Capitole de analiză matematică pentru ingineri

Mircea Cimpoeaş

Cuprins

Prefaţă

Lucrarea îsi propune să prezinte noţiunile şi rezultatele fundamentale de analiză matematică necesare studenţilor care urmează o formă de învăţământ superior tehnic, în special celor din cadrul Universităţii Politehnica Bucureşti. Rezultatele sunt prezentate succint şi, în general, fără demonstraţii. Lucrarea este structurată în trei capitole, fiecare având mai multe secţiuni care se termină cu o listă de exerciţii, care au rezolvări sau indicaţii la finalul cărţii. De asemenea, fiecare capitol este urmat de o listă de exerciţii recapitulative.

În capitolul 1 sunt prezentate bazele calculului diferenţial în $\mathbb{R}$ şi $\mathbb{R}^n$. Primele secţiuni $1.1 - 1.6$ recapitulează rezultatele fundamentale de analiză din clasa a 11-a (profil M1). Urmează, în ordine, serii numerice 1.7, şiruri de funcţii 1.8, serii de funcţii 1.9, serii de puteri 1.10, structuri in $\mathbb{R}^n$ 1.11, teorema lui Banach de punct fix 1.12, derivate parţiale 1.13, extreme locale 1.14.

În capitolui 2 sunt prezentate bazele calculului integral în $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$. În secţiunile 2.1 şi 2.2 sunt recapitulate rezultatele fundamentale de analiză din clasa a 12-a (profil M1). Urmează, în ordine, integrale improprii 2.3, integrale cu parametri 2.4, integrale curbilinii 2.5, integrale duble 2.6, integrale de suprafaţă 2.7, integrale triple 2.8, formule integrale 2.9.

În capitolul 3 sunt prezentate rezultate fundamentale de analiză pentru funcţii de o variabilă complexă şi aplicaţii în teoria transformărilor integrale. În seţiunea 3.1 sunt reamintite noţiunile din liceu privind numerele complexe. Urmează, în ordine, şiruri şi serii de numere complexe 3.2, funcţii olomorfe 3.3, serii de puteri şi serii Laurent 3.4, integrale complexe şi teorema reziduurilor 3.5, serii Fourier 3.6, transformata Fourier 3.7, transformata Laplace 3.8, transformata Z 3.9.

Pentru o întelegere mai aprofundată a noţiunilor de analiză matematică, este necesară o pregătire teoretică suplimentară. Pentru aceasta, se pot consulta lucrările prezentate în bibliografie: Pentru recapitulare de liceu, vezi [2], [6], [11], [12], [13] şi [21]. Pentru calcul diferenţial şi integral real, vezi [9], [10], [14], [16] şi [18]. Pentru analiză complexă şi transformări integrale, vezi [1], [3], [4], [5], [7], [8], [17], [19] şi [20].

Capitolul 1

Calcul diferenţial

1.1 Logică matematică. Mulţimi. Relaţii.

Definiţia 1.1.1. *(1) O* propoziţie *este enunţ care poate fi adevărat sau fals. Propoziţiile se notează cu litere p, q, r; la fel şi valoarea lor de adevăr. De exemplu: $p =$ ”$2 + 2 = 4$”, q=”Omul este un mamifer”, r=”$3 > 5$”. p, q sunt adevărate iar r este falsă.*

(2) Operatorii logici *sunt: $\bar{\ }$ (negaţia), $\wedge$ (conjuncţia), $\vee$ (disjuncţia), $\rightarrow$ (implicaţia), $\leftrightarrow$ (echivalenţa).*

(3) Dacă p e o propoziţie, atunci $\bar{p}$ este adevărată dacă şi numai dacă p este falsă.

(4) Fie p şi q două propoziţii. $p \wedge q$ este adevărată dacă şi numai dacă p şi q sunt adevărate.

(5) $p \vee q$ e adevărată dacă şi numai dacă p este adevărată sau q este adevărată.

(6) Implicaţia *e definită ca $p \rightarrow q := \bar{p} \vee q$.*

(7) Echivalenţa *e definită prin $p \leftrightarrow q := (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.*

p	q	$\bar{p}$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Definiţia 1.1.2. *Un* predicat *este o propoziţie care depinde de unul sau mai mulţi parametri. De exemplu, enunţul* $P(n) =$ ”$5|n$” *este un predicat.* $P(10)$ *este adevărată, dar* $P(7)$ *este falsă.*

Definiţia 1.1.3. Cuantificatorii universali *sunt: ”există”* $(\exists)$ *şi ”oricare”* $(\forall)$.

(1) $(\exists)n, P(n)$ *se citeşte: există n pentru care* $P(n)$ *e o propoziţie adevărată.*

(2) $(\exists!)n, P(n)$ *se citeşte: există un unic n pentru care* $P(n)$ *este o propoziţie adevărată.*

(3) $(\forall)n, P(n)$ *se citeşte: pentru orice n,* $P(n)$ *este o propoziţie adevărată.*

Observaţia 1.1.4. $\overline{((\exists n), P(n))} = (\forall)n, (\overline{P(n)})$, $\overline{((\forall n), P(n))} = (\exists)n, (\overline{P(n)})$.

Mulţimi

Noţiunile fundamentale dintr-o *teorie axiomatică a mulţimilor*, de exemplu Zermelo-Fraenkel, sunt cele de de *clasă* şi de *relaţie de apartenenţă* ” $\in$ ”.

$x \in A$ înseamnă: x este un element al clasei A.

Definiţia 1.1.5. *O clasă* M *se numeşte* mulţime *dacă există o clasă* A *cu* $M \in A$. *O mulţime poate fi dată enumerându-i elementele, de exemplu,* $M = \{a, b, c, d\}$ *sau precizând o proprietate,* $M = \{x|P(x)\}$, *unde* P *este un predicat. Mulţimea vidă, notată* $\emptyset$, *nu conţine nici un element.*

Observaţia 1.1.6. Nu orice clasă e o mulţime! De exemplu, fie U clasa tuturor mulţimilor M cu proprietatea că $M \notin M$. Atunci U nu este o mulţime. Într-adevăr, să presupunem prin absurd că U este o mulţime. Dacă $U \in U$, atunci, conform definiţiei lui U, ar rezulta că $U \notin U$, o contradiţie. Tot o contradicţie obţinem şi dacă presupunem că $U \notin U$.

Definiţia 1.1.7. *Fie* A *şi* B *două mulţimi. Se definesc:*

(1) Reuniunea*:* $A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$.

(2) Intersecţia*:* $A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ şi } x \in B\}$.

(3) Diferenţa*:* $A \setminus B := \{x \mid x \in A,\ x \notin B\}$.

(4) Diferenţa simetrică*:* $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

(5) Produsul cartezian*:* $A \times B := \{(x, y) \mid x \in A,\ y \in B\}$.

(6) A *e o* submulţime *a lui* B*, scriem* $A \subset B$*, dacă* $(\forall)x \in A \Rightarrow x \in B$.

(7) Axioma egalităţii mulţimilor*:* $A = B$ *dacă şi numai dacă* $A \subset B$ *şi* $B \subset A$.

(8) Dacă $A \subset B$, complementara *lui* A *în* B *este mulţimea* $C_B(A) := B \setminus A$.

