

Notăm unghiul dintre curbe cu θ și vom obține:

$$\cos \theta = \frac{\langle d\bar{r}(t_0), \delta\bar{r}(t_0) \rangle}{\|d\bar{r}(t_0)\| \|\delta\bar{r}(t_0)\|} \Leftrightarrow \quad (10.7)$$

$$\cos \theta = \frac{\langle \bar{r}'_{u_0} du + \bar{r}'_{v_0} dv, \bar{r}'_{u_0} \delta u + \bar{r}'_{v_0} \delta v \rangle}{\sqrt{ds} \sqrt{\delta s}} \Leftrightarrow$$

$$\cos \theta = \frac{E_0 du \delta u + F_0 (du \delta v + dv \delta u) + G_0 dv \delta v}{\sqrt{E_0 du^2 + 2F_0 du dv + G_0 dv^2} \sqrt{E_0 \delta u^2 + 2F_0 \delta u \delta v + G_0 \delta v^2}}, \quad (10.8)$$

unde $E_0 = E(u_0, v_0)$, $F_0 = F(u_0, v_0)$, $G_0 = G(u_0, v_0)$.

Condiția ca două curbe de pe această suprafață să fie ortogonale este:

$$E du \delta u + F (du \delta v + dv \delta u) + G dv \delta v = 0. \quad (10.9)$$

În particular, unghiul φ format de curbele de coordonate ale suprafeței este

$$\cos \varphi = \frac{F}{\sqrt{EG}}. \quad (10.10)$$

Curbele de coordonate ale unei suprafețe reprezentată parametric sunt ortogonale dacă și numai dacă $F(u, v) = 0, \forall (u, v) \in D$. O parametrizare a suprafeței cu această proprietate se numește *ortogonală*.

12.1. Traectorii ortogonale. Fie $C_\alpha : \varphi(u, v, \alpha) = 0$ o familie de curbe pe suprafața considerată. Vom determina o altă familie de curbe de pe această suprafață, Γ_β , astfel încât orice curbă a familiei C_α să fie ortogonală pe orice curbă din familia Γ_β . Folosim ecuația familiei de curbe dată și o vom deriva în raport cu u . Se obține sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} \varphi(u, v, \alpha) = 0 \\ \varphi_u + \varphi_v v' = 0, \end{cases}$$

din care se elimină parametrul α și se obține ecuația diferențială $F(u, v, v') = 0$ care se poate scrie sub forma explicită $v' = \frac{dv}{du} = f(u, v)$. Condiția de ortogonalitate a familiilor de curbe, (10.9) se poate scrie sub forma:

$$G \frac{dv}{du} \frac{\delta v}{\delta u} + F \left(\frac{\delta v}{\delta u} + G \frac{dv}{du} \right) + E = 0$$

și folosind ecuația diferențială verificată de curbele C_α putem scrie:

$$G f(u, v) \frac{\delta v}{\delta u} + F \left(\frac{\delta v}{\delta u} + f(u, v) \right) + E = 0$$

adică ecuația diferențială:

$$\frac{\delta v}{\delta u} = - \frac{Ff + E}{Gf + F}. \quad (10.11)$$

Soluțiile acestei ecuații diferențiale este familia de curbe $\Gamma_\beta : \chi(u, v; \beta) = 0$.

Cu ajutorul vitezelor parțiale \vec{r}_u și \vec{r}_v se construiește funcția vectorială $\vec{Z} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v$ care atașează fiecărui punct $(u, v) \in D$ un vector perpendicular pe \vec{r}_u, \vec{r}_v în punctul $r(u, v) \in r(D)$. Avem

$$\|\vec{Z}\| = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| = \sqrt{EG - F^2} > 0 \quad (\text{identitatea Lagrange}).$$

Din punct de vedere local, funcția \vec{Z} poate fi privită ca un câmp vectorial normal pe $r(D) \subset M$ și cu ajutorul ei construim câmpul normal unitar

$$\vec{U} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}.$$

Conform observațiile anterioare, calculul derivatelor covariante ale câmpurilor vectoriale definite pe M în punctele curbelor parametrice ale hărții r se reduce la calculul derivatelor parțiale în raport cu u și v . Dacă

$$\vec{r}(u, v) = (x(u, v), \quad y(u, v), \quad z(u, v)),$$

atunci

$$\vec{r}_u = (x_u, y_u, z_u), \quad \vec{r}_v = (x_v, y_v, z_v)$$

și

$$\begin{aligned} \vec{r}_{u^2} &= (x_{u^2}, y_{u^2}, z_{u^2}) = D_{\vec{r}_u} \vec{r}_u, \\ \vec{r}_{uv} &= (x_{uv}, y_{uv}, z_{uv}) = D_{\vec{r}_u} \vec{r}_v = D_{\vec{r}_v} \vec{r}_u, \\ \vec{r}_{v^2} &= (x_{v^2}, y_{v^2}, z_{v^2}) = D_{\vec{r}_v} \vec{r}_v \end{aligned}$$

sunt vectori legați în $r(u, v)$.

Fie S aplicația Weingarten atașată lui \vec{U} . Cu ajutorul ei definim pe D alte trei funcții reale

$$\begin{aligned} l &= \langle S(\vec{r}_u), \vec{r}_u \rangle, \\ m &= \langle S(\vec{r}_u), \vec{r}_v \rangle = \langle \vec{r}_u, S(\vec{r}_v) \rangle, \\ n &= \langle S(\vec{r}_v), \vec{r}_v \rangle. \end{aligned}$$

Deoarece \vec{r}_u, \vec{r}_v constituie o bază a lui $T_P M$, $\forall P \in r(D) \subset M$, aceste funcții determină unic a doua formă fundamentală. Într-adevăr, dacă \vec{a} și \vec{b} sunt doi vectori tangenți la M în punctul $r(u, v)$, atunci avem exprimările (*) și deci

$$II(\vec{a}, \vec{b}) = \langle S(\vec{a}), \vec{b} \rangle = la_1b_1 + m(a_1b_2 + a_2b_1) + na_2b_2.$$

În particular

$$\langle S(d\vec{r}), d\vec{r} \rangle = ldu^2 + 2mdudv + ndv^2.$$

Coordonatele lui $S(\vec{r}_u)$ și $S(\vec{r}_v)$ în raport cu \vec{r}_u, \vec{r}_v nu sunt simple din cauza faptului că baza \vec{r}_u și \vec{r}_v nu este în general ortonormată. Avem însă avantajul că obținem expresii simple pentru curbura Gauss și curbura medie.

12.1. Teoremă. *Dacă r este o hartă în M , atunci*

$$\begin{aligned} K(r) &= \frac{ln - m^2}{EG - F^2}, \\ H(r) &= \frac{Gl - 2Fm + En}{2(EG - F^2)}. \end{aligned}$$

Demonstrație. Expresiile lui $K(P)$ și $H(P)$ în funcție de vectorii $\vec{V}_1(P)$ și $\vec{V}_2(P)$ tangenți la M în P sunt date în §10, lema 10.5. Dacă vectorii $\vec{V}_1(P)$ și $\vec{V}_2(P)$ sunt înlocuiți cu vectorii $\vec{r}_u(u, v), \vec{r}_v(u, v)$ tangenți la M în $r(u, v)$, atunci găsim pe $K(r(u, v))$ și $H(r(u, v))$.

Dacă harta r reiese din context, atunci funcțiile compuse $K(r)$ și $H(r)$ vor fi scrise pe scurt K și H .

Determinarea funcțiilor l, m și n pornind de la definiție este complicată. De aceea, urmând ideea din lema 9.1, vom stabili niște formule mai avantajoase din punctul de vedere al calculelor. Deoarece

$$\langle \vec{U}, \vec{r}_u \rangle = 0$$

derivarea parțială în raport cu v (derivarea obișnuită de-a lungul curbei de parametru v) ne dă

$$0 = \frac{\partial}{\partial v} \langle \vec{U}, \vec{r}_u \rangle = \langle \vec{U}_v, \vec{r}_u \rangle + \langle \vec{U}, \vec{r}_{uv} \rangle.$$

Pe de altă parte știm că

$$\vec{U}_v = -S(\vec{r}_v)$$

și astfel găsim

$$m = \langle S(\vec{r}_v), \vec{r}_u \rangle = \langle \vec{U}, \vec{r}_{uv} \rangle = \langle \vec{U}, \vec{r}_{vu} \rangle = \langle \vec{r}_v, S(\vec{r}_u) \rangle.$$

Astfel am pus în evidență o nouă formulă pentru calculul lui m (fig.129) și am demonstrat că operatorul S este simetric.

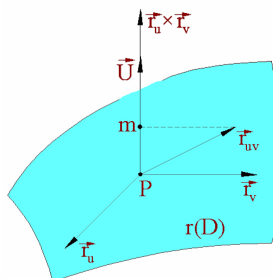


Fig. 129

12.2. Teoremă. Dacă r este o hartă în M , atunci

$$\begin{aligned} l &= \langle S(\vec{r}_u), \vec{r}_u \rangle = \langle \vec{U}, \vec{r}_{u^2} \rangle, \\ m &= \langle S(\vec{r}_u), \vec{r}_v \rangle = \langle \vec{r}_u, S(\vec{r}_v) \rangle = \langle \vec{U}, \vec{r}_{uv} \rangle, \\ n &= \langle S(\vec{r}_v), \vec{r}_v \rangle = \langle \vec{U}, \vec{r}_{v^2} \rangle, \end{aligned}$$

adică

$$l du^2 + 2m dudv + n dv^2 = \langle \vec{U}, d^2 \vec{r} \rangle.$$

Demonstrație. Pentru l se derivează $0 = \langle \vec{U}, \vec{r}_u \rangle$ în raport cu u , iar pentru n se derivează $0 = \langle \vec{U}, \vec{r}_v \rangle$ în raport cu v .

Notă. Dacă $M : z = f(x, y)$, atunci

$$\vec{U} = \frac{-f_x \vec{i} - f_y \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad S_P(\vec{v}) = -D_{\vec{v}} \vec{U}, \quad \langle S_P(\vec{v}), \vec{v} \rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} d^2 f(\vec{v}, \vec{v}),$$

\vec{v} fiind un vector tangent la M .

Dacă $M : f(x, y, z) = 0$, atunci

$$\vec{U} = \frac{f_x \vec{i} + f_y \vec{j} + f_z \vec{k}}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}}, \quad S_P(\vec{v}) = -D_{\vec{v}} \vec{U}, \quad \langle S_P(\vec{v}), \vec{v} \rangle = -\frac{1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}} d^2 f(\vec{v}, \vec{v}),$$

\vec{v} fiind un vector tangent la M .

10.12 Curbe speciale pe o suprafață

Curbe principale

13.1. Definiție. O curbă regulată α de pe suprafața M se numește *curbă principală sau linie de curbura* dacă viteza sa α' determină în fiecare punct al curbei o direcție principală.

Astfel curbele principale sunt traiectorii în direcțiile în care curbura normală a lui M devine maximă sau minimă.

13.2. Teoremă. Direcțiile principale ale unei suprafețe netede, într-un punct nesingular P al suprafeței sunt definite de ecuația diferențială:

$$\begin{vmatrix} E & F & G \\ l & m & n \\ dv^2 & -dudv & du^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (10.12)$$

Demonstrație. Curbura normală în punctul P , cu excepția semnului, are expresia:

$$k_n = \frac{l du^2 + 2m dudv + n dv^2}{E du^2 + 2F dudv + G dv^2}.$$

Notăm panta tangentelor la curbele care trec pe suprafață prin punctul P , cu $w = \frac{dv}{du}$ și atunci putem scrie:

$$k_n = \frac{l + 2mw + nw^2}{E + 2Fw + Gw^2}.$$

Curbura normală variază în funcție de w , este deci o funcție cu variabila w , funcție continuă pe un compact și își atinge marginile.

Vom determina punctele critice ale funcției k_n ; vom calcula derivata ei în raport cu variabila sa w și o vom egala cu 0:

$$k_n'(w) = 0 \Leftrightarrow k_n'(w) = \frac{m + nw}{F + Gw} = \frac{l + mw}{E + Fw}. \quad (10.13)$$

Vom obține ecuația:

$$Em - Fl + (En - Gl)w + (Fn - Gm)w^2 = 0. \quad (10.14)$$

Această ecuație are două soluții reale în toate punctele care nu sunt ombilicale și se poate scrie sub forma:

$$\begin{vmatrix} E & F & G \\ l & m & n \\ w^2 & -w & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

echivalentă cu cea din enunțul teoremei.

13.3. Direcțiile principale ale unei suprafețe, cu excepția sferei și planului, sunt ortogonale.

Demonstrație. Condiția de ortogonalitate a două curbe ale unei suprafețe este:

$$Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v = 0,$$

care se poate scrie sub forma:

$$E + F \left(\frac{\delta v}{\delta u} + \frac{dv}{du} \right) + G \frac{\delta v}{\delta u} \frac{dv}{du} = 0 \quad (10.15)$$

Din ecuația (10.14):

$$w_1 + w_2 = \frac{\delta v}{\delta u} + \frac{dv}{du} = -\frac{En - Gl}{Fn - Gm},$$

$$w_1 w_2 = \frac{\delta v}{\delta u} \frac{dv}{du} = \frac{Em - Fl}{Fn - Gm}$$

care verifică condiția de ortogonalitate (10.15).

Prin orice punct al unei suprafețe, cu excepția sferei și planului trec câte două linii de curbură, reale și ortogonale.

13.4. Linii de curbură sunt curbe coordonate pe o suprafață dacă și numai dacă $F = 0$ și $m = 0$.

13.5. Teoremă. Fie α o curbă regulată din M și \vec{U} restricția câmpului normal unitar la α .

1) Curba α este principală dacă și numai dacă U' și $\vec{\alpha}'$ sunt coliniari în fiecare punct.

2) Dacă α este o curbă principală, atunci

$$k_n \left(\frac{\vec{\alpha}'}{\|\vec{\alpha}'\|} \right) = \frac{\langle \vec{\alpha}'', \vec{U} \rangle}{\langle \vec{\alpha}', \vec{\alpha}' \rangle}.$$

Demonstrație.

1) Curba α este principală dacă și numai dacă $S(\vec{\alpha}')$ și $\vec{\alpha}'$ sunt coliniari. Pe de altă parte $S(\vec{\alpha}') = -\vec{U}'$ și astfel afirmația devine evidentă.

2) Deoarece $\frac{\vec{\alpha}'}{\|\vec{\alpha}'\|}$ este un vector principal avem

$$k_1 \quad \text{sau} \quad k_2 = k_n \left(\frac{\vec{\alpha}'}{\|\vec{\alpha}'\|} \right) = \left\langle S \left(\frac{\vec{\alpha}'}{\|\vec{\alpha}'\|} \right), \frac{\vec{\alpha}'}{\|\vec{\alpha}'\|} \right\rangle = \frac{\langle S(\vec{\alpha}'), \vec{\alpha}' \rangle}{\|\vec{\alpha}'\|^2} = \frac{\langle \vec{\alpha}'', \vec{U} \rangle}{\langle \vec{\alpha}', \vec{\alpha}' \rangle}$$

(vezi și lema 9.1).

Curbe asimptotice

Direcțiile tangente la suprafața M pe care curbura normală este zero se numesc *direcții asimptotice*. Cu alte cuvinte un vector \vec{v} tangent la M este asimptotic dacă și numai dacă $k(\vec{v}) = 0$, adică $\langle S(\vec{v}), \vec{v} \rangle = 0$.

Se mai poate spune că direcțiile tangente într-un punct al suprafața M , care anulează a doua formă pătratică a suprafeței sunt direcții asimptotice ale suprafeței în acel punct.

13.6. Teoremă. Fie P un punct din suprafața M .

1) Dacă $K(P) > 0$, atunci în P nu există direcții asimptotice.