Relaţii

Definiţia 1.1.8. *Fie A şi B două mulţimi (nevide).*

(1) Se numeşte relaţie *între A şi B, orice submulţime $\mathcal{R} \subset A \times B$. Dacă $x \in A$ şi $y \in B$, spunem că x e în relaţie cu y şi notăm $x\mathcal{R}y$, dacă $(x, y) \in \mathcal{R}$.*

(2) Dacă $A = B$, o relaţie $\mathcal{R} \subset A \times A$ se numeşte relaţie binară *pe A.*

(3) O relaţie "$\sim$" e o relaţie de echivalenţă *pe A dacă $(\forall)x, y, z \in A$ avem:*

1) $x \sim x$ (reflexivitate),

2) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ (simetrie),

3) $x \sim y$ şi $y \sim z \Rightarrow x \sim z$ (tranzitivitate).

(4) O relaţie "$\leq$" este o relaţie de ordine *pe A dacă $(\forall)x, y, z \in A$ avem:*

1) $x \leq x$ (reflexivitate),

2) $x \leq y$ şi $y \leq x \Rightarrow x = y$ (antisimetrie),

3) $x \leq y$ şi $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (tranzitivitate).

Dacă, în plus, 4) $(\forall)x, y \in A \Rightarrow x \leq y$ sau $y \leq x$, relaţia "$\leq$" se numeşte relaţie de ordine totală.

Exemplul 1.1.9. (1) Relaţia uzuală $\leq$ pe $\mathbb{R}$ este o relaţie de ordine totală.

(2) Dacă $X \neq \emptyset$ e o mulţime nevidă, relaţie de incluziune $\subseteq$ este o relaţie de ordine (parţială) pe $\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subset X\}$.

(3) Relaţia de congruenţă modulo n pe $\mathbb{Z}$, $a \equiv_n b \Leftrightarrow n|(b-a)$, este o relaţie de echivalenţă.

Definiţia 1.1.10. *Fie A o mulţime nevidă şi $\sim$ o relaţie de echivalenţă pe A. Pentru $x \in A$,* clasa *lui x este $\widehat{x} = \{y \in A \mid x \sim y\}$.*

Mulţimea cât este $\frac{A}{\sim} := \{\widehat{x} \mid x \in A\}$.

Propoziţia 1.1.11. *Fie A o mulţime nevidă şi $\sim$ o relaţie de echivalenţă pe A. Atunci:*

(1) $x \sim y \Leftrightarrow \widehat{x} = \widehat{y}$.

(2) $x \nsim y \Leftrightarrow \widehat{x} \cap \widehat{y} = \emptyset$.

(3) $A = \bigcup_{x \in A} \widehat{x}$ este o reuniune disjunctă.

Exemplul 1.1.12. Fie $n \geq 2$. Atunci $\mathbb{Z}/\equiv_n = \mathbb{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, \ldots, \widehat{n-1}\}$ e mulţimea claselor de resturi modulo n.

Mulţimi de numere

Definiţia 1.1.13. *Mulţimea numerelor naturale* $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ *este definită, în mod axiomatic, prin următoarele proprietăţi:*

1) $0 \in \mathbb{N}$,

2) Dacă $n \in \mathbb{N}$, *atunci* $n + 1 \in \mathbb{N}$,

3) Dacă $A \subset N$ *şi* A *verifică 1) şi 2), atunci* $A = \mathbb{N}$.

Propoziţia 1.1.14. *Pe* $\mathbb{N}$ *avem două operaţii* $+$ *(adunare) şi* $\cdot$ *(înmulţire) care verifică următoarele proprietăţi:*

(1) Asociativitate: $(a + b) + c = a + (b + c)$, $(\forall)a, b, c \in \mathbb{N}$.

(2) Element neutru: $a + 0 = 0 + a = a$, $(\forall)a \in \mathbb{N}$.

(3) Comutativitate: $a + b = b + a$, $(\forall)a, b \in \mathbb{N}$.

(4) Asociativitate: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, $(\forall)a, b, c \in \mathbb{N}$.

(5) Element neutru: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, $(\forall)a \in \mathbb{N}$.

(6) Comutativitare: $a \cdot b = b \cdot a$, $(\forall)a, b \in \mathbb{N}$.

(7) Distributivitate: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, $(\forall)a, b, c \in \mathbb{N}$.

Propoziţia 1.1.15. *Mulţimea* $\mathbb{N}$ *este total ordonată* $0 < 1 < 2 < 3 < \cdots$ *şi, în plus, avem:*

(1) $a \leq b \Leftrightarrow a + c \leq b + c$, $(\forall)a, b, c \in \mathbb{N}$.

(2) $a \leq b \Leftrightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$, $(\forall)a, b, c \in \mathbb{N}$, $c \geq 1$.

Definiţia 1.1.16. *Mulţimea numerelor întregi e* $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$, *unde, pentru* $n \geq 1$, $-n$ *se numeşte opusul lui* n.

Propoziţia 1.1.17. *Operaţiile* $+$ *şi* $\cdot$ *se extind pe* $\mathbb{Z}$ *şi verifică toate proprietăţile din* $(\mathbb{N}, +, \cdot)$. *În plus, orice element* $n \in \mathbb{Z}$ *are opusul* $(-n) \in \mathbb{Z}$, *adică* $(-n) + n = n + (-n) = 0$. *Cu alte cuvinte,* $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *este un inel comutativ unitar.*

Mulţimea $\mathbb{Z}$ *este total ordonată cu* $\cdots < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < \cdots$, *iar relaţia de ordine* $\leq$ *este compatibilă cu* $+$ *şi* $\cdot$*:*

(1) $a \leq b \Leftrightarrow a + c \leq b + c$.

(2) Dacă $c \geq 0$ *şi* $a \leq b$, *atunci* $ac \leq bc$.

(3) Dacă $c \leq 0$ *şi* $a \leq b$, *atunci* $ac \geq bc$.

Definiţia 1.1.18. *Mulţimea numerelor raţionale e* $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$. *Avem că* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$. *Pe* $\mathbb{Q}$ *se definesc adunarea şi înmulţirea astfel:*

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \ \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Un număr întreg n *se identifică prin fracţia* $\frac{n}{1}$, *deci* $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Pentru $a, b \geq 0$, $c, d \geq 0$, *spunem că* $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ *dacă* $ad \leq bc$.

Propoziţia 1.1.19. *Adunarea şi înmulţirea numerelor raţionale are aceleaşi proprietăţi ca în* $\mathbb{Z}$. *În plus, pentru orice* $q = \frac{a}{b} \neq 0$, *există* $q^{-1} = \frac{b}{a}$ *astfel încât* $qq^{-1} = q^{-q}q = 1$. *Cu alte cuvinte,* $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ *este un corp comutativ.*

$(\mathbb{Q}, \leq)$ *este o mulţime total ordonată. Relaţia* $\leq$ *este compatibilă cu* $+$ *şi* $\cdot$, *deci verifică proprietăţile lui* $(\mathbb{Z}, \leq)$.

Construcţia mulţimii numerelor reale

Definirea riguroasă a mulţimii numerelor reale presupune utilizarea noţiunii de şir fundamental, vezi secţiunea 2.1. În ce urmează, vom da o descriere intuitivă a numerelor reale.

Un număr real x este reprezentat printr-o scriere zecimală infinită:

$$x = \pm a_1 a_2 \cdots a_m, b_1 b_2 b_3 \cdots ,$$

unde $m \geq 1$ şi $a_i, b_i \in \{0, \ldots, 9\}$.

Propoziţia 1.1.20. $q \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow q$ *are o scriere zecimală finită sau infinită periodică. Prin urmare* $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. *De exemplu* $\frac{7}{2} = 3,5 = 3,4999\cdots = 3,4(9)$, $\frac{1}{3} = 0,333\cdots = 0,(3)$, $12,3(14) = \frac{12314-14}{990}$.