2) Dacă $K(P) < 0$, atunci există exact două direcții asimptotice în P . Bisectoarele acestor direcții sunt direcțiile principale. Unghiul dintre o direcție principală și o direcție asimptotică este dat de (fig.130)

$$\operatorname{tg}^2 \theta = -\frac{k_1(P)}{k_2(P)}.$$

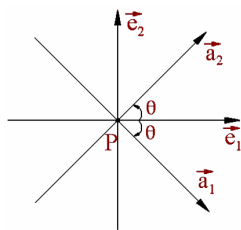


Fig. 130

3) Fie $K(P) = 0$. Dacă P este un planar, atunci orice direcție care trece prin P este asimptotică. Dacă P nu este planar, atunci există o singură direcție asimptotică care este și direcție principală.

Demonstrație. Totul rezultă din formula Euler

$$k_n(\vec{u}) = k_1(P) \cos^2 \theta + k_2(P) \sin^2 \theta, \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

(1) Deoarece k_1, k_2 au același semn rezultă $k_n(\vec{u}) \neq 0$.

(2) Deoarece k_1 și k_2 au semne contrare, din ecuația

$$k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta = 0$$

obținem două direcții asimptotice.

(3) Dacă P este planar, adică $k_1(P) = k_2(P) = 0$, atunci rezultă $k_n(\vec{u}) = 0$ și deci direcțiile asimptotice sunt nedeterminate.

Dacă $k_1(P) \neq 0, k_2(P) = 0$, atunci $k_n(\vec{u}) = k_1(P) \cos^2 \theta$ se anulează numai pentru $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ și deci $\vec{u} = \vec{e}_2$.

13.7. Definiție. O curbă regulată α din M se numește *curbă asimptotică* dacă viteza sa $\vec{\alpha}'$ dă în fiecare punct o direcție asimptotică.

13.8. Teoremă. Fie α o curbă regulată din M și \vec{U} restricția câmpului normal unitar la α .

(1) Curba α este asimptotică dacă și numai dacă \vec{U}' și $\vec{\alpha}'$ sunt ortogonali în orice punct.

(2) Curba α este asimptotică dacă și numai dacă accelerația sa $\vec{\alpha}''$ este tangentă la M .

Demonstrație.

(1) Curba α este asimptotică $\Leftrightarrow k_n(\vec{\alpha}') = 0 \Leftrightarrow \langle S(\vec{\alpha}'), \vec{\alpha}' \rangle = 0$, și ținând cont că $S(\vec{\alpha}') = -\vec{U}' \Leftrightarrow \langle \vec{U}', \vec{\alpha}' \rangle = 0$.

(2) Derivând pe $\langle \vec{U}', \vec{\alpha}' \rangle = 0$ găsim

$$\langle \vec{U}'', \vec{\alpha}' \rangle + \langle \vec{U}', \vec{\alpha}'' \rangle = 0$$

și deci $\langle \vec{U}'', \vec{\alpha}' \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \vec{U}', \vec{\alpha}'' \rangle = 0$.

Ecuția diferențială a curbelor asimptotice este:

$$l du^2 + 2m dudv + n dv^2 = 0$$

sau echivalent:

$$n \left(\frac{dv}{du} \right)^2 + m \frac{dv}{du} + l = 0,$$

unde l, m, n sunt coeficienții celei de a doua forme fundamentale a suprafeței.

Vom rezolva această ecuație de gradul al doilea în $\frac{dv}{du}$, notăm cu $f_1(u, v), f_2(u, v)$ soluțiile ei și prin integrarea ecuațiilor diferențiale $\frac{dv}{du} = f_1(u, v)$ și $\frac{dv}{du} = f_2(u, v)$ se vor obține două familii de curbe asimptotice.

- Dacă discriminantul ecuației de gradul al doilea $m^2 - ln > 0$, atunci liniile asimptotice sunt reale.
- Dacă $m^2 - ln = 0$, atunci liniile asimptotice sunt reale confundate.
- Dacă $m^2 - ln < 0$, atunci liniile asimptotice sunt imaginare.

Folosind coeficienții celei de a doua forme pătratică fundamentală a suprafeței, putem clasifica punctele acestea astfel:

1. Dacă $m^2 - ln > 0$ în punctul P al unei suprafețe, atunci prin P trec două direcții asimptotice distincte și P se numește punct *hiperbolic*.
2. Dacă $m^2 - ln > 0$ în punctul P al unei suprafețe, atunci direcțiile asimptotice sunt confundate în acest punct. Punctul P se numește *parabolic*.
3. Dacă $m^2 - ln > 0$, direcțiile asimptotice nu sunt reale în acest punct, sunt imaginare conjugate și punctul se numește *eliptic*.
4. Dacă $\frac{E}{l} = \frac{F}{m} = \frac{G}{n}$, atunci punctul se numește *ombilical*.
5. Dacă $l = m = n = 0$, atunci punctul se numește *planar*.

13.9. Observație Dacă o suprafață netedă are puncte eliptice și hiperbolice, atunci ele vor fi despărțite printr-o linie de puncte parabolice, numită linia parabolică a suprafeței, de ecuație $m^2 - ln = 0$.

13.10. Propoziție Orice punct ombilical al unei suprafețe netede este punct eliptic

Demonstrație. Pentru un punct ombilical al suprafeței, conform definiției are loc egalitatea:

$$\frac{E}{l} = \frac{F}{m} = \frac{G}{n} = \frac{1}{a}$$

adică se obține $ln - m^2 = a^2(EG - F^2)$. Cum suprafața nu are puncte singulare, rezultă $ln - m^2 > 0$ și deci punctul este eliptic.

13.11. Teoremă. O suprafață M este minimală dacă și numai dacă în fiecare punct al său există două direcții asimptotice ortogonale.

Demonstrație. $H(P) = 0 \Leftrightarrow k_1(P) = -k_2(P) \Leftrightarrow (1)P$ este planar (și criteriul este banal) sau (2) $K(P) < 0$ cu $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}$ ceea ce înseamnă că cele două direcții asimptotice sunt ortogonale.

13.12. Teoremă. Dacă M este o suprafață riglată, atunci $K \leq 0$. Suprafața riglată M este local euclidiană ($K = 0$) dacă și numai dacă \vec{U} este paralel de-a lungul fiecărei generatoare a lui M (de-a lungul generatoarei avem și același plan tangent).

Demonstrație. O dreaptă $\vec{\alpha} = \vec{a} + t\vec{b}$ situată pe o suprafață este o curbă asimptotică deoarece $\vec{\alpha}'' = \vec{0}$ este un vector tangent la M . Prin definiție, prin fiecare punct al unei suprafețe riglate

trece o dreaptă care este conținută în suprafață. Astfel în fiecare punct avem cel puțin o direcție asimptotică și în baza teoremei 13.3 rezultă $K \leq 0$.

Fie α o generatoare oarecare a lui M . Dacă \vec{U} este paralel de-a lungul lui α , atunci $S(\vec{\alpha}') = -\vec{U}' = \vec{0}$. Astfel α este o curbă principală cu curbura normală $k_n(\vec{\alpha}') = 0$ și deci $K = k_1 k_2 = 0$. Invers, pentru $K = 0$, din cazul (3) al teoremei 13.3 rezultă că direcțiile asimptotice (și curbele) din M sunt și principale. Astfel fiecare generatoare α este atât o curbă principală, adică

$$S(\vec{\alpha}') = k_n(\vec{\alpha}')\vec{\alpha}',$$

cât și o curbă asimptotică, adică $k_n(\vec{\alpha}') = 0$. Rezultă

$$\vec{U}' = -S(\vec{\alpha}') = \vec{0}.$$

Geodezice

13.13. Definiție. O curbă regulată α din M se numește *geodezică* a lui M dacă accelerația sa $\vec{\alpha}''$ este normală la M .

Deoarece $\vec{\alpha}''$ este normală lui M , un observator din M nu sesizează nici o accelerație de-a lungul lui α , adică pentru un astfel de observator geodezica α este ca linia dreaptă pentru un observator din spațiu. Se poate demonstra că arcul de curbă care dă minimul distanței între două puncte pe o suprafață este o geodezică (și reciproc).

Fie α o geodezică a lui M . Deoarece $\vec{\alpha}''$ este normală la M , în particular avem

$$\langle \vec{\alpha}'', \vec{\alpha}' \rangle = 0 \Rightarrow \langle \vec{\alpha}', \vec{\alpha}' \rangle = \text{const.}$$

și deci viteza unei geodezice este constantă.

Deși definiția geodezicei unei suprafațe este independentă de aplicația Weingarten, totuși între elementele Frenet atașate unei geodezice și aplicația Weingarten există o strânsă legătură. Pentru a pune în evidență acest lucru, fie α o geodezică cu viteza unu. Deoarece $\vec{N} = \frac{\vec{\alpha}''}{k}$ este un vector normal la M , avem

$$-\vec{N}' = S(\vec{\alpha}') = S(\vec{T})$$

și în baza formulelor Frenet, găsim

$$S(\vec{T}) = k\vec{T} - \tau\vec{B}.$$

10.13 Aria unei porțiuni de suprafață

Fie σ o porțiune dintr-o suprafață $M \subset \mathbb{R}^3$ reprezentată de imaginea funcției $r : D_0 \rightarrow M$, adică $\sigma = r(D_0)$, unde D_0 este un dreptunghi închis, iar $r : D \rightarrow M$, $D = \text{int}D_0$ este o hartă. Dorim să definim aria lui $\sigma = r(D_0)$. Fie $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in D_0$ ecuația vectorială a lui $r(D_0) = \sigma$. Liniile de coordonate împart pe σ în patrulete curbilinii. Dintre acestea alegem pe cel mărginit de curbele $(u), (v), (u + \Delta u), (v + \Delta v)$ (fig.131).

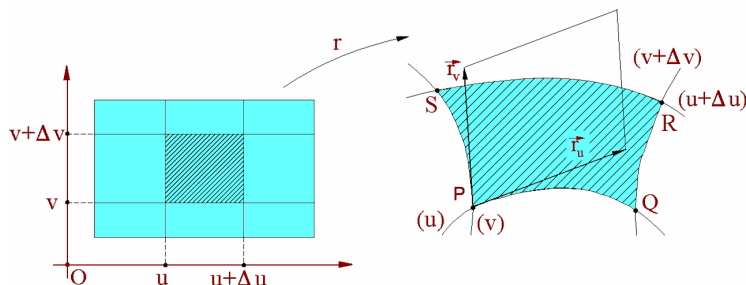


Fig. 131

Aria patrulaterului curbiliniu $PQRS$ se aproximează cu aria paralelogramului rectiliniu construit în planul tangent $T_P M$ pe vectorii $\vec{r}_u \Delta u$ și $\vec{r}_v \Delta v$. Astfel

$$\text{Aria } PQRS = \|\vec{r}_u \Delta u \times \vec{r}_v \Delta v\| = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| \Delta u \Delta v$$

și

$$\text{Aria } \sigma = \sum \text{Aria } PQRS = \sum \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| \Delta u \Delta v.$$

Aceste observații ne permit să spunem că simbolul

$$d\sigma = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| dudv = \sqrt{\vec{r}_u^2 \vec{r}_v^2 - (\vec{r}_u, \vec{r}_v)^2} dudv = \sqrt{EG - F^2} dudv$$

este elementul de arie al porțiunii σ . Aria lui σ se definește ca fiind integrala

$$A = \iint_{\sigma} d\sigma = \iint_{D_0} \sqrt{EG - F^2} dudv.$$

Dacă σ este dată cartezian explicit prin $z = f(x, y)$, atunci

$$d\sigma = \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy$$

și

$$A = \iint_{D_0} \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy.$$

Fie M o suprafață și $\sigma_i \subset M$ un număr finit de imagini de tipul $r_i(D_{0i})$ care nu au în comun decât frontierele $\partial\sigma_i$.

Prin definiție, avem

$$\text{Aria } (\sigma_1 \cup \sigma_2 \dots \cup \sigma_k) = \sum_k \iint_{\sigma_k} d\sigma.$$

14.1. Exemple.

1) Fie σ sfera de rază R . Ea poate fi privită ca fiind imaginea lui $D : 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ prin

$$\begin{cases} x = R \sin \varphi \cos \theta \\ y = R \sin \varphi \sin \theta \\ z = R \cos \varphi \end{cases}$$

și $\sqrt{EG - F^2} = R^2$. Astfel

$$A = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} R^2 \sin \varphi d\varphi d\theta = 4\pi R^2.$$

2) Fie torul de raze $R > r > 0$:

$$\begin{cases} x = (R + r \cos u) \sin v \\ y = (R + r \cos u) \sin v \\ z = r \sin u, \end{cases} \quad (u, v) \in [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi].$$

Să se arate că

$$A = 4\pi^2 Rr.$$

10.14 Subvarietăți ale lui \mathbb{R}^n

Fie \mathbb{R}^n spațiul euclidian canonic cu n dimensiuni.

15.1. Fie $m \leq n$ două numere naturale. Incluziunea canonică $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$ este $(x_1, \dots, x_m) \rightarrow (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$. Uneori se scrie $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$.

O submulțime M a lui \mathbb{R}^n se numește *subvarietate de dimensiune m* dacă satisface una dintre următoarele condiții (echivalente):

(1) pentru $\forall x \in M$ există o mulțime deschisă D din \mathbb{R}^n care conține pe x și un difeomorfism $f : D \rightarrow f(D) \subset \mathbb{R}^n$ astfel încât $f(D \cap M) = f(D) \cap \mathbb{R}^m$;

(2) pentru $\forall x \in M$ există o mulțime deschisă D din \mathbb{R}^n care conține pe x și $n - m$ funcții diferentiabile $f_i : D \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n - m$ astfel încât vectorii $\text{grad} f_i(x)$ să fie liniar independenți și

$$M \cap D = \{x \mid x \in D, f_1(x) = 0, \dots, f_{n-m}(x) = 0\};$$

(3) pentru $\forall x \in M$ există o mulțime deschisă D din \mathbb{R}^n care conține pe x și o submersie $f : D \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ astfel încât $M \cap D = \{x \mid x \in D, f(x) = 0\}$;

(4) pentru $\forall x \in M$ există o mulțime deschisă D din \mathbb{R}^n care conține pe $x = (x_1, \dots, x_n)$, o mulțime deschisă E din \mathbb{R}^m care conține pe $x = (x_1, \dots, x_m)$ și $n - m$ funcții diferentiabile $h_i : E \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n - m$, astfel încât, abstractie făcând eventual de o permutare a coordonatelor, $M \cap D$ să fie graficul aplicației $(h_1, \dots, h_{n-m}) : E \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$;

(5) pentru $\forall x \in M$ există o mulțime deschisă D din \mathbb{R}^n care conține pe x , o mulțime deschisă E din \mathbb{R}^m și o imersie injectivă $g : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ cu imaginea $M \cap D$ și cu inversa $g^{-1} : M \cap D \rightarrow E$ continuă.

Dacă în fiecare dintre aceste definiții utilizăm funcții de clasă C^p , atunci M se numește *subvarietate de clasă C^p* .

Numărul natural $n - m$ se numește *codimensiunea* subvarietății M .

15.2. Subvarietățile de dimensiune 0 sunt mulțimile de puncte izolate din \mathbb{R}^n . Subvarietățile de dimensiune 1 se numesc *curbe*, iar subvarietățile de dimensiune 2 se numesc *suprafețe*.

Subvarietățile de codimensiune 0 sunt mulțimile deschise din \mathbb{R}^n . Subvarietățile de codimensiune 1 se numesc *hipersuprafețe*.

15.3. Fie M o subvarietate a lui \mathbb{R}^n de dimensiune m . O funcție diferentiabilă $h : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ cu proprietățile

- 1) D este o submulțime deschisă din \mathbb{R}^m ,
- 2) $h(D) \subset M$,
- 3) h este o imersie injectivă,
se numește *hartă* în M .

Dacă h este numai imersie, atunci h se numește *parametrizare* a regiunii $h(D)$ din M . Conform lui 15.1 (5) orice punct $x \in M$ admite hărți $h : D \rightarrow M$ astfel încât $x \in h(D)$.

15.4. Fie M o subvarietate a lui \mathbb{R}^n . Un vector v din \mathbb{R}^n se numește *tangent* în x la M dacă există o curbă din M (o aplicație diferențiabilă $\alpha : I \rightarrow M$, $I =$ interval deschis din \mathbb{R}) pentru care $\alpha(t_0) = x$, $\alpha'(t_0) = v$, $t_0 \in I$.

Mulțimea vectorilor din \mathbb{R}^n tangenți la M în x este un subspațiu vectorial al lui \mathbb{R}^n de dimensiune m , numit *spațiul tangent* la M în x și notat cu $T_x M$.

Mulțimea $TM = \cup_{x \in M} T_x M$ se numește *fibrarea tangentă* a lui M . Aceasta este o subvarietate a lui \mathbb{R}^{2n} de dimensiune $2m$.

15.5. Fie M o subvarietate a lui \mathbb{R}^n și $\alpha : I \rightarrow M$ o curbă din M . Restricția $\alpha : [a, b] \rightarrow M$, $[a, b] \subset I$, se numește *segment de curbă* în M .

O subvarietate M de clasă C^p , $p \geq 1$, se numește *conexă* dacă $\forall x, y \in M$ există un segment de curbă în M care unește pe x cu y .

15.6. O submulțime M a lui \mathbb{R}^n se numește subvarietate de *dimensiune m , cu frontieră*, dacă pentru $\forall x \in M$ există o mulțime deschisă D din \mathbb{R}^n care conține pe x și un difeomorfism $f : D \rightarrow f(D) \subset \mathbb{R}^n$ astfel încât

$$f(D \cap M) = f(D) \cap (H^m \times \{c\}),$$

unde

$$H^m = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m, x_m \geq a\} \quad \text{și} \quad c \in \mathbb{R}^{n-m}.$$

Mulțimea $\partial M = \{x \mid x \in M, f(x) \in \mathbb{R}^{m-1} \times \{a\} \times \{c\}\}$, numită *frontiera* lui M , este o subvarietate de dimensiune $m-1$. Mulțimea $M - \partial M$, numită *interiorul* lui M , este o subvarietate de dimensiune m .

Spațiul tangent $T_x M$ se definește ca și pentru o varietate fără frontieră.

15.7. Hipersuprafețe cu frontieră. Fie \tilde{M} o hipersuprafață în \mathbb{R}^n . O hipersuprafață cu frontieră în \mathbb{R}^n poate fi definită astfel

$$M = \{x \in \tilde{M} \mid g_1(x) \leq c_1, \dots, g_k(x) \leq c_k\}, \quad \text{unde} \quad g_1, \dots, g_k : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$$

sunt funcții diferențiabile cu proprietățile $g_i^{-1}(c_i) \cap g_j^{-1}(c_j) = \emptyset$, $\forall i \neq j$ și $\text{grad} g_i(x) \neq 0$, $\forall x \in g_i^{-1}(c_i)$. Frontiera lui M este

$$\partial M = \bigcup_{i=1}^k g_i^{-1}(c_i) \cap M.$$

Dacă hipersuprafața \tilde{M} este caracterizată prin ecuația

$$f(x) = 0 \quad (\text{grad } f(x) \neq 0, \forall x \in \tilde{M}),$$

atunci

$$M = f^{-1}(c) \bigcap_{i=1}^k g_i^{-1}(-\infty, c_i]$$

și

$$T_x M = \{v \in T_x \mathbb{R}^n \mid (v, \nabla f(x)) = 0\}.$$

Un vector $v \in T_x M$, $x \in \partial M \subset M$ (adică $x \in g_i^{-1}(c_i)$ pentru anumiți i) se numește

- 1) orientat către exterior dacă $\langle v, \nabla g_i(x) \rangle > 0$,
- 2) orientat către interior dacă $\langle v, \nabla g_i(x) \rangle < 0$,
- 3) tangent la frontieră dacă $\langle v, \nabla g_i(x) \rangle = 0$,
- 4) normal la frontieră dacă $\langle v, w \rangle = 0$, $\forall w \in T_x M \cap T_x \partial M$.

15.8. Fie M o hipersuprafață a lui \mathbb{R}^n cu sau fără frontieră. Un câmp vectorial normal unitate U pe M se numește *orientare* a lui M .

Noțiunea generală de orientare va fi dată în capitolul 4, §10.

10.15 Probleme propuse

1. Fie funcția $r : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $r(u, v) = (\cos 2\pi u, \sin 2\pi u, v)$. Să se arate că r este o hartă proprie și că $r(D)$ este suprafața

$$M : x^2 + y^2 = 1, \quad -1 < x < 1, \quad y > 0, \quad z \in \mathbb{R}.$$

2. Fie imersia

$$r : x = u \cos v, \quad y = \sin v, \quad z = a \ln(u + \sqrt{u^2 - a^2}), \quad a > 0, \quad u \in [a, \infty), \quad v \in \mathbb{R}.$$

Să se determine curbele de pe suprafața $r([a, \infty) \times \mathbb{R})$ care intersectează curbele $v = v_0$ sub un unghi constant.

3. Se consideră funcția

$$r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad r(u, v) = (1 + uv, u + u^2v, u^2 + u^3v).$$

- 1) Să se arate că $r(\mathbb{R}^2)$ este o suprafață conică;
- 2) Să se găsească ecuația carteziană a lui $r(\mathbb{R}^2)$.

4. O suprafață care admite simultan parametrizările

$$\vec{r}(u, v) = \vec{\alpha}(u) + v\vec{\beta}(u) \quad \text{și} \quad \vec{r}(u, v) = \vec{\gamma}(v) + u\vec{\varepsilon}(v)$$

se numește *dublu riglată*.

- 1) Să se arate că orice suprafață dublu riglată este o cuadrică;
- 2) Se consideră harta r definită prin

$$x = a \left(u + \frac{1}{v} \right), \quad y = b \left(u - \frac{1}{v} \right), \quad z = \frac{2u}{v}, \quad u \in \mathbb{R}, \quad v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Să se arate că imaginea $r(\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}))$ este o suprafață dublu riglată. Să se determine curbele coordonate ale suprafeței și ecuația carteziană a suprafeței.

5. Să se construiască mulțimile de nivel $M = f^{-1}(c)$, pentru $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ și $c_1 = -1$, $c_2 = 0$, $c_3 = 1$. Pentru fiecare dintre ele să se cerceteze în care puncte P spațiul tangent este $[\nabla f(P)]^\perp$.

6. Fie suprafața $M : x^\alpha y^\beta z^\gamma = 1$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Planul tangent la M în punctul (x_0, y_0, z_0) intersectează axele de coordonate respectiv în punctele A, B, C . Să se arate că punctul (x_0, y_0, z_0) este centrul de greutate al "maselor" α, β, γ aplicate respectiv în A, B, C .

7. Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ mulțime deschisă și conexă, iar $r : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ o parametrizare. Să se arate că dacă normala la suprafața $r(D)$ are direcția fixă, atunci suprafața este o parte a unui plan. Să se verifice acest rezultat pentru

- 1) $r : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $r(u, v) = (u^2 + v^2, uv, (u + v)^2)$,
- 2) $r : \mathbb{R}^2 \setminus \{(u, v) / u > 0, v > 0, u - v > 0, u - 3v > 0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$r(u, v) = \left((u - v)^2, u^2 - 3v^2, \frac{v}{2}(u - 2v) \right).$$

8. Suprafața generată prin rotirea unui cerc în jurul unei axe conținută în planul cercului (care nu intersectează cercul) se numește *tor*.

Fie $a > b > 0$ și funcția $r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definită prin

$$r(u, v) = ((a + b \cos v) \cos u, (a + b \cos v) \sin u, b \sin v).$$

1) Să se arate că r este o parametrizare a torului, dublu periodică și să se determine ecuația carteziană implicită.

2) Să se arate că torul este o suprafață conexă și compactă.

9. Fie suprafața $M : z = f(x, y)$ orientată prin alegerea câmpului normal unitar

$$\vec{U} = \frac{-f_x \vec{i} - f_y \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}.$$

Presupunem că $f(0, 0) = f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$.

- 1) Să se arate că \vec{i} și \vec{j} sunt vectori tangenți la M în $(0, 0, 0)$.
- 2) Să se arate că

$$S(\vec{i}) = f_{x^2}(0, 0)\vec{i} + f_{xy}(0, 0)\vec{j}$$

$$S(\vec{j}) = f_{xy}(0, 0)\vec{i} + f_{y^2}(0, 0)\vec{j}.$$

10. Fie $M = f^{-1}(1)$ unde $f(x, y, z) = -x^2 + y^2 + z^2$. Să se orienteze suprafața M . Să se determine curbura normală a suprafeței în punctul $P(0, 0, 1)$, în direcția \vec{v} , unde \vec{v} este un vector unitar, $\vec{v} \in T_P M$. Cazuri particulare:

- 1) $\vec{v} = \vec{i} = (1, 0, 0)$;
- 2) $\vec{v} = \vec{j} = (0, 1, 0)$;
- 3) $\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$.

11. Fie k_1, k_2 , curbura principală ale suprafeței S de separație a unui lichid. Presiunea normală p , pe elementul de suprafață, într-un punct oarecare, este dată de ecuația Laplace $\sigma(k_1 + k_2) = p$, unde σ este tensiunea superficială, considerată constantă. Să se afle presiunea p când S este:

1) Suprafața Enneper

$$x = \operatorname{Re} \int (1 - t^2) dt, \quad y = \operatorname{Im} \int (1 + t^2) dt, \quad z = \operatorname{Re} \int 2t dt, \quad (t = u + iv, \quad i^2 = -1).$$

2) Șaua: $z = xy$.

12. Fie suprafețele

1) $M : z = e^{x+y} - 1$, 2) $M : z = \ln \cos x - \ln \cos y$, 3) $M : z = (x + 3y)^3$. Să se determine curbura principală și aproximarea pătratică a suprafeței M în jurul lui $(0, 0, 0)$.

13. Fie harta Monge $r : x = u, y = v, z = f(u, v)$. Să se arate că

$$E = 1 + f_u^2, F = f_u f_v, G = 1 + f_v^2,$$

$$l = \frac{f_{uu}}{W}, \quad m = \frac{f_{uv}}{W}, \quad n = \frac{f_{vv}}{W},$$

unde $W = \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}$.

14. Să se arate că lungimea imersiei (suprafața Enneper)

$$r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad r(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + u^2v, u^2 - v^2 \right),$$

este o suprafață minimală.

15. Pseudosfera. Fie $\alpha(u) = (x(u), y(u))$, unde

$$x(u) = \int_0^u \sqrt{1 - e^{-2t}} dt, \quad y(u) = e^{-u}, \quad u > 0$$

și fie M suprafața de rotație obținută prin rotirea lui α în jurul lui Ox . Să se arate că M are curbura Gauss $K = -1$.

16. O suprafață pentru care $K/d^4 = \text{const}$, unde K este curbura Gauss pe suprafață, iar d este distanța de la un punct fix la planul tangent într-un punct oarecare al suprafeței, se numește *suprafață Țițeica*. Să se arate că $M : xyz - 1 = 0$ este o suprafață Țițeica și că este conexă.

17. Se consideră imersia definită prin

$$x = \cos u \cos v, \quad y = \cos u \sin v, \quad z = \sin u - \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right), \quad u \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right), \quad v \in \mathbb{R}.$$

Să se determine liniile de curbură și liniile asimptotice al suprafeței

$$r \left(\left(0, \frac{\pi}{2} \right) \times \mathbb{R} \right).$$

18. Fie P centrul masei punctiforme m , care se mișcă pe o suprafață cu accelerația \vec{a} și fie \vec{N} reacțiunea (normală în P la suprafață). Dacă asupra particulei P nu acționează forțe exterioare, atunci să se arate că P descrie o curbă α , care este o geodezică a suprafeței.

19. Să se găsească aria benzii Möbius riglate:

$$x = \cos u + v \cos u \cos \frac{u}{2}, \quad y = \sin u + v \sin u \cos \frac{u}{2}, \quad z = \sin \frac{u}{2},$$

$$u \in [0, 2\pi], \quad v \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right].$$

20. (Fibrarea tangentă). Fie M o hipersuprafață a lui \mathbb{R}^n orientată prin câmpul normal unitar U . Să se arate că

$$TM = \{(x, v) \mid x \in M, (v, U) = 0\}$$

este o subvarietate de dimensiune $2n - 2$ în \mathbb{R}^{2n} .

21. (Fibrarea sferică). Fie M o hipersuprafață a lui \mathbb{R}^n orientată prin câmpul normal unitar U . Să se arate că

$$TM = \{(x, v) \mid x \in M, (v, U) = 0, (v, v) = 1\}$$

este o varietate cu $2n - 3$ dimensiuni în \mathbb{R}^{2n} .

22. Să se verifice că semisfera

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \mid (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_3 \geq 0\}$$

este o suprafață cu frontieră în \mathbb{R}^3 . Fie $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ un punct de pe frontieră. Să se scrie ecuația planului tangent la S în acest punct și apoi să se explicitizeze un vector tangent la S orientat către exterior, unul orientat către interior, unul tangent și unul normal la frontieră.

Capitolul 11

Algebră și analiză tensorială

11.1 Vectori contravarianți și vectori covarianți

Fie V un spațiu vectorial real de dimensiune n . Elementele lui V se numesc *vectori contravarianți* și se notează cu v_1, v_2, \dots . În raport cu o bază $B = \{e_i, i = 1, \dots, n\}$ orice vector $v \in V$ se scrie unic în forma $v = v^i e_i$ (regula Einstein de însumare). Numerele reale v^i se numesc *componentele contravariante ale lui v* . Izomorfismul, sistem de coordonate liniar, $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(v) = (v^1, \dots, v^n)$ dă naștere la o structură diferențiabilă tipică pe V .

Trecerea de la baza $B = \{e_i\}$ la baza $B' = \{e_{i'}\}$ este descrisă de relațiile

$$e_{i'} = A_{i'}^i e_i, \quad i' = 1, \dots, n.$$

Dacă v^i sunt componentele vectorului contravariant v în raport cu baza B și $v^{i'}$ sunt componentele lui v în raport cu baza B' , atunci

$$v^{i'} = A_i^{i'} v^i,$$

unde

$$A_{i'}^i A_j^{i'} = \delta_j^i, \quad A_{i'}^i A_i^{j'} = \delta_{i'}^{j'}, \quad \delta_j^i = \text{simbolul Kronecker},$$

adică matricele $[A_{i'}^i]$ și $[A_i^{i'}]$ sunt inverse una alteia. O transformare liniară $\omega : V \rightarrow \mathbb{R}$ se numește *1-formă* sau *vector covariant*. Reamintim că liniaritatea funcției ω înseamnă

$$\omega(u + v) = \omega(u) + \omega(v), \quad \omega(ku) = k\omega(u), \quad \forall u, v \in V, \forall k \in \mathbb{R}.$$

Spațiul vectorial $\mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ al tuturor 1-formelor definite pe V și cu valori în \mathbb{R} se numește *dualul* lui V și se notează cu V^* . Elementele lui V^* se notează cu $\omega^1, \omega^2, \dots$.