Propoziţia 1.1.21. *Orice număr real poate fi aproximat printr-un şir de numere raţionale*

$$x_n = \pm a_1 a_2 \cdots a_m, b_1 b_2 \cdots b_n, \ n \geq 1.$$

Şirul $(x_n)_n$ *se numeşte şirul aproximărilor zecimale (prin lipsă) ale lui* x.

Acest lucru permite definirea $+$ *şi* $\cdot$ *pe* $\mathbb{R}$, *în sensul că* $x + y$ *este aproximat prin şirul* $x_n + y_n$, *iar* $x \cdot y$ *este aproximat prin şirul* $x_n y_n$.

Dacă un număr raţional are o scriere zecimală finită se poate scrie sub forma zecimală infinită cu (9) la sfârsit. De exemplu $1,2 = 1,1(9)$. Alegând această convenţie, scrierea zecimală este unică.

Definiţia 1.1.22. *Fie* $A \subset \mathbb{R}$. A *se numeşte* mărginită, *dacă există* $a < b \in \mathbb{R}$ *cu proprietatea că* $a \leq x \leq b$, $(\forall)x \in A$. a *se numeşte* minorant *pentru* A; b *se numeşte* majorant *pentru* A.

Definiţia 1.1.23. *Fie $x, y \in \mathbb{R}$ cu şirurile aproximărilor zecimale $(x_n)_n$, respectiv $(y_n)_n$. Spunem că $x \leq y$, dacă $x_n \leq y_n$, $(\forall)n$.*

Propoziţia 1.1.24. *$(R, \leq)$ este o mulţime total ordonată şi relaţia de ordine $\leq$ este compatibilă cu $+$ şi $\cdot$.*

Mai mult, $(\mathbb{R}, \leq)$ este o mulţime complet ordonată: Orice submulţime mărginită $A \subset \mathbb{R}$ admite un cel mai mic majorant, notat $\sup(A)$.

Din punct de vedere geometric, $\mathbb{R}$ se reprezintă printr-o dreaptă orientată.

Observaţia 1.1.25. $(\mathbb{Q}, \leq)$ nu este o mulţime complet ordonată! De exemplu, dacă $(x_n)_n$ este şirul aproximărilor zecimale pentru $\sqrt{2}$, atunci mulţimea $A = \{x_1, x_2, \ldots\}$ nu are un cel mai mic majorant în $\mathbb{Q}$, deoarece $\sup(A) = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Teoremă 1.1.26. *$\mathbb{R}$ este unic definit prin faptul că este un corp complet ordonat, adică:*

(a) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ este un corp comutativ.
(b) $(\mathbb{R}, \leq)$ este o relaţie de ordine totală compatibilă cu $+$ şi $\cdot$.
(c) $(\mathbb{R}, \leq)$ este o mulţime complet ordonată.

Definiţia 1.1.27. *Fie $x \in \mathbb{R}$.* Modulul *lui x este numărul* $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$.

Propoziţia 1.1.28. *Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, avem:*

1. $|x| \geq 0$, $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. $|xy| = |x||y|$.
3. $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Definiţia 1.1.29. *Fie $x \in \mathbb{R}$.* Partea întreagă *a lui x, notată $[x]$, este cel mai mare număr întreg $\leq x$.* Partea fracţionară *a lui x este $\{x\} := x - [x]$.*

De exemplu: $[1,8] = 1$, $\{1,8\} = 0,8$, $[-1,2] = -2$, $\{-1,2\} = 0,8$.

Propoziţia 1.1.30. *Fie $x \in \mathbb{R}$. Atunci:*

(1) $[x] \leq x < [x] + 1$.

(2) $x - 1 < [x] \leq x$.

(3) $[x + k] = [x] + k$, $(\forall)k \in \mathbb{Z}$.

(4) $0 \leq \{x\} < 1$.

(5) $\{x + k\} = \{x\}$, $(\forall)k \in \mathbb{Z}$.

Formule de calcul prescurtat

1. $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.
2. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$.
3. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$.
4. $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1})$.
5. $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$.
6. $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, $(a-b)^3 = a^3-3a^3b+3ab^2-b^3$.
7. $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.
8. $(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2 = a_1^2+\cdots+a_n^2+2a_1a_2+\cdots+2a_{n-1}a_n$.
9. $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k}b^k$ (binomul lui Newton)

Mulţimea numerelor complexe

Definiţia 1.1.31. *(1)* Mulţimea numerelor complexe *este*

$$\mathbb{C} := \{z = x+yi \mid x,y \in \mathbb{R}\}, \ \textit{unde } z = x+yi \equiv (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Prin urmare, din punct de vedere geometric, $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$ *este un plan.*
(2) Pentru $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$ *definim:*

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &:= (x_1+y_1) + (x_2+y_2)i, \\ z_1 \cdot z_2 &:= (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i. \end{aligned}$$

(3) Modulul *unui număr complex* z *este* $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$.

(4) Conjugatul *lui* z *este* $\bar{z} = x - yi$.

(5) Partea reală *este* $\mathrm{Re}(z) = x$.

(6) Partea imaginară *este* $\mathrm{Im}(z) = y$.

De reţinut: $i^2 = -1$.

Propoziţia 1.1.32. *(Proprietăţi algebrice)*

(1) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *este un corp comutativ, care conţine* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *ca subcorp.*

(2) Opusul lui $z = x + yi$ *este* $-z = (-x) + (-y)i = -x - yi$.

(3) $z + \bar{z} = 2Re(z)$, $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

(4) Dacă $z \neq 0$, inversul său este $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

(5) Modulul are proprietăţi similare cu cele ale modulului numerelor reale.

Teoremă 1.1.33. *(Teorema fundamentală a algebrei) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ este un corp* algebric închis*, adică: orice ecuaţie polinomială $a_n z^n + \cdots + a_1 z_1 + a_0 = 0$, cu $a_i \in \mathbb{C}$, $n \geq 1$, $a_n \neq 0$, are cel puţin o soluţie în $\mathbb{C}$.*

Exerciţii

1. Fie p, q, r trei propoziţii. Determinaţi tabelul de adevăr pentru propoziţiile:

   a) $p \wedge (q \vee r)$.

   b) $((p \vee q) \wedge \bar{q}) \rightarrow r$.

2. Determinaţi negaţia predicatului: $(\forall)x, (\exists)y, P(x, y) \rightarrow Q(x, y)$.

3. Considerăm relaţia $\sim$ pe $\mathbb{R}$, definită prin: $x \sim y \Leftrightarrow \cos x = \cos y$. Arătaţi că $\sim$ este o relaţie de echivalenţă. Determinaţi $\widehat{\frac{\pi}{3}}$.

4. Considerăm relaţia $\sim$ pe $\mathbb{C}$, definită prin: $z \sim w \Leftrightarrow z^3 = w^3$. Arătaţi că $\sim$ este o relaţie de echivalenţă. Determinaţi $\widehat{1+i}$.

5. Fie $X \neq \emptyset$ şi $\mathcal{P}(X)$ mulţimea părţilor lui X. Arătaţi că $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cap)$ are structură de inel comutativ unitar.

6. Rezolvaţi ecuaţia: $|2x - 4| + |x + 3| = 14$.

7. Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Arătaţi că $\{a\} + \{b\} = 1$ dacă şi numai dacă $a + b \in \mathbb{Z}$ şi $a, b \notin \mathbb{Z}$.

8. Determinaţi mulţimile: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \left|\frac{3x-5}{2}\right| \leq 4\}$ şi $B = A \cap \mathbb{Z}$.

9. Rezolvaţi ecuaţiile:

   a) $z^2 + 2 = 0$.

   b) $z^3 - 8 = 0$.

   c) $z^4 + 3z^2 + 2 = 0$.

10. a) Calculaţi $(1 + i)^n$, unde $n \geq 1$, folosind binomul lui Newton.

    b) Calculaţi $S_1 = C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \cdots$ şi $S_2 = C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \cdots$.

1.2 Funcţii.

Definiţia 1.2.1. *Fie A şi B două mulţimi. O relaţie $F \subset A \times B$ se numeşte* funcţională*, dacă pentru orice $x \in A$, există un unic $y \in B$ cu $(x, y) \in F$. Tripletul $f := (A, B, F)$ se numeşte* funcţie*. A se numeşte* domeniul *lui f iar B se numeşte* codomeniul *lui f. Vom scrie de asemenea $f : A \to B$, şi $f(x) = y$ pentru $(x, y) \in F$.*

Graficul *lui f este $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} = F$. O funcţie poate fi definită sintetic (precizându-i toate valorile), sau analitic (printr-o expresie).*

Definiţia 1.2.2. *Fie $f : A \to B$ o funcţie.*

(1) f se numeşte injectivă*, dacă $(\forall)x_1 \neq x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.*

(2) f se numeşte surjectivă*, dacă $B = Im(f) = \{f(x) \mid x \in A\}$.*

(3) f se numeşte bijectivă *dacă este injectivă şi surjectivă.*

(4) Dacă $X \subset A$, $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ este imaginea *lui X prin f.*

(5) Dacă $Y \subset B$, $f^{-1}(Y) = \{x \in A \mid f(x) \in Y\}$ este preimaginea *lui Y prin f.*

Definiţia 1.2.3. *Fie $f : A \to B, g : B \to C$.* Compunerea *lui g cu f este funcţia*

$$g \circ f : A \to C, \ (g \circ f)(x) := g(f(x)).$$

Funcţia $1_A : A \to A$, $1_A(x) = x$, $(\forall)x \in A$ se numeşte funcţia identică *a lui A.*

Propoziţia 1.2.4. *Dacă $f : A \to B, g : B \to C$ şi $h : C \to D$, atunci $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.*

De asemenea, $f \circ 1_A = 1_B \circ f = f$. În general, $g \circ f \neq f \circ g$ (când au sens ambele compuneri)!

Propoziţia 1.2.5. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(1) f este injectivă.

(2) $(\forall)x_1, x_2 \in A$, dacă $f(x_1) = f(x_2)$ atunci $x_1 = x_2$.

(3) Pentru $y \in B$, ecuaţia $f(x) = y$ are cel mult o soluţie în A.

(4) $(\forall)u, v : X \to A$ a.î. $f \circ u = f \circ v$, rezultă $u = v$.

(5) $(\exists)g : B \to A$ a.î. $g \circ f = 1_A$. (g nu e unică în general)

Propoziţia 1.2.6. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(1) f *este surjectivă.*

(2) $\mathrm{Im}(f) = f(A) = B$.

(3) Pentru $y \in B$, *ecuaţia* $f(x) = y$ *are cel puţin o soluţie în* A.

(4) $(\forall) u, v : B \to X$ *a.î.* $u \circ f = v \circ f$, *rezultă* $u = v$.

(5) $(\exists) g : B \to A$ *a.î.* $f \circ g = 1_B$. *(g nu e unică în general)*

Propoziţia 1.2.7. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(1) f *este bijectivă.*

(2) Pentru $y \in B$, *ecuaţia* $f(x) = y$ *are o unică soluţie în* A.

(3) f *este* inversabilă, *adică există* $f^{-1} : B \to A$ *astfel încât* $f^{-1} \circ f = 1_A$ *şi* $f \circ f^{-1} = 1_B$. f^{-1} *e unic determinată şi se numeşte inversa lui* f*; dacă* $f(x) = y$ *atunci* $f^{-1}(y) = x$.

Funcţii $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Definiţia 1.2.8. *Fie* $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(1) f *se numeşte* mărginită inferior, *dacă există* $a \in \mathbb{R}$ *cu* $a \leq f(x)$, $(\forall) x \in D$.

(2) f *se numeşte* mărginită superior, *dacă există* $b \in \mathbb{R}$ *cu* $f(x) \leq b$, $(\forall) x \in D$.

(3) f *se numeşte* mărginită, *dacă e mărginită superior şi inferior.*

Observaţia 1.2.9. $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este mărginită $\Leftrightarrow (\exists) M > 0$ cu $|f(x)| < M$, $(\forall) x \in D$.

Definiţia 1.2.10. *Fie* $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(1) f *se numeşte* crescătoare , *dacă* $(\forall) x < y \in D \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

(2) f *se numeşte* strict crescătoare , *dacă* $(\forall) x < y \in D \Rightarrow f(x) < f(y)$.

(3) f *se numeşte* descrescătoare , *dacă* $(\forall) x < y \in D \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.

(4) f *se numeşte* strict descrescătoare , *dacă* $(\forall) x < y \in D \Rightarrow f(x) > f(y)$.

(5) f *se numeşte* (strict) monotonă, *dacă e (strict) crescătoare sau (strict) descrescătoare.*

Propoziţia 1.2.11. *Dacă $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este strict monotonă, atunci f este injectivă.*

Definiţia 1.2.12. *Fie $D \subset \mathbb{R}$ un domeniu simetric, i.e. $x \in D \Rightarrow -x \in D$. Fie $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

(1) f se numeşte pară, *dacă $f(-x) = f(x)$, $(\forall)x \in D$.*

(2) f se numeşte impară, *dacă $f(-x) = -f(x)$, $(\forall)x \in D$.*

Propoziţia 1.2.13. *Fie $D \subset \mathbb{R}$ un domeniu simetric şi $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

(1) Dacă f este pară, atunci G_f este simetric faţă de axa OY.

(2) Dacă f este impară, atunci G_f este simetric faţă de punctul O.

Propoziţia 1.2.14. *Fie $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

(1) G_f este simetric faţă de $x = a \Leftrightarrow f(a - x) = f(x - a), (\forall)x \in D$. Observaţie, $g(x) = f(x - a)$ este pară.

(2) G_f este simetric faţă de punctul (a, b) dacă $f(a-x) = b-f(x-a), (\forall)x \in D$.

Definiţia 1.2.15. *O funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numeşte* periodică *dacă există un $T \neq 0$ cu proprietatea că*

$$f(x + T) = f(x),\ (\forall)x \in \mathbb{R}.$$

Un astfel de T se numeşte perioadă *a lui f.*

Dacă există un cel mai mic $T_0 > 0$ cu proprietatea că T_0 este o perioadă, atunci T_0 se numeşte perioadă principală. *În acest caz, perioadele lui f sunt de forma kT_0, unde $k \in \mathbb{Z}$.*

Exemplul 1.2.16. (1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \{x\}$ este periodică, cu perioada principală $T_0 = 1$.

(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ este periodică, iar orice număr raţional $T \in \mathbb{Q}$ este o perioadă pentru f. Prin urmare, f nu are perioadă principală.

(3) Funcţiile trigonometrice directe $\sin, \cos, \mathrm{tg}, \mathrm{ctg}$ sunt periodice. $\sin, \cos$ au perioada principală 2π iar $\mathrm{tg}, \mathrm{ctg}$ au perioada principală π. Vezi secţiunea 2.7, pagina 69.