Fie $B = \{e_i\}$ o bază a lui V . Orice transformare liniară $\omega \in V^*$ este unic determinată unic de n numere reale $\omega_i = \omega(e_i)$. De fapt $v = v^i e_i$ și $\omega(v) = \omega(v^i e_i) = v^i \omega(e_i) = v^i \omega_i$. Mai mult, cele n 1-forme e^i definite prin

$$e^i(e_j) = \delta_j^i,$$

constituie o bază $B_* = \{e^i\}$ a lui V^* și $\omega = \omega_i e^i$. Prin urmare spațiul vectorial V_* are dimensiunea n . Mulțimea $B_* \subset V^*$ se numește *bază duală* bazei $B \subset V$. Numerele reale ω_i se numesc *componentele covariante* ale lui ω . Trecerea de la baza $B_* = \{e^i\}$ la baza $B'_* = \{e^{i'}\}$ este descrisă de formulele

$$e^{i'} = A_i^{i'} e^i, \quad i, i' = 1, \dots, n.$$

Dacă ω_i sunt componentele vectorului covariant ω în raport cu baza B_* , iar $\omega_{i'}$ sunt componentele lui ω în raport cu baza B'_{*} , atunci

$$\omega_{i'} = A_{i'}^i \omega_i.$$

Fie v un vector din V și ω un vector din V^* . Dacă fixăm pe v , atunci funcția $f_v : V^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f_v(\omega) = \omega(v)$ este o 1-formă pe V^* și deci un element din V^{**} . Într-adevăr, $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}, \forall \omega^1, \omega^2 \in V^*$, găsim

$$\begin{aligned} f_v(k_1\omega^1 + k_2\omega^2) &= (k_1\omega^1 + k_2\omega^2)(v) = \\ &= k_1\omega^1(v) + k_2\omega^2(v) = k_1f_v(\omega^1) + k_2f_v(\omega^2). \end{aligned}$$

Fiecărui vector $v \in V$ i se poate atașa 1-forma f_v din V^{**} . Să arătăm că funcția $v \rightarrow f_v$ este un izomorfism de la V la V^{**} . Mai întâi observăm că este o transformare liniară,

$$\begin{aligned} f_{k_1v_1+k_2v_2}(\omega) &= \omega(k_1v_1 + k_2v_2) = k_1\omega(v_1) + k_2\omega(v_2) = \\ &= k_1f_{v_1}(\omega) + k_2f_{v_2}(\omega) \Rightarrow f_{k_1v_1+k_2v_2} = k_1f_{v_1} + k_2f_{v_2}. \end{aligned}$$

De asemenea se observă că $f_v = 0 \Leftrightarrow v = 0$, iar $\dim V = \dim V^* = \dim V^{**}$. Astfel funcția, $v \rightarrow f_v$ este o bijecție și deci un izomorfism de la V la V^{**} . În consecință, dacă f este o 1-formă pe V^* , atunci există un vector unic $v \in V$ astfel încât $f(\omega) = \omega(v)$, $\forall \omega \in V^*$.

Deoarece $v \rightarrow f_v$ este un izomorfism canonic de la V la V^{**} se obișnuiește ca f_v să se identifice cu v și deci V^{**} să se identifice cu V . În acest sens spunem că V este dualul lui V^* sau că V și V^* sunt duale unul altuia.

Având în vedere identificarea lui V^{**} cu V , bazele $B = \{e_i\}$ și $B_* = \{e^i\}$ sunt duale una alteia.

11.2 Tensori

Fie V un spațiu vectorial real de dimensiune n și V^* dualul său. Elementele lui V le notăm cu v_1, v_2, \dots , iar elementele lui V^* le notăm, cu $\omega^1, \omega^2, \dots$. Ne propunem să extindem noțiunile de vector contravariant și vector covariant. Pentru aceasta notăm

$$V^* \times \dots \times V^* \text{ (} p \text{ factori)} = V^{*p}, \quad V \times \dots \times V \text{ (} q \text{ factori)} = V^q.$$

2.1. Definiție. Un tensor de tipul (p, q) pe V , unde $p, q \in \mathbb{N}$, este o funcție

$$T : V^{*p} \times V^q \rightarrow \mathbb{R},$$

$$(\omega^1, \dots, \omega^p, v_1, \dots, v_q) \rightarrow T(\omega^1, \dots, \omega^p, v_1, \dots, v_q)$$

liniară în fiecare argument (multiliniară). Numărul p se numește *ordin de contravarianță*, q se numește *ordin de covarianță*, iar $p + q$ se numește *ordinul tensorului*.

Mulțimea tuturor tensorilor de tipul (p, q) pe V se notează cu $\mathcal{T}_q^p(V)$ și este un spațiu vectorial real de dimensiune n^{p+q} (pentru dimensiune vezi teorema 2.3). Tensorul zero din $\mathcal{T}_q^p(V)$ se definește prin

$$0(\omega^1, \dots, \omega^p, v_1, \dots, v_q) = 0, \quad \forall \omega^1, \dots, \omega^p \in V^*, \quad \forall v_1, \dots, v_q \in V.$$

Evident $\mathcal{T}_1^0(V) = V^*$ și se acceptă identificările $\mathcal{T}_0^0(V) = \mathbb{R}$, $\mathcal{T}_0^1(V) = V$, adică tensorii de ordinul zero sunt numere reale, iar tensorii de ordinul unu sunt vectori contravarianți (elementele lui V) sau vectorii covarianți (1-forme, elementele lui V^*). Spațiul vectorial al tuturor formelor biliniare se identifică cu $\mathcal{T}_2^0(V)$.

Identificarea $\mathcal{T}_0^1(V) = V$ impune definiția $v(\omega) = \omega(v)$, $v \in V$, $\omega \in V^*$.

2.2. Definiție. Fie $\mathcal{T}_q^p(V)$, $\mathcal{T}_s^r(V)$, $\mathcal{T}_{q+s}^{p+r}(V)$. Funcția

$$\otimes : \mathcal{T}_q^p(V) \times \mathcal{T}_s^r(V) \rightarrow \mathcal{T}_{q+s}^{p+r}(V)$$

definită prin

$$\begin{aligned} S \otimes T(\omega^1, \dots, \omega^{p+r}, v_1, \dots, v_{q+s}) &= \\ = S(\omega^1, \dots, \omega^p, v_1, \dots, v_q) T(\omega^{p+1}, \dots, \omega^{p+r}, v_{q+1}, \dots, v_{q+s}) \end{aligned}$$

se numește *produs tensorial*.

Se observă că produsul tensorial este o aplicație biliniară și asociativă, adică

$$(k_1 S_1 + k_2 S_2) \otimes T = k_1 S_1 \otimes T + k_2 S_2 \otimes T,$$

$$S \otimes (k_1 T_1 + k_2 T_2) = k_1 S \otimes T_1 + k_2 S \otimes T_2, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R},$$

$$S \otimes (T \otimes \mathbb{R}) = (S \otimes T) \otimes \mathbb{R}.$$

Asociativitatea permite extinderea definiției produsului tensorial la un număr finit de factori.

În continuare determinăm dimensiunea spațiului vectorial utilizând baza obținută prin produs tensorial din bazele $B \subset V$ și $B_* \subset V^*$.

2.3. Teoremă. Dacă $\{e_i, i = 1, \dots, n\}$ este o bază a lui V , iar $\{e^j, j = 1, \dots, n\}$ este baza duală în V^* , atunci mulțimea

$$\{e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q}, \quad i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q = 1, \dots, n\}$$

este o bază a lui $\mathcal{T}_q^p(V)$, numită baza produs. Deci $\dim \mathcal{T}_q^p(V) = n^{p+q}$.

Demonstrație. Mulțimea din teoremă este liniar independentă. Într-adevăr, relația

$$T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q} = 0 \quad (\text{tensorul zero})$$

scrisă cu convenția Einstein de însumare, implică

$$\begin{aligned} 0 &= T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q} (e^{k_1}, \dots, e^{k_p}, e_{l_1}, \dots, e_{l_q}) = \\ &= T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} e_{i_1} (e^{k_1}) \dots e_{i_p} (e^{k_p}) e^{j_1} (e_{l_1}) \dots e^{j_q} (e_{l_q}) = \\ &= T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \delta_{i_1}^{k_1} \dots \delta_{i_p}^{k_p} \delta_{l_1}^{j_1} \dots \delta_{l_q}^{j_q} = T_{l_1 \dots l_q}^{k_1 \dots k_p}, \quad k_1, \dots, k_p, l_1, \dots, l_q = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Să aratăm că mulțimea din teoremă generează pe $\mathcal{T}_q^p(V)$. Pentru aceasta fie $T \in \mathcal{T}_q^p(V)$ și numerele reale $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = T(e^{i_1}, \dots, e^{i_p}, e_{j_1}, \dots, e_{j_q})$. Găsim $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q} (e^{k_1}, \dots, e^{k_p}, e_{l_1}, \dots, e_{l_q}) = T(e^{k_1}, \dots, e^{k_p}, e_{l_1}, \dots, e_{l_q})$. Deoarece T este multilinear, iar $\{e_i\}$, $\{e^j\}$ sunt baze duale, ultima relație implică

$$\begin{aligned} T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q} (\omega^1, \dots, \omega^p, v_1, \dots, v_q) &= \\ = T(\omega^1, \dots, \omega^p, v_1, \dots, v_q), \quad \forall \omega^1, \dots, \omega^p \in V^*, \quad \forall v_1, \dots, v_q \in V. \end{aligned}$$

Deci

$$T = T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q},$$

unde numerele reale

$$T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = T(e^{i_1}, \dots, e^{i_p}, e_{j_1}, \dots, e_{j_q})$$

sunt *componentele (coordonatele) tensorului* T în raport cu baza produs.

Fie $S_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ componentele lui S , fie $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ componentele lui T și fie $k \in \mathbb{R}$. Componentele tensorilor kS , $S + T$ și $S \otimes T$ sunt respectiv

$$kS_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}, S_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} + T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}, S_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} T_{l_1 \dots l_q}^{k_1 \dots k_p}.$$

Fie $\{e_i, i = 1, \dots, n\}$ și $\{e_{i'}, i' = 1, \dots, n\}$ două baze în V și respectiv bazele duale $\{e^i\}$ și $\{e^{i'}\}$ în V^* . Schimbarea bazelor este descrisă de relațiile

$$e_{i'} = A_{i'}^i e_i, \quad e^{i'} = A_i^{i'} e^i,$$

unde

$$A_i^{i'} A_{j'}^i = \delta_{j'}^i, \quad A_{i'}^i A_j^{i'} = \delta_j^i.$$

Corespunzător,

$$\begin{aligned} e_{i'_1} \otimes \dots \otimes e_{i'_p} \otimes e^{j'_1} \otimes \dots \otimes e^{j'_q} = \\ A_{i'_1}^{i_1} \dots A_{i'_p}^{i_p} A_{j'_1}^{j_1} \dots A_{j'_q}^{j_q} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q}. \end{aligned}$$

Aceasta implică

$$v^{i'} = A_i^{i'} v^i, \quad \omega_{j'} = A_j^j \omega_j$$

și în general

$$T_{j'_1 \dots j'_q}^{i'_1 \dots i'_p} = A_{i'_1}^{i_1} \dots A_{i'_p}^{i_p} A_{j'_1}^{j_1} \dots A_{j'_q}^{j_q} T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}.$$

Aceasta din urmă poartă numele de *regula de schimbare a componentelor unui tensor la o schimbare a bazei*. Se observă că schimbarea pentru indicii de covarianță se face cu ajutorul elementelor matricei $A = [A_{i'}^i]$ în timp ce schimbarea pentru indicii de contravarianță se face cu ajutorul matricei $A^{-1} = [A_i^{i'}]$.

Fie $\omega : V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $(v_1, \dots, v_q) \rightarrow \omega(v_1, \dots, v_q)$, un tensor de tipul $(0, q)$. Acesta se numește

- 1) *simetric* dacă valoarea sa rămâne aceeași pentru toate permutările posibile ale argumentelor,
- 2) *antisimetric* dacă valoarea sa după orice permutare a argumentelor este produsul dintre valoarea înainte de permutare și semnul permutării.

2.4. Definiție. Fie $p > 0$, $q > 0$, $s = 1, \dots, p$; $t = 1, \dots, q$. Aplicația

$$\text{tr}_j^i : \mathcal{T}_q^p(V) \rightarrow \mathcal{T}_{q-1}^{p-1}(V)$$

definită prin

$$\begin{aligned} (\text{tr}_j^i T)(\omega^1, \dots, \omega^{p-1}, v_1, \dots, v_{q-1}) = \sum_{k=1}^n T(\omega^1, \dots, \omega^{s-1}, e^k, \omega^s, \dots, \omega^{p-1}, \\ v_1, \dots, v_{t-1}, e_k, v_t, \dots, v_{q-1}), \end{aligned}$$

unde $\{e_i\}$ este baza lui V , iar $\{e^j\}$ este baza duală din V^* , se numește *contractie*.

Pe componente contractia acționează astfel

$$(\text{tr}_j^i T)_{j_1 \dots j_{q-1}}^{i_1 \dots i_{p-1}} = \sum_{k=1}^n T_{j_1 \dots j_{t-1} k j_t \dots j_{q-1}}^{i_1 \dots i_{s-1} k i_s \dots i_{p-1}}.$$

Exemple. 1) Dacă T_j^i sunt componentele unui tensor mixt de ordinul doi, atunci $T_i^i = T_1^1 + \dots + T_n^n$ este un tensor de ordinul zero (număr real). Evident T_i^i este urma matricei ale cărei elemente sunt componentele T_j^i .

2) Fie T_{jk}^i un tensor de tipul (1,2). Contractând pe i cu j obținem vectorul covariant T_{ik}^i ; contractând pe i cu k obținem vectorul covariant T_{ji}^i .

11.3 Ridicarea și coborârea indicilor

Presupunem că V este un spațiu euclidian. Produsul scalar $(,)$ pe V este un tensor covariant de ordinul doi (formă biliniară), simetric și pozitiv definit. Aceasta se numește *metrica riemanniană* pe V . Metrica induce transformarea liniară nesingulară (izomorfism) $\mathcal{G} : V \rightarrow V^*$, $\mathcal{G}(u)(v) = (u, v)$, $\forall v \in V$. Fie \mathcal{G}^{-1} inversa lui \mathcal{G} ; dacă $\omega \in V^*$, atunci $(\mathcal{G}^{-1}\omega, v) = \omega(v)$.

Fie $\{e_i\}$ o bază ortonormată în V . Dacă notăm $\mathcal{G}(e_i) = e^i$, $i = 1, \dots, n$, atunci $\mathcal{G}(e_i)(e_j) = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, adică $e^i(e_j) = \delta_{ij} = (\delta_j^i)$. Rezultă că mulțimea $\{e^i\}$ este bază duală în V^* .

Fie $\{e^k \otimes e^l\}$ baza în $\mathcal{T}_2^0(V)$. Metrica riemanniană și transformarea liniară nesingulară asociată \mathcal{G} sunt caracterizate prin matricea $[g_{kl}]$ simetrică și pozitiv definită. Inversa lui (g_{kl}) este o matrice simetrică, pozitiv definită, și se notează cu (g^{kl}) ; deci $g_{kl}g^{kj} = \delta_l^j$. Dacă v^k este un vector din V , atunci $g_{kl}v^k$ este un vector din V^* ; dacă ω_k este un vector din V^* , atunci $g^{kl}\omega_k$ este un vector din V . Acestea se extind prin definițiile care urmează.

3.1. Definiție. Fie $s = 1, \dots, p$; $t = 1, \dots, q$ și $T \in \mathcal{T}_q^p(V)$. Funcția definită prin

$$\mathcal{G}_{s,t} : \mathcal{T}_q^p(V) \rightarrow \mathcal{T}_{q+1}^{p-1}(V),$$

$$(\mathcal{G}_{s,t}T)(\omega^1, \dots, \omega^{p-1}, v_1, \dots, v_{q+1}) = T(\omega^1, \dots, \omega^{s-1}, \mathcal{G}(v_t), \omega^s, \dots, \omega^{p-1}, v_1, \dots, \hat{v}_t, \dots, v_{q+1}),$$

unde semnul $\hat{}$ înseamnă că argumentul respectiv lipsește, se numește *coborârea indicilor*.

Pe componente,

$$(\mathcal{G}_{s,t}T)_{j_1 \dots j_{t-1} s j_{t+1} \dots j_{q+1}}^{i_1 \dots i_{p-1}} = g_{st} T_{j_1 \dots j_{t-1} j_{t+1} \dots j_{q+1}}^{i_1 \dots i_{s-1} t i_s \dots i_{p-1}}.$$

Analog, utilizând pe \mathcal{G}^{-1} , se definește ridicarea indicilor.

Izomorfismul \mathcal{G} permite identificarea lui V cu V^* . De asemenea prin intermediul coborârii și ridicării indicilor el induce un izomorfism între $\mathcal{T}_q^p(V)$ și $\mathcal{T}_p^q(V)$. În acest context vorbim despre componentele contravariante, mixte sau covariante (după caz) ale aceluiași tensor. De exemplu,

$$g^{li} g^{mk} T_{ik}, g^{li} T_{ik}, T_{ik}$$

sunt respectiv componentele contravariante, mixte și covariante ale tensorului de ordinul doi $T = T_{ik}e^i \otimes e^k$.

11.4 Câmpuri vectoriale

Fie M o mulțime deschisă din \mathbb{R}^n . Mulțimea $\mathcal{F}(M)$ a tuturor funcțiilor reale (câmpurilor scalare) diferentiabile de clasă C^∞ definite pe M este un spațiu vectorial real. Deoarece înmulțirea funcțiilor reale este o operație \mathbb{R} -biliniară, comutativă, mulțimea $\mathcal{F}(M)$ este o *algebră comutativă*.

Fie $x = (x^1, \dots, x^n) \in M$ și $f \in \mathcal{F}(M)$. Unui vector X_x tangent la M în punctul x i se asociază numărul

$$X_x(f) = \left. \frac{d}{dt} f(x + tX) \right|_{t=0}$$

numit *derivata lui f în raport cu X_x* sau *derivata lui f după direcția X_x* . Derivata după o direcție are următoarele proprietăți

$$\begin{aligned} X_x(af + bg) &= aX_x(f) + bX_x(g) \\ X_x(fg) &= (X_x(f))g(x) + f(x)X_x(g) \\ (aX_x + bY_x)(f) &= aX_x(f) + bY_x(f), \end{aligned}$$

unde X_x, Y_x sunt vectorii tangenți la M în punctul x , a și $b \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{F}(M)$.

Să privim acum lucrurile dintr-un alt punct de vedere. Se observă că dacă dăm regula $f \rightarrow X_x(f)$, atunci X_x este bine determinat. Astfel suntem conduși la următoarea definiție care este potrivită pentru teoria câmpurilor vectoriale.

4.1. Definiție. O funcție $X_x : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietățile

$$\begin{aligned} X_x(af + bg) &= aX_x(f) + bX_x(g) \\ X_x(fg) &= (X_x(f))g(x) + f(x)X_x(g), \end{aligned}$$

unde $a, b \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{F}(M)$, se numește *vector tangent la M în punctul x* .

În acest context se observă că funcția definită prin $O_x(f) = 0$, $\forall f \in \mathcal{F}(M)$ deci vectorul zero, ca și operatorii de derivare parțială $\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_x, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_x$ sunt vectori tangenți la M în punctul x . De asemenea, dacă $f = g = 1$, atunci $X_x(1) = 2X_x(1)$ și deci $X_x(1) = 0$. În plus $X_x(c) = cX_x(1) = 0$, pentru orice funcție constantă c . Identificând funcțiile constante cu valorile lor putem spune că valorile oricărui vector tangent pe scalari sunt nule.

Fie $T_x M$ mulțimea tuturor vectorilor tangenți la M în punctul x . Elementele lui $T_x M$ sunt funcții reale definite pe $\mathcal{F}(M)$ și deci are sens suma a doi vectori tangenți și produsul dintre un număr real și un vector tangent. Mai mult, pentru fiecare $x \in M$, mulțimea $T_x M$ este un spațiu vectorial real.

4.2. Teoremă. Mulțimea $\left\{ \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_x, \quad i = 1, \dots, n \right\}_{x_0}$ este o bază a spațiului vectorial $T_{x_0} M$ (reper în punctul x_0).

Demonstrație. Evident $\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{x_0}$, $i = 1, \dots, n$, fac parte din $T_{x_0} M$. Să arătăm că ei sunt liniar independenți. Pentru aceasta pornim de la relația $a^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{x_0} = 0$ și folosim funcțiile coordonate $x^j : M \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$. În baza definiției 4.1, a faptului că $T_{x_0} M$ este un spațiu vectorial

și a observației $\frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \delta_i^j$ rezultă

$$0 = a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{x_0} (x^j) = a^i \frac{\partial x^j}{\partial x^i} \Big|_{x_0} = a^i \delta_i^j = a^j, \quad j = 1, \dots, n.$$

A rămas să demonstrăm că $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}, i = 1, \dots, n \right\}_{x_0}$ generează pe $T_{x_0}M$. Pentru aceasta observăm că pe o vecinătate convexă a lui x_0 și pentru orice $f \in \mathcal{F}(M)$ avem

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x_0 + t(x - x_0)) dt = \\ &= f(x_0) + \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_{(x_0 + t(x - x_0))} (x^i - x_0^i) dt \\ &= f(x_0) + \sum_{i=1}^n (x^i - x_0^i) g_i(x), \end{aligned}$$

unde

$$g_i(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0).$$

Conform definiției 4.1 și a observației că valorile lui X_x pe constante sunt nule, găsim

$$\begin{aligned} X_x(f) &= \sum_{i=1}^n X_x(x^i - x_0^i) g_i(x) + \sum_{i=1}^n (x^i - x_0^i) X_x(g_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n X_x(x^i) g_i(x) + \sum_{i=1}^n (x^i - x_0^i) X_x(g_i). \end{aligned}$$

Înlocuirea $x = x_0$, implică

$$X_{x_0}(f) = \sum_{i=1}^n X_{x_0}(x^i) \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0).$$

Ținând seama că $f \in \mathcal{F}(M)$ este arbitrară și notând $X_{x_0}(x^i) = a^i$, deducem

$$X_{x_0} = a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{x_0}.$$

Numerele $X_{x_0}(x^i) = a^i$ se numesc *componentele* lui X_{x_0} , iar reperul $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}, i = 1, \dots, n \right\}_{x_0}$ se numește *reper natural*.

Dacă raportăm pe $T_{x_0}M$ la reperul natural, atunci adunarea a doi vectori se reduce la adunarea componentelor corespunzătoare, iar înmulțirea unui vector cu un număr real se reduce la înmulțirea componentelor vectorului cu acel număr.

Exemplu. Pentru

$$X = 2 \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial x} + 7 \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{și} \quad k \in \mathbb{R}$$

găsim

$$X + Y = 3 \frac{\partial}{\partial x} + 6 \frac{\partial}{\partial y}, \quad kX = 2k \frac{\partial}{\partial x} - k \frac{\partial}{\partial y}.$$

4.3. Definiție. Reuniunea $TM = \cup_{x \in M} T_x M$ se numește *spațiul tangent* al lui M . O funcție

$$X : M \rightarrow \cup_{x \in M} T_x M, \quad X(x) \in T_x M,$$

se numește *câmp vectorial* pe M .

Adunarea dintre două câmpuri vectoriale și produsul dintre o funcție reală și un câmp vectorial se definesc punctual.

Câmpurile vectoriale definite prin

$$x \rightarrow \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_x, \quad i = 1, \dots, n$$

și notate cu $\frac{\partial}{\partial x^i}$, $i = 1, \dots, n$, se numesc *câmpuri fundamentale* (operatori de derivare parțială). Ansamblul lor se numește *câmpul reperului natural*.

4.4. Teoremă. Dacă X este un câmp vectorial pe M , atunci există n funcții reale $X^i : M \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ astfel încât

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Demonstrație. Prin definiție X asociază lui $x \in M$ un vector $X(x)$ tangent la M în punctul x . Dar $X(x) = X^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x$ și regulile $x \rightarrow X^i(x)$, $x \in M$ definesc (unic) funcțiile $X^i : M \rightarrow \mathbb{R}$.

Funcțiile reale X^i se numesc *componentele (coordonatele) câmpului vectorial X* . Câmpul vectorial $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ se numește *diferențiabil* (de clasă C^∞) dacă componentele sale sunt diferențiabile (de clasă C^∞).

Exemplu. $X(x, y) = 2x \frac{\partial}{\partial x} + e^y \frac{\partial}{\partial y}$ este un câmp vectorial de clasă C^∞ .

Alternativ, câmpul vectorial X poate fi privit ca fiind aplicația $X : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$ cu proprietățile

$$\begin{aligned} X(af + bg) &= aX(f) + bX(g) \\ X(fg) &= (X(f))g + fX(g), \end{aligned}$$

unde $a, b \in \mathbb{R}$, iar $f, g \in \mathcal{F}(M)$.

4.5. Definiție. Fie X și Y două câmpuri vectoriale diferențiabile de clasă C^∞ pe M . Câmpul vectorial $[X, Y]$ definit prin $f \rightarrow [X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$ se numește *croșetul* câmpurilor X și Y .

Evident $[X, Y] = -[Y, X]$. De asemenea pentru oricare trei câmpuri vectoriale diferențiabile X, Y, Z se satisface *identitatea Jacobi*

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

Mulțimea $\mathcal{X}(M)$ a tuturor câmpurilor vectoriale diferențiabile de clasă C^∞ pe M este un spațiu vectorial real infinit dimensional. Deoarece croșetul $[\cdot, \cdot] : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ este bilinear peste câmpul numerelor reale, mulțimea $\mathcal{X}(M)$ este ceea ce se cheamă o *algebră*; croșetul fiind anticomutativ și verificând identitatea Jacobi, algebra $\mathcal{X}(M)$ se numește *algebră Lie*.

Fie $T_x M$ spațiul tangent la M în punctul x și ω_x o 1-formă în x , adică o transformare liniară $\omega_x : T_x M \rightarrow \mathbb{R}$. Mulțimea tuturor 1-formelor în x este un spațiu vectorial real de dimensiune n , dualul lui $T_x M$. Acest spațiu vectorial se numește *spațiul cotangent* la M în x și se notează cu $T_x^* M$.

4.6. Definiție. Fie $f \in \mathcal{F}(M)$. Funcția $df_x : T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $df_x(X_x) = X_x(f)$ se numește *diferențiala* lui f în punctul x .

Această definiție împreună cu definiția vectorilor tangenți arată că df_x este o 1-formă în x .

4.7. Teoremă. Fie $x^j : M \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$, funcțiile coordonate pe M . Mulțimea $\{dx^j, j = 1, \dots, n\}_{x_0}$ este o bază a lui $T_{x_0}^*M$ (reper în punctul x_0).

Demonstrație. Evident $dx^j|_{x_0}$, $j = 1, \dots, n$, aparțin lui $T_{x_0}^*M$. Fie

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}, i = 1, \dots, n \right\}_{x_0}$$

reperul natural în $T_{x_0}M$. Ținând seama de definiția 4.6 deducem

$$dx^j|_{x_0} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{x_0} = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{x_0} (x^j) = \frac{\partial x^j}{\partial x^i} \Big|_{x_0} = \delta_i^j, i, j = 1, \dots, n,$$

și deci $\{dx^j, j = 1, \dots, n\}_{x_0}$ este bază duală.

Reperul $\{dx^j, j = 1, \dots, n\}_{x_0}$ se numește *coreper natural* în x_0 .

Fie $X_x = a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x$. Rezultă $dx^j|_x(X_x) = a^i dx^j|_x \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_x = a^j$. De asemenea orice 1-formă $\omega_x \in T_x^*M$ se scrie $\omega_x = \omega_j dx^j|_x$, ω_j fiind componentele lui ω_x în raport cu coreperul natural. Rezultă $\omega_x \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_x = \omega_i$, adică componentele 1-formei ω_x sunt valorile lui ω_x pentru vectorii reperului natural în x .

Fie $\mathcal{F}(M)$ algebra funcțiilor reale diferentiabile pe M și $\mathcal{X}(M)$ algebra Lie a câmpurilor vectoriale diferentiabile pe M .

4.8. Definiție. O funcție $\omega : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$, $\mathcal{F}(M)$ -liniară, $\omega(X)$ -diferentiabilă $\forall X \in \mathcal{X}(M)$, se numește 1-formă diferențială pe M .

Adunarea a două 1-forme și produsul dintre o funcție reală și o 1-formă se definesc punctual.

Fie ω o 1-formă diferențială. Valorile ω_x sunt 1-forme în punctele x . De aceea expresia locală a unei 1-forme diferențiale este $\omega_x = \omega_j(x) dx^j|_x$. Mai scurt, putem scrie $\omega = \omega_j dx^j$ deoarece 1-formele diferențiale dx^1, \dots, dx^n sunt duale câmpurilor fundamentale $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$. Ansamblul $\{dx^j, j = 1, \dots, n\}$ se numește *câmpul coreperului natural*. Mulțimea tuturor 1-formelor diferențiale pe M va fi notată cu $\mathcal{X}^*(M)$.

Precizare. X_x este un vector contravariant, X este un câmp vectorial contravariant; ω_x este un vector covariant, ω este un câmp vectorial covariant.

O mulțime ordonată $\{X_1, \dots, X_n\}$ de câmpuri vectoriale se numește *câmp de repere* pe M dacă $\{X_1(x), \dots, X_n(x)\}$ este o bază în T_xM , $\forall x \in M$. Analog se definește *câmpul de corepere* $\{\omega^1, \dots, \omega^n\}$. Acestea se numesc *duale* unul altuia dacă $\omega^b(X_a) = \delta_a^b$. În general, câmpurile de repere (sau de corepere) nu există decât pe o vecinătate a punctului x din M .

Dacă $\{X_a, a = 1, \dots, n\}$ este un câmp de repere pe M , atunci orice alt câmp vectorial V se exprimă în forma $V = V^a X_a$. Analog, dacă $\{\omega^b | b = 1, \dots, n\}$ este un câmp de corepere, atunci orice altă 1-formă diferențială η se exprimă în forma $\eta = \eta_b \omega^b$.

Fie x un punct din M caracterizat de două rânduri de coordonate $(x^i) = (x^1, \dots, x^n)$ și $(x^{i'}) = (x^{1'}, \dots, x^{n'})$. Schimbarea de coordonate, definită pe o vecinătate din M a lui x , se scrie $x^{i'} = x^{i'}(x^i)$ și admite inversa $x^i = x^i(x^{i'})$. Bazele $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}_x$, $\{dx^i\}_x$ se schimbă în $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^{i'}} \right\}_x$, $\{dx^{i'}\}_x$ cu legăturile

$$\frac{\partial}{\partial x^{i'}} \Big|_x = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x, \quad dx^j|_x = \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}(x^{j'}) dx^{j'} \Big|_x.$$

și

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} = \delta_{j'}^{i'}, \quad \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} = \delta_j^i.$$

Dacă

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} = X^{i'} \frac{\partial}{\partial x^{i'}}, \quad \omega = \omega_i dx^i = \omega_{i'} dx^{i'},$$

atunci regulile de schimbare a componentelor câmpurilor vectoriale la o schimbare de coordonate sunt respectiv

$$X^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} X^i, \quad \omega_{j'} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \omega_j.$$

11.5 Câmpuri tensoriale

Noțiunea de tensor de tipul (p, q) pe spațiul vectorial $T_x M$ este cunoscută. Utilizând această noțiune introducem câmpurile tensoriale.

5.1. Definiție. Fie $\mathcal{T}_q^p(T_x M)$ mulțimea tuturor tensorilor de tipul (p, q) pe spațiul tangent $T_x M$. O funcție

$$T : M \rightarrow \bigcup_{x \in M} \mathcal{T}_q^p(T_x M), \quad T(x) \in \mathcal{T}_q^p(T_x M),$$

se numește *câmp tensorial de tipul (p, q) pe M* .