Exerciţii

1. Fie $f : X \to Y$ o funcţie, $A, B \subset X$ şi $C, D \subset Y$. Arătaţi că:

   a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B),\ f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$,

   b) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D),\ f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 3x + 2$. Determinaţi $E = \text{Im}(f)$ şi $D \subset \mathbb{R}$ astfel încât $f|_D : D \to E$ este bijectivă.

3. Să se arate că funcţia $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(m, n) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + m$, este bijectivă.

4. Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x + 1,\ g(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 1 \\ 2x + 1, & x < 1 \end{cases}$. Arătaţi că funcţiile f şi g sunt bijective şi calculaţi f^{-1}, g^{-1}. Determinaţi $f \circ g$ şi $g \circ f$.

5. Găsiţi o funcţie bijectivă $f : [0, 1] \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

6. Care este perioada principală a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \{2x\} + \{3x\}$?

7. Studiaţi paritatea funcţiilor $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite prin:

   $f(x) = \text{arctg}\, x + x^3,\ g(x) = \sin^2 x + \cos(2x)$ şi $h(x) = \cos x - 2 \sin x$.

1.3 Mulţimi finite, numărabile şi nenumărabile

Definiţia 1.3.1. *Două mulţimi A şi B se numesc* echipotente*, dacă există o funcţie bijectivă $f : A \to B$. Scriem $A \sim B$. Este uşor de verificat că $\sim$ este o relaţie de echivalenţă. Se numeşte* cardinalul *lui A, clasa de echivalenţă a mulţimii A, prin urmare $|A| = |B| \Leftrightarrow A \sim B$.*

Spunem că $|A| \leq |B|$, dacă există $f : A \to B$ injectivă. Echivalent, $|A| \geq |B|$ dacă există $f : A \to B$ surjectivă. Relaţia $\leq$ este o relaţie de ordine totală.

O mulţime A se numeşte finită*, dacă există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $A \sim \{1, 2, \ldots, n\}$. Dacă A este o mulţime finită, spunem că $|A| = n =$ numărul de elemente ale lui A.*

O mulţime este infinită dacă nu este finită.

Propoziţia 1.3.2. *O mulţime A este infinită dacă şi numai dacă are o submulţime strictă $B \subsetneq A$ cu $B \sim A$.*

Propoziţia 1.3.3. *Fie A, B, X trei mulţimi finite. Atunci:*

(1) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

(2) $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

(3) Dacă $A \subset X$, atunci $|X| = |A| + |X \setminus A|$.

Definiţia 1.3.4. *O mulţime infinită A se numeşte* numărabilă*, dacă $|A| = |\mathbb{N}| =: \aleph_0$; echivalent, dacă există o funcţie bijectivă $f : \mathbb{N} \to A$, deci $A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$.*

O mulţime infinită A se numeşte nenumărabilă*, dacă nu e numărabilă.*

Propoziţia 1.3.5. *(Listă de proprietăţi)*

(1) Dacă A este infinită, atunci A este cel puţin numărabilă, adică $|A| \geq \aleph_0$.

(2) Dacă A, B sunt numărabile, atunci $A \times B, A \cup B$ sunt numărabile.

(3) $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_+$ sunt mulţimi numărabile.

(4) Dacă $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sunt numărabile, atunci $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ e numărabilă.

(5) Fie $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subset A\}$. Atunci $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.

(6) $\mathcal{P}(A) \sim \{f : A \to \{0, 1\}\} =: 2^A$, bijecţia fiind dată de $X \mapsto \chi_X$, $\chi_X(a) = \begin{cases} 1, & a \in X \\ 0, & a \notin X \end{cases}$. χ_X se numeşte funcţia caracteristică *a submulţimii X.*

(7) *Dacă A e numărabilă şi F e finită cu $|F| \geq 2$, atunci $\{f : A \to F\}$ e nenumărabilă.*

(8) $[0,1]$ *este nenumărabilă (un număr real $x \in [0,1]$ are o scriere zecimală infinită, care poate fi identificată cu un şir cu elemente din $\{0,1,\dots,9\}$).*

(9) $\mathbb{R}$ *este nenumărabilă. Mai mult, $|\mathbb{R}| = |2^{\mathbb{N}}| =: c$. Ipoteza continuumului: Pentru orice mulţime $\mathbb{N} \subset X \subset \mathbb{R}$, avem $|X| = |\mathbb{N}|$ sau $|X| = |\mathbb{R}|$. Această afirmaţie nu poate fi decisă în sistemul axiomatic standard al teoriei mulţimilor (Zermelo-Fraenkel).*

(10) *Fie $\overline{\mathbb{Q}} = \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \alpha$ e rădăcina unui polinom cu coeficienţi întregi $\}$. Un număr $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ se numeşte* algebric. *Un număr $\alpha \notin \overline{\mathbb{Q}}$ se numeşte* transcendent. *De exemplu $\sqrt{2}, i \in \overline{\mathbb{Q}}$, dar $\pi, e \notin \overline{\mathbb{Q}}$. Atunci $\overline{\mathbb{Q}}$ este numărabilă.*

(11) $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \sim \mathbb{R}$. $\mathbb{R}^n \sim \mathbb{R}$. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \sim \mathbb{R}$.

Exerciţii

1. Stabiliţi care dintre următoarele mulţimi sunt finite, numărabile, respectiv nenumărabile:

   a) $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid 2|n,\ 5 \nmid n\}$.

   b) $B = \{\frac{n+\sqrt{n^2+1}}{2} \mid n \in \mathbb{Q}\}$.

   c) $C = \{it \mid t \in \mathbb{R}^*\}$.

   d) $D = \{z \in \mathbb{C} \mid z^{10} = 1\}$.

   e) $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

   f) $F = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x = \frac{1}{2}\}$.

   g) $G = \{x \in [0,2\pi] \mid \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}\}$.

   h) $H = \{x \in \mathbb{R} \mid (\exists)t \in \mathbb{Q},\ x = \ln t\}$.

   i) $I = \{x \in \mathbb{R} \mid (\exists)t \in \mathbb{Q},\ x^2 = t\}$.

   j) $J = \{(a_1, a_2, a_3, \dots) \mid a_i \in \{0,1,2\}, i \in \mathbb{N}\}$.

   k) $K = \{f \mid f : \{0,1\} \to \mathbb{N}\}$.

   l) $L = \{g \mid g : \mathbb{N} \to \{0,1\}\}$.

2. Găsiţi funcţii bijective $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ şi $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$.

   (Indicaţie: Exerciţiul 3, pagina 20)

1.4 Şiruri de numere reale

Elemente de topologie pe $\mathbb{R}$.

Definiţia 1.4.1. *Fie $x_0 \in \mathbb{R}$. O mulţime V se numeşte* vecinătate *a lui x_0, dacă există $a < b \in \mathbb{R}$ astfel încăt $x_0 \in (a, b) \subset V$.*

O mulţime V se numeşte vecinătate *a lui $+\infty$, dacă există $M > 0$ astfel încât $(M, \infty) \subset V$. Similar se definesc vecinătăţile lui $-\infty$.*

Definiţia 1.4.2. *Fie $A \subset \mathbb{R}$.*

(1) $x \in A$ se numeşte punct interior *al mulţimii A, dacă există V o vecinătate a lui x cu $V \subset A$. Notăm $\mathring{A}$ = mulţimea punctelor interioare ale lui A. $\mathring{A}$ se numeşte* interiorul *lui A.*

(2) $x \in \mathbb{R}$ se numeşte punct aderent *al mulţimii A, dacă există V o vecinătate a lui x cu $V \cap A \neq \emptyset$. Notăm $\overline{A}$ = mulţimea punctelor aderente ale lui A. $\overline{A}$ se numeşte* închiderea *lui A.*

(3) Frontiera *lui A este mulţimea $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.*

(4) $x \in \mathbb{R}$ se numeşte punct de acumulare *al mulţimii A, dacă există V o vecinătate a lui x cu $V \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. Notăm A' = mulţimea punctelor de acumulare ale lui A.*

(5) $x \in A$ se numeşte punct izolat*, dacă există V o vecinătate pentru x cu $V \cap A = \{x\}$. Notăm $\mathrm{Iz}(A)$ = mulţimea punctelor izolate.*

Propoziţia 1.4.3. *Fie $A \subset \mathbb{R}$.*

(1) $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$.