Fie $\mathcal{T}_q^p(M)$ mulțimea tuturor câmpurilor tensoriale pe M de tipul (p, q) . Adunarea a două elemente din această mulțime ca și produsul dintre o funcție reală și un câmp vectorial se definesc punctual. Mulțimea $\mathcal{T}_q^p(M)$ este un spațiu vectorial real infinit dimensional. Identificări: $\mathcal{T}_0^0(M) = \mathcal{F}(M)$, $\mathcal{T}_0^1(M) = \mathcal{X}(M)$, $\mathcal{T}_1^0(M) = \mathcal{X}^*(M)$.

Deoarece baza canonică în $\mathcal{T}_q^p(T_x M)$ este

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q} \right\}_x,$$

expresia în coordonate a lui T este

$$T(x) = T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}(x) \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q}.$$

Câmpul T se numește *diferențiabil* dacă funcțiile componente (coordonate) $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ sunt diferentiabile.

Echivalent, un câmp tensorial de tipul (p, q) este o funcție

$$T : \underbrace{\mathcal{X}^*(M) \times \dots \times \mathcal{X}^*(M)}_{p \text{ factori}} \times \underbrace{\mathcal{X}(M) \times \dots \times \mathcal{X}(M)}_{q \text{ factori}} \rightarrow \mathcal{F}(M),$$

$$(\omega^1, \dots, \omega^p, X_1, \dots, X_q) \rightarrow T(\omega^1, \dots, \omega^p, X_1, \dots, X_q),$$

$\mathcal{F}(M)$ -liniară în fiecare argument. Identificarea $\mathcal{T}_0^1(M) = \mathcal{X}(M)$ impune definiția $X(\omega) = \omega(X)$, $X \in \mathcal{X}(M)$, $\omega \in \mathcal{X}^*(M)$.

Definițiile câmpurilor tensoriale *simetrice* respectiv *antisimetrice* ca și definițiile *produsului tensorial* și *contractiei* pentru câmpuri tensoriale sunt evidente.

Fie $S_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ componentele câmpului tensorial S , fie $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ componentele câmpului tensorial T și fie $f \in \mathcal{F}(M)$. Componentele câmpurilor fS , $S + T$ și $S \otimes T$ sunt respectiv

$$fS_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}, \quad S_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} + T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}, \quad S_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} T_{l_1 \dots l_q}^{k_1 \dots k_p}.$$

Fie x un punct din M caracterizat pe de o parte prin coordonatele (x^1, \dots, x^n) , iar pe de altă parte prin coordonatele $(x^{1'}, \dots, x^{n'}) = (x^{i'})$, schimbarea de coordonate fiind $x^{i'} = x^{i'}(x^i)$ cu inversa $x^i = x^i(x^{i'})$, pe o vecinătate a lui x conținută în M . Baza $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}_x$ se schimbă în $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^{i'}} \right\}_x$

cu legătura $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}(x^i) \frac{\partial}{\partial x^{i'}} \Big|_x$; corespunzător baza duală se schimbă în $\{dx^{j'}\}_x$ cu legătura

$$dx^j \Big|_x = \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}(x^{j'}) dx^{j'} \Big|_x. \text{ Evident,}$$

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} = \delta_{j'}^{i'}, \quad \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} = \delta_j^i.$$

Corespunzător

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^{i'_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i'_p}} \otimes dx^{j'_1} \otimes \dots \otimes dx^{j'_q} &= \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \dots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial x^{i'_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \dots \\ &\dots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j'_q}} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q} \end{aligned}$$

Aceasta implică regula de schimbare a componentelor unui câmp tensorial de tipul (p, q) la o schimbare de coordonate,

$$T_{j'_1 \dots j'_q}^{i'_1 \dots i'_p} = \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \dots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j'_q}} T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}.$$

Observație. În acest paragraf, ca și în §3, 4, 5, mulțimea deschisă M poate fi înlocuită cu orice subvarietate de dimensiune $m \geq 1$, cu sau fără frontieră, a lui \mathbb{R}^n .

11.6 Conexiune liniară

Fie Y un câmp vectorial diferentiabil definit pe mulțimea deschisă M din \mathbb{R}^n și X_x un vector tangent la M în punctul x . Vectorul

$$D_{X_x} Y = \left. \frac{d}{dt} Y(x + tX) \right|_{t=0}$$

tangent la M în punctul x se numește *derivata covariantă a lui Y în raport cu X_x* . Dacă $Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, atunci $D_{X_x} Y = X_x(Y^i) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x$. Această noțiune se extinde la *derivata covariantă a unui câmp vectorial Y în raport cu un câmp vectorial X* . Rezultatul este un câmp vectorial care se

notează cu $D_X Y$ și a cărei valoare este $D_{X(x)} Y$; pe coordonate, $D_X Y = X(Y^i) \frac{\partial}{\partial x^i}$. Această derivată are următoarele proprietăți

$$(1) \quad \begin{aligned} D_{fX+gY} Z &= fD_X Z + gD_Y Z \\ D_X(aY + bZ) &= aD_X Y + bD_X Z \\ D_X(fY) &= X(f)Y + fD_X Y. \end{aligned}$$

6.1. Definiție. O funcție $D : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$, $(X, Y) \rightarrow D_X Y$ cu proprietățile (1) se numește *conexiune liniară* sau *derivare covariantă* pe M .

Fie D o conexiune liniară pe M . Funcțiile reale $\Gamma_{ij}^h : M \rightarrow \mathbb{R}$, $h, i, j = 1, \dots, n$, definite prin

$$D \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^h \frac{\partial}{\partial x^h}$$

se numesc *componentele conexiunii* D . Aceste n^3 funcții reale determină unic pe $D_X Y$. Într-adevăr, dacă $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, atunci

$$\begin{aligned} D_X Y &= D_{X^i \frac{\partial}{\partial x^i}} \left(Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = X^i D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \\ &= X^i \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + Y^j D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + Y^j \Gamma_{ij}^h \frac{\partial}{\partial x^h} \right) X^i = \\ &= \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} + \Gamma_{ih}^j Y^h \right) X^i \frac{\partial}{\partial x^j} = Y^j_{,i} X^i \frac{\partial}{\partial x^j}, \end{aligned}$$

unde s-a notat

$$Y^j_{,i} = \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} + \Gamma_{ih}^j Y^h.$$

O conexiune D determină următoarele două câmpuri tensoriale:

1) unul de tipul (1,2),

$$T : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M), \quad T(X, Y) = D_X Y - D_Y X - [X, Y],$$

numit *câmpul tensorial de torsiune*;

2) altul de tipul (1,3),

$$R : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M),$$

$$R(X, Y)Z = D_X(D_Y Z) - D_Y(D_X Z) - D_{[X, Y]}Z,$$

numit *câmpul tensorial de curbura*.

Coordonatele lui T și R în raport cu bazele canonice sunt respectiv

$$T_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i - \Gamma_{kj}^i,$$

$$R_{ijk}^h = \frac{\partial \Gamma_{ki}^h}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{ji}^h}{\partial x^k} + \Gamma_{ki}^r \Gamma_{jr}^h - \Gamma_{ji}^r \Gamma_{kr}^h.$$

Conexiunea liniară D se numește *simetrică* dacă $T = 0$ sau echivalent $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$.

La o schimbare a bazei în punctul x , componentele conexiunii se schimbă după legea locală

$$\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^j \partial x^k} = -\Gamma_{j'k'}^{i'} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} + \Gamma_{jk}^h \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^h}.$$

Fie D o conexiune liniară pe M și $X \in \mathcal{X}(M)$. Conexiunea liniară D induce *derivarea covariantă în raport cu X* , notată D_X care aplică pe $\mathcal{T}_q^p(M)$ în el însuși. Operatorul D_X se definește prin $D_X f = X(f)$, pentru $f \in \mathcal{F}(M)$, iar $D_X T$ este produs de derivarea covariantă folosind conexiunea de pe M , mai exact

$$(D_X \omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega(D_X Y), \quad \omega \in \mathcal{T}_1^0(M),$$

iar

$$(D_X T)(\omega^1, \dots, \omega^p, Y_1, \dots, Y_q) = X(T(\omega^1, \dots, \omega^p, Y_1, \dots, Y_q)) - T(D_X \omega^1, \omega^2, \dots, \omega^p, Y_1, \dots, Y_q) - \dots - T(\omega^1, \dots, \omega^p, Y_1, \dots, D_X Y_q), \quad T \in \mathcal{T}_q^p(M).$$

Se verifică relația

$$D_X(S \otimes T) = D_X S \otimes T + S \otimes D_X T, \quad \forall S, T.$$

Dacă $D_X T = 0$, $\forall X \in \mathcal{X}(M)$, atunci T se numește *câmp tensorial paralel* în raport cu conexiunea liniară D .

Operatorul D_X induce un *operator general de derivare covariantă* care aplică pe $\mathcal{T}_q^p(M)$ în \mathcal{T}_{q+1}^p . Acesta comută cu contractia.

Iată câteva reguli de derivare covariantă pe componente:

$$Y_{,i}^j = \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} + \Gamma_{ih}^j Y^h, \quad \omega_{j,i} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} - \Gamma_{ij}^h \omega_h,$$

$$T_{j,k}^i = \frac{\partial T_j^i}{\partial x^k} + \Gamma_{kh}^i T_j^h - \Gamma_{kj}^h T_h^i, \quad (Y^i \omega_j)_{,k} = Y_{,k}^i \omega_j + Y^i \omega_{j,k}.$$

11.7 Metrici riemanniene

Reamintim că un produs scalar pe $T_x M$ se numește *metrică riemanniană* pe $T_x M$.

7.1. Definiție. Un câmp tensorial g de tipul $(0, 2)$ pe M cu proprietatea că pentru fiecare $x \in M$ tensorul $g(x)$ este o metrică riemanniană pe $T_x M$ se numește *câmp tensorial metric* sau *metrică riemanniană* pe M . Perechea (M, g) se numește *varietate Riemann*. Fie X și Y două câmpuri vectoriale pe M . Cu ajutorul lui g putem defini produsul scalar $g(X, Y)$, norma $\|X\|^2 = g(X, X)$, și unghiul (dacă X și Y nu au zerouri pe M)

$$\cos \theta = \frac{g(X, Y)}{\|X\| \|Y\|}, \quad \theta \in [0, \pi].$$

De asemenea metrica riemanniană g induce un produs scalar, o normă, un unghi pe $\mathcal{T}_q^p(M)$, precum și operațiile de ridicare și coborâre a indicilor pentru orice câmp tensorial pe M . Un câmp de repere local $\{X_1, \dots, X_n\}$ pe M se numește *ortonormat* dacă $g(X_a, X_b) = \delta_{ab}$, adică $\{X_1(x), \dots, X_n(x)\}$ este o bază ortonormată în $T_x M$, $\forall x \in M$.

Local, avem exprimarea $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$, unde $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$. De asemenea, reamintim că dacă coordonatele (x^i) ale punctului x se schimbă în $(x^{i'})$, atunci funcțiile g_{ij} se schimbă după legea (locală)

$$g^{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} g_{ij}.$$

7.2. Teoremă. Pe spațiul riemannian (M, g) există o singură conexiune liniară simetrică D cu proprietatea

$$D_X(g(Y, Z)) = g(D_X Y, Z) + g(Y, D_X Z), \quad \forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M),$$

numită *conexiune riemanniană*.

Demonstrație. Mai întâi observăm că relația din teoremă este echivalentă cu $D_X g = 0$, $\forall X \in \mathcal{X}(M)$, adică cu faptul că g este un câmp tensorial paralel în raport cu D . Pentru simplificarea demonstrației vom lucra direct pe componente; fie g_{ij} componentele lui g și Γ_{ij}^h componentele lui D . Prin ipoteză

$$\Gamma_{ij}^h = \Gamma_{ji}^h, \quad g_{ij,k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma_{ki}^h g_{hj} - \Gamma_{kj}^h g_{hi} = 0.$$

Rezultă

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = 2g_{hk}\Gamma_{ij}^h$$

și deci

$$\Gamma_{ij}^h = \frac{1}{2}g^{hk} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right).$$

Astfel conexiunea riemanniană este caracterizată prin *simbolurile Christoffel*.

Exemple de metrici riemanniene. 1) Metrica uzuală pe \mathbb{R}^n , $g(X_x, Y_x) = \langle X_x, Y_x \rangle =$ produsul scalar canonic; $g_{ij}(x) = \delta_{ij}$.

2) Metrica stereografică pe \mathbb{R}^n ,

$$g(X_x, Y_x) = \frac{4}{(1+k\|x\|^2)^2} \langle X_x, Y_x \rangle, \quad k \geq 0; \quad g_{ij}(x) = \frac{4}{(1+k\|x\|^2)^2} \delta_{ij}.$$

3) Metrica pe o bilă deschisă,

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|^2 < \frac{1}{-k}, \quad k < 0 \right\}, \quad g(X_x, Y_x) = \frac{4}{(1+k\|x\|^2)^2} \langle X_x, Y_x \rangle;$$

$$g_{ij}(x) = \frac{4}{(1+k\|x\|^2)^2} \delta_{ij}.$$

4) Metrica Poincaré pe semiplanul superior,

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad y > 0\}; \quad g_{ij}(x, y) = \frac{1}{y^2} \delta_{ij}.$$

Facem precizarea că în unele lucrări, metrica este dată prin pătratul elementului de arc, $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$.

Fie $g_{ij} = \delta_{ij}$ metrica uzuală pe $M = \mathbb{R}^n$ și (x^i) coordonatele euclidiene (sistem de coordonate ortonormat) ale punctului $x \in \mathbb{R}^n$. În acest caz, pentru orice câmp tensorial, coordonatele covariante, mixte sau contravariante coincid. În particular pentru un câmp vectorial coordonatele contravariante coincid cu cele covariante și cu cele obișnuite din geometria analitică elementară numite *deseori coordonate fizice*.

Presupunem că de la coordonatele euclidiene (x^i) trecem la alte coordonate $(x^{i'})$, tot ale punctului x . Rezultă

$$g_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}.$$

Sistemul de coordonate $(x^{i'})$ se numește *ortogonal* dacă $g_{i'j'} = 0$ pentru $i' \neq j'$. În acest caz $g_{i'i'}(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ și funcțiile $h_{i'} = \sqrt{g_{i'i'}}$, $i' = 1, \dots, n$, se numesc *coeficienții Lamé*.

Fixăm un sistem de coordonate $(x^{i'})$ ortogonal. Fie câmpul vectorial $X = X^{i'} \frac{\partial}{\partial x^{i'}}$. Coordonatele covariante ale lui X sunt

$$X_{j'} = \sum_{i'=1}^{n'} g_{i'j'} X^{i'} = h_{j'}^2 X^{j'}$$

(fără sumare după j'). Pe de altă parte observăm că ansamblul format din câmpurile vectoriale

$$t_{i'} = \frac{\partial x^1}{\partial x^{i'}} \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + \frac{\partial x^n}{\partial x^{i'}} \frac{\partial}{\partial x^n}, \quad i' = 1, \dots, n,$$

este un câmp de repere pe \mathbb{R}^n . Ortonormând acest câmp de repere în raport cu metrica uzuală, obținem

$$e_{1'} = \frac{1}{h_{1'}} t_{1'}, \dots, e_{n'} = \frac{1}{h_{n'}} t_{n'}.$$

Cu aceasta, obținem exprimarea

$$\begin{aligned} X &= X^{i'} \frac{\partial}{\partial x^{i'}} = X^{i'} \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \frac{\partial}{\partial x^j} = X^{1'} t_{1'} + \dots + X^{n'} t_{n'} \\ &= (h_1 X^{1'}) e_{1'} + \dots + (h_n X^{n'}) e_{n'}, \end{aligned}$$

coordonatele

$$X_{x^{1'}} = h_{1'} X^{1'}, \dots, X_{x^{n'}} = h_{n'} X^{n'}$$

numindu-se *componente (coordonate) fizice* ale câmpului vectorial X .

11.8 Operatori diferențiali

Fie (M, g) o varietate riemaniană, fie $\mathcal{F}(M)$ algebra funcțiilor diferențiabile de clasă C^∞ pe M și $\mathcal{X}(M)$ algebra Lie a câmpurilor vectoriale diferențiabile de clasă C^∞ pe M .

Gradient. Fie $f \in \mathcal{F}(M)$. Câmpul vectorial $\text{grad } f$ definit prin

$$g(X, \text{grad } f) = X(f) = df(X), \quad \forall X \in \mathcal{X}(M)$$

se numește *gradientul* lui f .

În coordonate,

$$\text{grad } f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i}; \quad (\text{grad } f)^i = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}.$$

Din definiție se observă că $\text{grad } f$ este ortogonal hipersuprafețelor de nivel constant atașate lui f .

Se verifică următoarele relații

$$\begin{aligned} \text{grad}(a_1 f_1 + a_2 f_2) &= a_1 \text{grad } f_1 + a_2 \text{grad } f_2 \\ \text{grad}(f_1 f_2) &= f_1 \text{grad } f_2 + f_2 \text{grad } f_1 \\ \text{grad} \frac{f_1}{f_2} &= \frac{f_2 \text{grad } f_1 - f_1 \text{grad } f_2}{f_2^2}. \end{aligned}$$

Demonstrație. $g(X, \text{grad}(f_1 f_2)) = X(f_1 f_2) = f_1 X(f_2) + f_2 X(f_1) = f_1 g(X, \text{grad } f_2) + f_2 g(X, \text{grad } f_1) = g(X, f_1 \text{grad } f_2 + f_2 \text{grad } f_1)$, $\forall X \in \mathcal{X}(M)$. Rezultă $\text{grad}(f_1 f_2) = f_1 \text{grad } f_2 + f_2 \text{grad } f_1$.

Operatorul grad: $\mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ definit prin $f \rightarrow \text{grad}f$ se numește *gradient*.

Hessiană. Fie $f \in \mathcal{F}(M)$. A doua derivată covariantă a lui f în raport cu conexiunea riemanniană se numește *hessiană* lui f și se notează prin $\text{Hess} f$. Alternativ, hessiană este câmpul tensorial de tipul (0,2) definit prin

$$\text{Hess}f(X, Y) = D_X(df)(Y) = X(df(Y)) - df(D_X Y), \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

În coordonate,

$$\text{Hess}f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k} - \Gamma_{jk}^h \frac{\partial f}{\partial x^h} \right) dx^j \otimes dx^k, \quad (\text{Hess}f)_{jk} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k} - \Gamma_{jk}^h \frac{\partial f}{\partial x^h}.$$

Operatorul Hess: $\mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{T}_2^0(M)$ definit prin $f \rightarrow \text{Hess}f$ se numește *hessiană*.

Divergență. Fie $X \in \mathcal{X}(M)$, $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ și derivata sa covariantă $X^i_{,j}$ în raport cu conexiunea riemanniană. Câmpul scalar $\text{div}X$ definit prin contracția

$$\text{div}X = X^i_{,i} = \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^i X^j$$

se numește *divergența* lui X .

Fie $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$. Dacă notăm $G = \det[g_{ij}]$, atunci

$$\text{div}X = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial(\sqrt{G} X^i)}{\partial x^i} \quad \text{cu sumă după } i.$$

Într-adevăr, se observă că

$$\Gamma_{ij}^i = \frac{1}{2} g^{ik} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) = \frac{1}{2} g^{ik} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}$$

și ținând seama de regula de derivare a unui determinant,

$$\frac{\partial G}{\partial x^j} = \frac{\partial G}{\partial g_{ik}} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = G g^{ik} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j},$$

deducem

$$\Gamma_{ij}^i = \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial x^i} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial x^j}.$$

Deci

$$\text{div}X = \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial x^j} X^j = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial(\sqrt{G} X^i)}{\partial x^i}.$$

Această expresie a divergenței este des utilizată și permite dovedirea imediată a relației

$$\text{div}(fX) = X(f) + f \text{div}X, \quad f \in \mathcal{F}(M), \quad \forall X \in \mathcal{X}(M).$$

Operatorul div : $\mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$ definit prin $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \rightarrow X^i_{,i}$, se numește *divergență*.

Laplacian. Operatorul Δ definit prin

$$\Delta f = \text{div}(\text{grad})f$$

se numește *laplacian*. Explicit

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{G} g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x^k} \right) = g^{kl} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l} - \frac{\partial f}{\partial x^h} \Gamma_{kl}^h \right),$$

adică Δ este urma hessianei.

Rotor. Fie câmpul vectorial $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ și $\omega = g_{ij} X^i dx^j$, $\omega_j = g_{ij} X^i$, 1-formă diferențială asociată. Câmpul tensorial $\text{rot } X$ de tipul (0,2) definit prin

$$\text{rot} X = (\omega_{j,i} - \omega_{i,j}) dx^i \otimes dx^j = \left(\partial(g_{\frac{hj}{X}}^h) \partial x^i - \partial(g_{\frac{hi}{X}}^h) \partial x^j \right) dx^i \otimes dx^j$$

se numește *rotorul* lui X . Operatorul $\text{rot}: \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{T}_2^0(M)$, $X \rightarrow \text{rot} X$, se numește *rotor*. Evident

$$\text{rot}(\text{grad} f) = 0,$$

Se dovedește că dacă $M \subset \mathbb{R}^3$, atunci câmpul tensorial $\text{rot } X$ este echivalent cu un câmp vectorial contravariant definit prin componentele

$$(\text{rot} X)^i = \frac{1}{\sqrt{G}} \left(\partial(g_{\frac{hk}{X}}^h) \partial x^j - \partial(g_{\frac{hj}{X}}^h) \partial x^k \right),$$

unde $\{i, j, k\}$ este o permutare ciclică a mulțimii $\{1, 2, 3\}$. Tot în acest context se verifică și relațiile

$$\begin{aligned} \text{rot}(\text{rot} X) &= \text{grad}(\text{div} X) - \Delta X \\ \text{div}(\text{rot} X) &= 0. \end{aligned}$$

11.9 Forme alternate

Fie V un spațiu vectorial real de dimensiune n .

9.1. Definiție. O q -formă sau formă alternată de ordinul q pe V este o funcție

$$\omega : \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{q \text{ factori}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (v_1, \dots, v_q) \rightarrow \omega(v_1, \dots, v_q)$$

care satisface următoarele condiții.

1) multilineară: pentru fiecare $i \in \{1, \dots, q\}$ și $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_q \in V$ restricția $v \rightarrow \omega(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_q)$ este liniară,

2) antisimetrică: pentru fiecare $v_1, \dots, v_q \in V$ și pentru fiecare permutare σ a mulțimii $\{1, \dots, q\}$ se satisface $\omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(q)}) = (\text{sign} \sigma) \omega(v_1, \dots, v_q)$.

Cu alte cuvinte, o q -formă pe V nu este altceva decât un tensor antisimetric de tipul (0,q) pe V . Mulțimea tuturor q -formelor pe V se notează cu $\mathcal{F}_q(V)$ și este un spațiu vectorial real cu (vezi teorema 9.3)

$$\dim \mathcal{F}_q(V) = \begin{cases} C_n^q & \text{dacă } 0 \leq q \leq n \\ 0 & \text{dacă } q > n \end{cases}.$$

Evident, $\mathcal{F}_0(V) = \mathbb{R}$, $\mathcal{F}_1(V) = V^*$.

9.2. Definiție. Fie $\mathcal{F}_p(V)$, $\mathcal{F}_q(V)$ și $\mathcal{F}_{p+q}(V)$. Funcția

$$\wedge : \mathcal{F}_p(V) \times \mathcal{F}_q(V) \rightarrow \mathcal{F}_{p+q}(V)$$

definită prin

$$\begin{aligned} & (\omega^1 \wedge \omega^2)(v_1, \dots, v_{p+q}) = \\ & = \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma} (\text{sign} \sigma) \omega^1(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) \omega^2(v_{\sigma(p+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)}), \end{aligned}$$

suma fiind luată după toate permutările σ ale lui $\{1, \dots, p+q\}$, se numește *produs exterior*.

Se observă că produsul exterior este o aplicație bilinară și asociativă. Asociativitatea permite extinderea definiției produsului exterior la un număr finit de factori.

Evident,

$$\omega^1 \wedge \omega^2 = (-1)^{pq} \omega^2 \wedge \omega^1.$$

9.3. Teoremă. *Dacă $\{e_j, j = 1, \dots, n\}$ este o bază a lui V și $\{e^i, i = 1, \dots, n\}$ este o bază duală în V^* , atunci mulțimea*

$$\{e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_q}, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n\}$$

este o bază a lui $\mathcal{F}_q(V)$, numită baza produs.

Demonstrație. Mulțimea din teoremă este linear independentă. Într-adevăr, relația

$$\sum_{i_1 < \dots < i_q} \omega_{i_1 \dots i_q} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_q} = 0 \quad (q - \text{forma zero}),$$

implică

$$\begin{aligned} 0 & = \sum_{i_1 < \dots < i_q} \omega_{i_1 \dots i_q} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_q}(e_{j_1}, \dots, e_{j_q}) = \\ & = \sum_{i_1 < \dots < i_q} \omega_{i_1 \dots i_q} \sum_{\sigma} (\text{sign} \sigma) e^{i_1}(e_{\sigma(j_1)}) \dots e^{i_q}(e_{\sigma(j_q)}) = \\ & = \sum_{i_1 < \dots < i_q} \omega_{i_1 \dots i_q} \sum_{\sigma} (\text{sign} \sigma) \delta_{\sigma(j_1)}^{i_1} \dots \delta_{\sigma(j_q)}^{i_q} = \omega_{j_1 \dots j_q}, \end{aligned}$$

unde $j_1 < \dots < j_q$.

Să aratăm că mulțimea din teoremă sau mai general mulțimea $\{e^i \wedge \dots \wedge e^{i_q}, \quad i_1, \dots, i_q = 1, \dots, n\}$ generează pe $\mathcal{F}_q(V)$. Pentru aceasta, fie $\omega \in \mathcal{F}_q(V)$ și numerele reale $\omega_{i_1 \dots i_q} = \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_q})$. Găsim

$$\begin{aligned} & \omega_{i_1 \dots i_q} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_q}(e_{j_1}, \dots, e_{j_q}) \\ & = \omega_{i_1 \dots i_q} \frac{1}{q!} \sum_{\sigma} (\text{sign} \sigma) e^{i_1}(e_{\sigma(j_1)}) \dots e^{i_q}(e_{\sigma(j_q)}) \\ & = \frac{1}{q!} \omega_{i_1 \dots i_q} \sum_{\sigma} (\text{sign} \sigma) \delta_{\sigma(j_1)}^{i_1} \dots \delta_{\sigma(j_q)}^{i_q} = \omega_{j_1 \dots j_q} = \omega(e_{j_1}, \dots, e_{j_q}). \end{aligned}$$

Deoarece ω este multilineară, ultima relație implică

$$\omega_{i_1 \dots i_q} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_q}(v_1, \dots, v_q) = \omega(v_1, \dots, v_q).$$

Deci

$$\omega = \omega_{i_1 \dots i_q} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_q} = q! \sum_{j_1 < \dots < j_q} \omega_{j_1 \dots j_q} e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_q},$$

unde numerele reale $q! \omega_{j_1 \dots j_q}$, $j_1 < \dots < j_q$, sunt *coordonatele stricte* ale q -forme ω .

11.10 Forme diferențiale alternate

Fie M o mulțime deschisă din \mathbb{R}^n , fie $T_x M$ spațiul tangent la M în punctul x și $\mathcal{F}_q(T_x M)$ mulțimea tuturor q -formelor pe $T_x M$.

10.1. Definiție. O funcție

$$\omega : M \rightarrow \cup_{x \in M} \mathcal{F}_q(T_x M), \quad \omega(x) \in \mathcal{F}_q(T_x M),$$

se numește *q-formă diferențială* sau *formă diferențială alternată de ordinul q* pe M .

Cu alte cuvinte, o q -formă diferențială este un câmp tensorial antisimetric de tipul $(0,2)$ pe M . Fie $\mathcal{F}_q(M)$ mulțimea tuturor q -formelor diferențiale pe M . Adunarea a două elemente din această mulțime ca și produsul dintre o funcție reală și o q -formă se definesc punctual.

Fie $T_x^* M$ dualul spațiului tangent. Baza canonică în $T_x M$ este

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}, i = 1, \dots, n \right\}_x,$$

iar duala sa, bază în $T_x^* M$ este $\{dx^i, i = 1, \dots, n\}_x$. Baza indusă în $\mathcal{F}_q(M)$ este $\{dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q}, 1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n\}_x$. Folosind sistemul de generatori $\{dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q}\}$, expresia în coordonate a lui ω este

$$\omega(x) = \omega_{i_1 \dots i_q}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q}.$$

Funcțiile $x \rightarrow \omega_{i_1 \dots i_q}(x)$ se presupun diferențiabile de clasă C^∞ pe M .

Fie $\mathcal{F}(M)$ algebra funcțiilor reale și $\mathcal{X}(M)$ algebra Lie a câmpurilor vectoriale. O *q-formă diferențială* pe M poate fi privită ca fiind funcția

$$\omega : \mathcal{X}(M) \times \dots \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M), \quad (X_1, \dots, X_q) \rightarrow \omega(X_1, \dots, X_q),$$

$\mathcal{F}(M)$ -liniară în fiecare argument și cu proprietatea

$$\omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(q)}) = (\text{sign} \sigma) \omega(X_1, \dots, X_q),$$

unde σ este o permutare a mulțimii $\{1, \dots, q\}$.

Definiția produsului exterior pentru q -forme diferențiale este evidentă.

Fie $X \in \mathcal{X}(M)$ și $\omega \in \mathcal{F}_q(M)$. Prin *contractia* dintre X și ω înțelegem $(q-1)$ -forma diferențială $X \lrcorner \omega$ definită prin

$$(X \lrcorner \omega)(X_1, \dots, X_{q-1}) = \omega(X, X_1, \dots, X_{q-1}), \quad X_1, \dots, X_{q-1} \in \mathcal{X}(M).$$

10.2. Definiție. Fie $\mathcal{F}_q(M)$ și $\mathcal{F}_{q+1}(M)$. O funcție \mathbb{R} -liniară $d : \mathcal{F}_q(M) \rightarrow \mathcal{F}_{q+1}(M)$ cu proprietățile

$$\begin{aligned} d^2 &= 0 \\ d(\omega^1 \wedge \omega^2) &= d\omega^1 \wedge \omega^2 + (-1)^q \omega^1 \wedge d\omega^2 \\ X(d\omega) &= d(X(\omega)), \quad \forall X \in \mathcal{X}(M) \\ X(\omega) &= X \lrcorner d\omega + d(X \lrcorner \omega) \end{aligned}$$

se numește *diferențială exterioară*.

Utilizând derivata covariantă și croșetul putem scrie

$$d\omega(X_1, \dots, X_{q+1}) = \sum_{1 \leq i \leq q+1} (-1)^{i-1} D_{X_i} \omega(X_1, \dots, X_{i-1}, \dots, X_{q+1}) +$$

$$+ \sum_{1 \leq i \leq j \leq q+1} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_{q+1}).$$

Pe $\mathcal{F}(M) = \mathcal{F}_0(M)$ diferențiala exterioară se reduce la diferențiala obișnuită. Mai mult,

$$d\omega(x) = d\omega_{i_1 \dots i_q}(x) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q}.$$

O q -formă diferențială ω cu proprietatea $d\omega = 0$ se numește *formă închisă*. O $(q+1)$ -formă diferențială η cu proprietatea că există o q -formă ω astfel încât $\eta = d\omega$ se numește *formă exactă*.

Observații. 1) Mulțimea deschisă M poate fi înlocuită cu orice subvarietate de dimensiune $m \geq 1$, cu sau fără frontieră, a lui \mathbb{R}^n .