(2) $A' = \overline{A} \setminus \mathrm{Iz}(A)$.

Definiţia 1.4.4. *O mulţimea $D \subset \mathbb{R}$ se numeşte deschisă, dacă $\mathring{D} = D$. O mulţime $F \subset \mathbb{R}$ se numeşte închisă, dacă $F = \overline{F}$.*

Propoziţia 1.4.5. *(1) a) $\emptyset, \mathbb{R}$ sunt mulţimi deschise. b) Dacă D_1, D_2 sunt deschise, atunci $D_1 \cap D_2$ e deschisă. c) Dacă $(D_i)_i$ e o familie de mulţimi deschise, atunci $\bigcup_i D_i$ este deschisă. Fie $\tau = \{D \subset \mathbb{R} \mid D$ deschisă $\}$. Spunem că $(\mathbb{R}, \tau)$ este un spaţiu topologic.*

(2) D este deschisă $\Leftrightarrow \mathbb{R} \setminus D$ este închisă (şi reciproc). Prin urmare: a)$\emptyset, \mathbb{R}$ sunt mulţimi închise. b) Dacă F_1, F_2 sunt închise, atunci $F_1 \cup F_2$ e închisă. c) Dacă $(F_i)_i$ e o familie de mulţimi închise, atunci $\bigcap_i F_i$ este închisă.

(3) *Intervalele deschise sunt mulţimi deschise. Intervalele închise sunt mulţimi închise. Orice mulţime deschisă este de fapt o reuniune (cel mult numărabilă) de intervale deschise disjuncte.*

Definiţia 1.4.6. *(1) $A \subset \mathbb{R}$ se numeşte mărginită, dacă există $a < b \in \mathbb{R}$ cu $A \subset (a, b)$.*

(2) $K \subset \mathbb{R}$ se numeşte compactă, *dacă este închisă şi mărginită. (Un interval închis $[a, b]$ cu $a < b \in \mathbb{R}$ este compact)*

Şiruri de numere reale

Definiţia 1.4.7. *Un* şir de numere reale *$(x_n)_n$ este o funcţie $x : \mathbb{N}_{\geq n_0} \to \mathbb{R}$, $x(n) := x_n$, $n_0 \in \mathbb{N}$. Un şir poate fi definit printr-o formulă explicită, de exemplu: $x_n := \frac{n}{n+1}$, $n \geq 0$ sau printr-o relaţie de recurenţă, de exemplu: $x_{n_0} \in \mathbb{R}$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \geq n_0$, unde $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie.*

Un subşir *al unui şir $(x_n)_n$, este un şir de forma $(x_{f(n)})_n$ unde $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ este strict crescătoare. De exemplu $(x_{2n})_n = x_2, x_4, x_6, \cdots$.*

Definiţia 1.4.8. *Fie $(x_n)_n$ un şir, unde $n \geq n_0$.*

(1) *Şirul $(x_n)_n$ este* mărginit superior, *dacă există $b \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_n \leq b$, $(\forall) n \geq n_0$.*

(2) *Şirul $(x_n)_n$ este* mărginit inferior, *dacă există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $a \leq x_n$, $(\forall) n \geq n_0$.*

(3) *Şirul $(x_n)_n$ este* mărginit, *dacă e mărginit inferior şi superior.*

Propoziţia 1.4.9. *$(x_n)_n$ este* mărginit *$\Leftrightarrow (\exists) M \geq 0$ astfel încât $|x_n| \leq M$, $(\forall) n \geq n_0$.*

Definiţia 1.4.10. *Fie $(x_n)_n$ un şir, unde $n \geq n_0$.*

(1) *Şirul $(x_n)_n$ este* (strict) crescător, *dacă $x_n \leq x_{n+1}$ ($x_n < x_{n+1}$), $(\forall) n \geq n_0$.*

(2) *Şirul $(x_n)_n$ este* (strict) descrescător, *dacă $x_n \geq x_{n+1}$ ($x_n > x_{n+1}$), $(\forall) n \geq n_0$.*

(3) *Şirul $(x_n)_n$ este* (strict) monoton *dacă este (strict) crescător sau descrescător.*

Propoziţia 1.4.11. *Fie $(x_n)_n$ un şir, unde $n \geq n_0$. Atunci:*

(1) *$(x_n)_n$ este (strict) crescător $\Leftrightarrow x_{n+1} - x_n \geq 0$ ($x_{n+1} - x_n > 0$), $(\forall) n \geq n_0$.*

(2) $(x_n)_n$ *este (strict) descrescător* $\Leftrightarrow x_{n+1} - x_n \leq 0$ $(x_{n+1} - x_n < 0)$, $(\forall)n \geq n_0$.

Propoziţia 1.4.12. *Fie* $(x_n)_n$ *un şir, unde* $n \geq n_0$*, astfel încât* $x_n > 0$, $(\forall)n \geq n_0$*. Atunci:*

(1) $(x_n)_n$ *este (strict) crescător* $\Leftrightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$ $(\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1)$, $(\forall)n \geq n_0$.

(2) $(x_n)_n$ *este (strict) descrescător* $\Leftrightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq 1$ $(\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1)$, $(\forall)n \geq n_0$.

Definiţia 1.4.13. *Spunem că şirul* $(x_n)_n$ converge *la* $x \in \mathbb{R}$*, dacă se verifică una din condiţiile echivalente:*

(1) $(\forall)V$ *vecinătate pentru* x, $(\exists)n_V \in \mathbb{N}$*, astfel încât* $(\forall)n \geq n_v \Rightarrow x_n \in V$.

(2) $(\forall)\varepsilon > 0$, $(\exists)n_\varepsilon \in \mathbb{N}$*, astfel încât* $(\forall)n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon$.

Dacă $(x_n)_n$ *converge la* x*, atunci* x *se numeşte* limita *lui* $(x_n)_n$*, şi notăm* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$*, sau mai scurt* $\lim_n x_n = x$.

Un şir care nu e convergent se numeşte divergent.

Definiţia 1.4.14. *Spunem că şirul* $(x_n)_n$ *are limita* $+\infty$ *şi scriem* $\lim_n x_n = +\infty$*, dacă se verifică una din condiţiile echivalente:*

(1) $(\forall)V$ *vecinătate pentru* $+\infty$, $(\exists)n_V \in \mathbb{N}$*, astfel încât* $(\forall)n \geq n_V \Rightarrow x_n \in V$.

(2) $(\forall)M > 0$, $(\exists)n_M \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $(\forall)n \geq n_M \Rightarrow x_n > M$.

Similar se defineşte $\lim_n x_n = -\infty$.

Exemplul 1.4.15. (1) Şirul $x_n = \frac{n}{2n+1}$, $n \geq 1$ e convergent şi are $\lim_n x_n = \frac{1}{2}$.

(2) Şirul $x_n = \sqrt{n}$, $n \geq 1$ este divergent şi are $\lim_n x_n = +\infty$.

(3) Şirul $x_n = (-1)^n$, $n \geq 1$ este divergent şi nu are limită.

Propoziţia 1.4.16. *(Proprietăţi ale şirurilor cu limită)*

(1) Limita unui şir, dacă există, este unică.

(2) Dacă $(x_n)_n$ *este convergent, atunci* $(x_n)_n$ *este mărginit. (Reciproca nu e adevărată, de ex.* $x_n = (-1)^n$ *nu are limită)*

(3) Dacă $(x_n)_n$ *este mărginit, atunci* $(x_n)_n$ *are subşiruri convergente.*

(4) ***Teorema lui Weierstrass****: Dacă* $(x_n)_n$ *este monoton şi mărginit, atunci* $(x_n)_n$ *este convergent. (Reciproca nu e adevărată, de ex.* $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ *converge la* 0*)*

(5) *Dacă* $(x_n)_n$ *este crescător şi nemărginit, atunci* $\lim_n x_n = +\infty$. *Dacă* $(x_n)_n$ *este descrescător şi nemărginit, atunci* $\lim_n x_n = -\infty$.

(6) *Dacă* $x_n \le y_n$, $(\forall)n$ *şi cele două şiruri au limită, atunci* $\lim_n x_n \le \lim_n y_n$.

(7) ***Criteriul cleştelui:*** *Dacă* $x_n \le y_n \le z_n$, $\lim_n x_n = \lim_n z_n = x$, *atunci* $\lim_n y_n = x$.

(8) *Dacă* $(x_n)_n$ *este mărginit şi* $\lim_n a_n = 0$, *atunci* $\lim_n (a_n x_n) = 0$.

(9) ***Criteriul majorării:*** *Dacă* $|x_n - x| \le a_n$, $(\forall)n$ *şi* $\lim_n a_n = 0$, *atunci* $\lim_n x_n = x$.

Propoziţia 1.4.17. *(Operaţii cu limite) Fie* $(x_n)_n$, (y_n) *şiruri care au limită. Atunci:*

(1) $\lim_n (x_n + y_n) = \lim_n x_n + \lim_n y_n$, *exceptând cazul* $\infty - \infty$.

(2) $\lim_n (x_n y_n) = \lim_n x_n \lim_n y_n$, *exceptând cazul* $0 \cdot \infty$.

(3) *Dacă* $y_n \neq 0, (\forall n)$ *şi* $\lim_n y_n \neq 0$, *atunci* $\lim_n \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_n x_n}{\lim_n y_n}$.

(4) $\lim_n |x_n| = |\lim_n x_n|$.

(5) *Dacă* $x_n \ge 0, (\forall n)$, *atunci* $\lim_n \sqrt[k]{x_n} = \sqrt[n]{\lim_n x_n}$, $k \in \mathbb{N}^*$.

(6) *Dacă* $y_n > 0, (\forall n)$ *şi* $\lim_n y_n > 0 \Rightarrow \lim_n x_n^{y_n} = (\lim_n x_n)^{\lim_n y_n}$, *exceptând* $1^\infty, \infty^0$.

(7) *Dacă* $x_n > 0, (\forall n)$, $\lim_n x_n > 0 \Rightarrow \lim_n \log_a x_n = \log_a(\lim_n x_n)$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Propoziţia 1.4.18. *(Limite remarcabile)*

(1) *Şirul* $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ *este strict crescător şi mărginit, deci convergent. Avem:*

$$\lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_n (1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}) = e = 2,7182818\ldots$$

Numărul e se numeşte numărul lui Euler. e este transcendent (nu e soluţie a unei ecuaţii algebrice cu coeficienţi întregi).

(2) *Dacă* $x_n = a_k n^k + \cdots + a_1 n + a_0$, *cu* $k \ge 1$ *şi* $a_k \neq 0$, *atunci* $\lim_n x_n = a_k \cdot \infty$.

(3) Dacă $x_n = \frac{a_k n^k + \cdots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + \cdots + b_1 n + a_0}$*, cu* $a_k, b_q \neq 0$*, atunci*

$$\lim_n x_n = \frac{a_k}{b_q} \lim_n n^{k-q} = \begin{cases} 0, & k < q \\ \frac{a_k}{b_q}, & k = q \\ \frac{a_k}{b_q} \cdot \infty, & k > q \end{cases}.$$

(4) Dacă $x_n \neq 0, (\forall) n$ *şi* $\lim_n x_n = 0$*, atunci*

$$\lim_n \frac{\sin x_n}{x_n} = \lim_n \frac{\operatorname{tg} x_n}{x_n} = \lim_n \frac{\arcsin x_n}{x_n} = \lim_n \frac{\operatorname{arctg} x_n}{x_n} = 1.$$

(5) Dacă $x_n \neq 0, (\forall) n$ *şi* $\lim_n x_n = 0$*, atunci* $\lim_n (1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e$*. În consecinţă*
$\lim_n \frac{\ln(1+x_n)}{x_n} = 1$ *şi* $\lim_n \frac{a^{x_n}-1}{x_n} = \ln a$*, pentru* $a > 0$*.*

Propoziţia 1.4.19. *(Cesaro-Stolz) Fie* $(x_n)_n$*,* $(y_n)_n$ *două şiruri. Dacă* $y_n > 0, (\forall) n$*,* $(y_n)_n$ *strict crescător şi nemărginit, atunci:*

$$\lim_n \frac{x_n}{y_n} = \lim_n \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}.$$

Mai precis, dacă există limita din dreapta, atunci există şi limita din stânga şi avem egalitate.

Corolarul 1.4.20. *Fie* $(x_n)_n$ *cu* $x_n > 0$*,* $(\forall) n$*. Atunci:*

(1) $\lim_n \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \lim_n x_n$*.*

(2) $\lim_n \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = \lim_n x_n$*.*

(3) $\lim_n \sqrt[n]{x_n} = \lim_n \frac{x_{n+1}}{x_n}$ *(Cauchy-D'Alembert).*

Şiruri recurente

Propoziţia 1.4.21. *(Recurenţă liniară de ordin* 1*) Fie* $x_0 \in \mathbb{R}$*,* $x_{n+1} = a x_n + b$*, cu* $a, b \in \mathbb{R}$*. Dacă* $a \neq 1$*, atunci*

$$x_n = \frac{1 - a^n}{1 - a} \cdot b + a^n x_0, (\forall) n \geq 1.$$

Şirul $(x_n)_n$ *este convergent* $\Leftrightarrow |a| < 1$*, caz în care* $\lim_n x_n = \frac{b}{1-a}$*.*

Observaţia 1.4.22. Pentru a arăta că un şir recurent $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \geq 0$ este convergent, trebuie urmaţi paşii următori:

(1) Se arată, prin inducţie, că şirul $(x_n)_n$ este mărginit, i.e. $a \leq x_n \leq b$, $(\forall)n$. În exemple concrete, de obicei $a = x_0$ sau $b = x_0$. Pentru a arăta mărginirea, trebuie verificat că $x \in [a,b] \Rightarrow f(x) \in [a,b]$, adică $f([a,b]) \subset [a,b]$.

(2) Folosind mărginirea, se arată că şirul este monoton, calculând $x_{n+1} - x_n = f(x_n) - x_n = \cdots$. Din Weierstrass, rezultă că $(x_n)_n$ este convergent.

(3) Dacă f este continuă (vezi secţiunea 3.4), şi dacă $\ell = \lim_n x_n$, trecând la limită în relaţia de recurenţă $x_{n+1} = f(x_n)$, se obţine $\ell = f(\ell)$. Atunci ℓ este soluţia ecuaţiei care se află în $[a,b]$.