2) Fie M o subvarietate a lui \mathbb{R}^n , de dimensiune m , cu sau fără frontieră. O *formă volum* pe M este o m -formă diferențială ω pe M cu proprietatea $\omega(v_1, \dots, v_m) = \pm 1$ ori de câte ori v_1, \dots, v_m este o bază ortonormată a lui $T_x M$. O alegere a unei forme volum ω pe M se numește *orientare* a lui M ; despre M se zice că este *orientată*.

Fie M o subvarietate de dimensiune $m \geq 2$, cu frontieră. O orientare pe M induce o orientare pe ∂M .

3) În $(\mathbb{R}^3, \delta_{ij})$, 1-formele și 2-formele pot fi convertite în câmpuri vectoriale prin corespondențele

$$\begin{aligned} \sum f_i dx^i &\stackrel{(1)}{\leftrightarrow} \sum f_i U_i \stackrel{(2)}{\leftrightarrow} f_1 dx^2 \wedge dx^3 + f_2 dx^3 \wedge dx^1 + f_3 dx^1 \wedge dx^2 \\ df &\stackrel{(1)}{\leftrightarrow} \text{grad} f \\ \omega &\stackrel{(1)}{\leftrightarrow} V \Rightarrow d\omega \stackrel{(2)}{\leftrightarrow} \text{rot} V, \\ \eta &\stackrel{(2)}{\leftrightarrow} V \Rightarrow d\eta = (\text{div} V) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3. \end{aligned}$$

11.11 Probleme propuse

1. Să se explicitizeze sumele

$$\omega_i v^i, T_{ij}^i, \omega_i T_j^i, T_j^i v^j.$$

2. Să se verifice că $(,) : \mathcal{T}_1^1(V) \times \mathcal{T}_1^1(V) \rightarrow \mathbb{R}$, $(S, T) = S_j^i T_i^j$ este un produs scalar pe $\mathcal{T}_1^1(V)$.

3. Fie $T \in \mathcal{T}_2(V)$ și $[T_{ij}]$ matricea coordonatelor sale. Să se verifice că la o schimbare a bazei, avem

$$\det[T_{i'j'}] = (\det[A_{i'}^i])^2 \det[T_{ij}].$$

4. Se dau $X = 2x \frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial y}$, $Y = \sin x \frac{\partial}{\partial x} + xy \frac{\partial}{\partial y}$. Să se găsească $[X, Y]$. Apoi, luând $\omega = -x dx + y dy$, să se calculeze $\omega(X)$ și $\omega(Y)$.

5. Pe $M : x > 0, y > 0$, considerăm câmpul tensorial

$$T = (x^2 + y^2) \frac{\partial}{\partial x} \otimes \frac{\partial}{\partial x} + \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial}{\partial y} \otimes \frac{\partial}{\partial y}.$$

Să se găsească componentele lui T în coordonate polare.

6. Pe $\mathbb{R}^3 \setminus Oz$ se consideră câmpul vectorial

$$X = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Să se găsească componentele lui X în coordonate sferice.

7. Pe \mathbb{R}^2 se dau: conexiunea D de componente

$$\Gamma_{jk}^i(x) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } i = j = 1, k = 2 \text{ sau } i = k = 1, j = 2 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

și

$$X = x \frac{\partial}{\partial z} - y \frac{\partial}{\partial y}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial x} - e^x \frac{\partial}{\partial y}, \quad \omega = xy dx + e^y dy.$$

Să se calculeze $D_X Y$, $D_X(Y \otimes \omega)$.

8. Se dă varietatea riemanniană $(\mathbb{R}^3 \setminus Oz, \delta_{ij})$. Să se explicitizeze componentele metricii, coeficienții Lam

pe și simbolurile Christoffel, în coordonate cilindrice și sferice.

9. Fie

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}, \quad g_{ij}(x, y) = \frac{1}{y^2} \delta_{ij},$$

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad X = y \frac{\partial}{\partial x} + x^2 y \frac{\partial}{\partial y}.$$

Să se determine grad f , Hess f , div X , Δf , rot X .

10. Să se calculeze $d\omega$ pentru fiecare din formele diferențiale

$$\omega = x^2 dx + y^2 dy + z^2 dz, \quad \omega = e^{xy} dx \wedge dz, \quad \omega = \frac{1}{x + y + z} (dx + dy + dz),$$

$$\omega = (1 + 2xyz^2) dy \wedge dz - y^2 z^2 dz \wedge dx + xy^2 dx \wedge dy.$$

11. Să se arate că algebra operatorilor diferențiali parțiali cu coeficienți constanți este izomorfă cu algebra multiplicativă a polinoamelor.

Indicație. $\frac{\partial}{\partial x^i} \rightarrow x^i$ este un izomorfism.

Bibliografie

- [1] Gh. Atanasiu, Gh. Munteanu, M. Postolache, *Algebră liniară, geometrie analitică și diferențială*, Editura All, București, 1994.
- [2] V. Balan, *Algebră liniară, geometrie analitică și diferențială*, Ed. Fair Partners, 1999.
- [3] V. Balan, I.R. Nicola, *Applications of linear algebra, analytic & differential geometry, differential equations. Solved problems and software programs*, Printech Editors, Bucharest 2011.
- [4] R.M. Bowen, C.C. Wang, *Introduction to vectors and tensors*, vol. 1-2, Plenum Press, New York, 1976.
- [5] V. Brînzănescu, O. Stănășilă, *Matematici speciale*, Editura All, București, 1994.
- [6] M. Craioveanu, I.D. Albu, *Geometrie afină și euclidiană*, Editura Facla, Timișoara, 1982.
- [7] V. Cruceanu, *Elemente de algebră liniară și geometrie*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1973.
- [8] J. Dieudonne, *Linear algebra and geometry*, Paris, Hermann, 1969.
- [9] B. Dubrovin, S. Novikov, A. Fomenko, *Geometria contemporană*, Editori Riuniti, Edizioni Mir, 1987.
- [10] Gh. Galbură, F. Rado, *Geometrie*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1979.
- [11] Gh. Gheorghiev, V. Oproiu, *Varietăți diferențiale finite și infinite dimensionale*, Editura Academiei, 1976.
- [12] Gh.Th. Gheorghiu, *Algebră liniară, geometrie analitică și diferențială și programare*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1977.
- [13] E. Grecu, *Geometrie diferențială*, Universitatea Politehnica București, 1997.
- [14] W. Klingenberg, *Lineare algebra und geometrie*, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [15] I.A. Kostrikin, I.Yu. Manin, *Linear algebra and geometry*, Gordon and Breach Science Publishers, 1989.
- [16] L. Nicolescu, *Lecții de geometrie*, Universitatea București, 1990.
- [17] V. Obădeanu, *Elemente de algebră liniară și geometrie analitică*, Editura Facla, Timișoara, 1981.

- [18] V. Oproiu, *Geometrie*, Universitatea Iași, 1980.
- [19] A.V. Pogorelev, *Analytic geometry*, Mir Publishers, Moscow, 1961.
- [20] C. Radu, *Algebră liniară, geometrie analitică și diferențială*, Editura All, București, 1996.
- [21] C. Radu, C. Drăgușin, L. Drăgușin, *Aplicații de algebră, geometrie și matematici speciale*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1991.
- [22] C. Radu, L. Drăgușin, C. Drăgușin, *Algebră liniară, Analiză matematică, Geometrie analitică și diferențială, Culegere de probleme*, Editura Fair Partners, București, 2000.
- [23] N. Soare, *Curs de geometrie*, Universitatea București, 1996.
- [24] L. Stoica, *Elemente de varietăți diferențiabile*, Geometry Balkan Press, București, Romania 1998.
- [25] I. Teodorescu, St. Teodorescu, *Probleme de geometrie superioară*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1975.
- [26] A. Turtoi, *Geometrie*, Universitatea București, 1985.
- [27] C. Udriște, *Probleme de algebră liniară, geometrie analitică și diferențială*, Editura Didactică și Pedagogică, București 1976.
- [28] C. Udriște, *Problems in algebra, geometry and differential equations I, II*, University Politehnica of Bucharest, 1992.
- [29] C. Udriște, *Aplicații de algebră, geometrie și ecuații diferențiale*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1993.
- [30] C. Udriște, *Algebră liniară, Geometrie analitică*, Geometry Balkan Press, București, Ed. I - 1996, Ed. II - 2000.
- [31] C. Udriște, V. Balan, *Analytic and differential geometry*, Geometry Balkan Press, București, Romania, 1999.
- [32] C. Udriște, O Dogaru, *Algebră liniară, Geometrie analitică*, Universitatea Politehnica București, 1991.
- [33] C. Udriște, C. Radu, C. Dicu, O. Mălăncioiu, *Probleme de algebră, geometrie și ecuații diferențiale*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981.
- [34] C. Udriște, C. Radu, C. Dicu, O. Mălăncioiu, *Algebră, geometrie și ecuații diferențiale*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982.
- [35] Gh. Vranceanu, *Geometrie analitică, proiectivă și diferențială*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1962.
- [36] Gh. Vranceanu, G. Mărgulescu, *Geometrie analitică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1973.
- [37] ***, *Matlab[®] software*, <http://www.mathworks.com/products/matlab/index.html>
- [38] ***, *Maple[®] software*, <http://www.maplesoft.com/products/maple/>
- [39] ***, *Mathematica[®] software*, <http://www.wolfram.com/products/>

Index de noțiuni

- 1-formă diferențială, 239

- a doua formă fundamentală a suprafeței, 213
- abscisa, 29
- abscisa curbilinie, 126
- acelerația curbei, 117
- acelerații de ordin superior, 117
- algebră Lie, 238
- aplicația Weingarten, 198
- aria unei porțiuni de suprafață, 222
- asimptotă, 63, 122
- axa de simetrie, 66
- axa principală, 84
- axa unui fascicul, 38

- bază duală, 239
- binormala, 159

- câmp normal la o curbă, 120
- câmp paralel, 121
- câmp tangent la o curbă, 120
- câmp tensorial, 240
- câmp vectorial, 105, 119, 238
- câmp vectorial diferențiabil, 107, 238
- câmp vectorial pe o curbă, 119
- câmpul coreperului natural, 239
- câmpul reperului natural, 106, 238
- câmpuri fundamentale, 106, 238
- câmpuri scalare, 236
- cerc osculator, 143
- cilindru circular, 85
- cilindru eliptic, 85
- cilindru hiperbolic, 85
- cilindru parabolic, 85
- coborârea indicilor, 235
- componente contravariante, 231
- componente covariante, 231
- componentele unui vector, 104
- con asimptot, 81, 82
- conexiune liniară, 241
- conică, 55
- conică de gen eliptic, 58
- conică de gen hiperbolic, 58
- conică de gen parabolic, 58
- conică netedă, 62
- contactul a două curbe, 141
- contractie, 234
- coordonate carteziane, 29
- coordonate cilindrice, 50
- coordonate euclidiene, 104
- coordonate sferice, 52
- coordonatele carteziane ale punctului, 29
- coordonatele euclidiene ale unui câmp, 106
- coreper natural, 239
- cosinusuri directe, 32
- cota, 29
- croșetul a două câmpuri vectoriale, 238
- cuadrică, 89
- cuadrică degenerată, 89
- cuadrică dublu riglată, 86
- cuadrică nedegenerată, 89
- cuadrică netedă, 95
- cuadrică riglată, 81
- cuadrice, 85
- curbă, 111
- curbă algebrică, 157
- curbă directe, 86
- curbă închisă, 112
- curbă periodică, 112
- curbă regulată, 115
- curbă simplă, 112
- curbe coordonate, 180
- curbe plane, 129
- curbură, 242
- curbura, 164
- curbura Gauss, 207
- curbura normală, 201

- derivată covariantă, 109, 241
 derivata covariantă, 108
 diametri conjugați, 66
 diametrul unei conice, 65
 difeomorfism, 102
 diferențiala unei funcții, 238
 direcție asimptotică, 62
 direcție normală, 62
 divergență, 246
 dreaptă orientată, 31
 dreapta suport, 11
 drum parametrizat, 111
 dublu produs vectorial, 23
- ecuația normală a planului, 36
 ecuația vectorială a unei curbe, 112
 ecuație vectorială, 30
 ecuații carteziene, 30
 ecuații parametrice, 30
 ecuații parametrice ale unei curbe, 111
 elipsoid, 78
 extremitate, 11
- fascicul de plane, 38
 formă alternată, 247
 forme alternate, 247
 forme diferențiale alternate, 249
 formulele Frenet, 162
 funcție diferențiabilă, 101, 102, 188
- generatoare rectilinie, 86
 gradient, 245
 graficul unei funcții, 101
- hartă proprie, 176
 hessiană, 246
 hessiana unei funcții, 102
 hiperboloid cu două pânze, 81
 hiperboloid cu o pânză, 80
 hiperplan normal la curbă, 115
- identitatea Jacobi, 238
 imersie, 102
 inegalitatea Cauchy-Schwarz, 104, 108
 invarianți metrici, 56
- Jacobianul unei funcții, 101
 laplacian, 247
- legea Coulomb, 107
 lungime, 11
 lungimea unui vector, 104
- matricea Jacobiană, 101
 metrică Riemann, 235, 243
 Metrica Poincaré, 244
 mulțime convexă, 77
 multiplicitatea unui punct multiplu, 112
- normala principală, 160
- octante, 30
 ordin de contravarianță, 232
 ordin de covarianță, 232
 ordinul unui tensor, 232
 ordonata, 29
 origine, 11
 originea spațiului, 103
- paraboloid eliptic, 83
 parametri esențiali, 58
 parametri neesențiali, 58
 parametrizare, 111
 parametru, 111
 perioadă, 112
 plan normal, 156
 plan osculator, 159
 plan rectificator, 160
 plan tangent, 191
 plane de coordonate, 30
 plane principale, 83
 pol, 63
 polară, 63
 prima formă pătratică a suprafeței, 212
 produs mixt, 24, 106
 produs mixt generalizat, 105
 produs scalar, 106
 produs tensorial, 233
 produs vectorial, 21, 106, 107
 produs vectorial generalizat, 105
 produsul vectorial, 105
 proiecție ortogonală, 29
 punct critic, 102
 punct dublu, 112
 punct multiplu, 112
 punct regulat, 115
 punct singular, 102, 116

- punct singular de ordinul m , 116
 punct triplu, 112

 ramură infinită, 122
 raza de torsiune, 165
 reper, 104
 reper cartezian, 29
 reper natural, 104, 237
 reprezentarea normală a unei curbe, 126
 ridicarea indicilor, 235
 rotație, 48
 rotor, 247

 segment orientat, 11
 segmente congruente, 11
 segmente echipolente, 11
 semispațiu, 37
 sfera, 75
 simbolul Kronecker, 231
 simbolurile Christoffel, 244
 simetria în raport cu un plan, 50
 simetria în raport cu un punct, 47
 spațiu dual, 232
 spațiul cotangent, 238
 spațiul tangent, 105, 237
 spațiul tangent într-un punct, 104
 suprafață de rotație, 186
 suprafață riglată, 88
 suprafața conoid, 185
 suprafețe, 175
 suprafețe cilindrice, 183
 suprafețe conice, 183
 suprafețe de rotație, 186
 suprafețe riglate, 181

 tangentă, 62
 tangenta la curbă, 115
 tensor, 232
 tensor antisimetric, 234
 tensor simetric, 234
 teorema funcției implicite, 102
 torsiune, 165, 242
 traiectorii ortogonale, 215
 translație, 47
 triedrul lui Frenet, 161

 unghiul dintre doi vectori, 104
 unghiuri directoare, 32

 vârfuri, 67
 varietate Riemann, 243
 vector covariant, 231
 vector de poziție, 29
 vector director, 30
 vector liber, 12
 vector normal, 32, 33
 vector nul, 12
 vector tangent, 236
 vector unitate, 104
 vectori coliniari, 13
 vectori contravarianti, 231
 vectori coplanari, 13
 vectori opusi, 13
 vectori ortogonali, 104
 versor, 12, 104
 viteza curbei, 117
 viteza unei curbe parametrizate, 126
 viteza unei curbe regulate, 115