Exemplu: $x_0 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, $n \geq 0$. Se arată că $x_n \in [\sqrt{2}, 2], (\forall)n \geq 0$ prin inducţie după $n \geq 0$. Atunci $x_{n+1} - x_n = \sqrt{x_n + 2} - x_n = \frac{-x_n^2 + x_n + 2}{\sqrt{x_n+2} + x_n} \geq 0$, deoarece $\sqrt{2} \leq x_n \leq 2$. Fie $\ell = \lim_n x_n$. Rezultă $\ell = \sqrt{2 + \ell} \Rightarrow \ell^2 - \ell - 2 = 0$. Ecuaţia are rădăcinile -1 şi 2. Dar $\ell \in [\sqrt{2}, 2] \Rightarrow \ell = 2$.

Şiruri Cauchy

Definiţia 1.4.23. *Şirul* $(x_n)_n$ *se numeşte* Cauchy, *dacă* $(\forall)\epsilon > 0, (\exists)n_\epsilon \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $(\forall)n, m \geq n_\epsilon \Rightarrow |x_m - x_n| < \epsilon$.

Propoziţia 1.4.24. *Fie şirul* $(x_n)_n$.

(1) $(x_n)_n$ *este Cauchy* $\Leftrightarrow (\forall)\epsilon > 0, (\exists)n_\epsilon \in \mathbb{N}$ *a. î.* $(\forall)n \geq n_\epsilon, p \geq 1 \Rightarrow |x_{n+p} - x_n| < \epsilon$.

(2) Dacă $|x_{n+p} - x_n| \leq a_n$, $(\forall)n, p \geq 1$ *şi* $\lim_n a_n = 0$, *atunci* $(x_n)_n$ *este Cauchy.*

(3) Dacă $(x_n)_n$ *este convergent, atunci* $(x_n)_n$ *este Cauchy.*

Teoremă 1.4.25. *(Cauchy) Un şir* $(x_n)_n$ *de numere reale este convergent* $\Leftrightarrow (x_n)_n$ *este Cauchy. Cu alte cuvinte,* $\mathbb{R}$ *este un* spaţiu metric complet.

Observaţia 1.4.26. (1) Şirul $x_n = \frac{1}{n}, n \geq 1$, privit ca un şir de elemente din $I = (0,1]$, este un şir Cauchy, dar nu e convergent în I, deoarece $\lim_n x_n = 0 \notin I$. Deci I nu este complet. Un interval $I \subset \mathbb{R}$ este complet $\Leftrightarrow I$ este închis.

(2) Şirul $x_1 = 1,4$, $x_2 = 1,41$, $x_3 = 1,414$ etc. al aproximărilor zecimale pentru $\sqrt{2}$ este un şir Cauchy de numere raţionale, dar $(x_n)_n$ nu converge în $\mathbb{Q}$. Deci $\mathbb{Q}$ nu este complet.

(3) Construcţia numerelor reale. Considerăm $\mathcal{C}$ = mulţimea şirurilor Cauchy de numere raţionale. Două şiruri $(x_n)_n, (y_n)_n \in \mathcal{C}$ sunt echivalente dacă $\lim_n(y_n - x_n) = 0$. Scriem $(x_n)_n \sim (y_n)_n$. Atunci mulţimea numerelor reale este mulţimea cât $\mathbb{R} = \mathcal{C}/\sim$. Pentru un şir Cauchy $(x_n)_n$ de numere

raţionale, există prin urmare un număr real $x \in \mathbb{R}$ cu $x = \lim_n x_n$ (x este clasa lui $(x_n)_n$). Dacă x, y sunt clasele şirurilor $(x_n)_n$, $(y_n)_n$, atunci $x + y :=$ clasa şirului $(x_n + y_n)_n$ şi $x \cdot y :=$ clasa lui $(x_n y_n)_n$.

Exerciţii

1. Fie $A = [0,1) \cup \{2\}$. Arătaţi că: $\mathring{A} = (0,1)$, $\overline{A} = [0,1] \cup \{2\}$, $\partial A = \{0,1,2\}$, $A' = [0,1]$, $Iz(A) = \{2\}$. Arătaţi că A este o mulţime mărginită, dar nu e compactă, iar $\overline{A}$ este compactă.

2. Studiaţi mărginirea şi monotonia şirurilor:

   a) $x_n = \frac{2n}{2n+1}$

   b) $x_n = (-1)^n$

   c) $x_n = \sqrt{n}$

   d) $x_n = n(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1})$

   e) $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$

   f) $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$

   g) $x_n = \frac{2n^2+1}{3n^2+2}$

   h) $x_1 = \sqrt{2}, x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, n \geq 1$

   i) $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$

3. Arătaţi, folosind definiţia limitei unui şir:

   a) $\lim_n \frac{2n+1}{3n+2} = \frac{2}{3}$

   b) $\lim_n \sqrt{n} = \infty$

   c) $\lim_n(\ln(2n+1) - \ln(n+1)) = \ln 2$

   d) $\lim_n \frac{n^2}{2n^2+1} = \frac{1}{2}$

   e) $\lim_n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$

4. Calculaţi limitele (folosind criteriul cleştelui):

   a) $\lim_n(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}})$

   b) $\lim_n(\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n})$

   c) $\lim_n(\sum_{k=1}^n \frac{k^2+k}{n^3+k})$, d) $\lim_n \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n k!$

5. Calculaţi limitele (folosind criteriul majorării):

   a) $\lim_n \frac{\sin n}{n}$

   b) $\lim_n \frac{\cos 6^n}{\sqrt{n}}$

c) $\lim_n \frac{\sin 1+\sin 2+\cdots+\sin n}{n^2}$

d) $\lim_n \frac{(-1)^n n}{n^2+n}$

e) $\lim_n \frac{n!}{n^n}$

f) $\lim_n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}$

6. Arătaţi că şirurile următoare sunt convergente (Weierstrass):

a) $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$

b) $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$

c) $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$

d) $x_1 \in (1, 2)$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{3}{2}$

e) $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

f) $x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}$

g) $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$

7. Calculaţi limitele:

a) $\lim_n \frac{n+1}{2n^2+3}$

b) $\lim_n \frac{2n^2+3}{3n^2-2}$

c) $\lim_n \sqrt{\frac{2n+3}{4n+1}}$

d) $\lim_n \ln(\frac{n^3}{n^2+n+1})$

e) $\lim_n \frac{-n^3+n+5}{2n^2+1}$

f) $\lim_n \frac{3^n+5^n}{3^{n+1}+2\cdot 5^n}$

g) $\lim_n \frac{3n+2}{\sqrt{n^2+1}}$

h) $\lim_n \frac{\ln(n^2+n+1)}{\ln(n^6+2n^3+1)}$

i) $\lim_n \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{\frac{2n^2}{n^2+4}}$

j) $\lim_n \left(\frac{2n^2+1}{n^2-2n+3}\right)^{\frac{2}{3}}$

k) $\lim_n \log_3 \frac{n^2+1}{\sqrt{n^3+2}}$

l) $\lim_n \operatorname{arctg}(n^2 - n + 1)$

8. Calculaţi limitele:

a) $\lim_n(n^2 - n + 1)$

b) $\lim_n (2^n - n^2)$

c) $\lim_n (4^n - 5^n + 6^n)$

d) $\lim_n (\sqrt{n^2+n} - n)$

e) $\lim_n \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

f) $\lim_n (\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}})$

g) $\lim_n (\sqrt[3]{n^3+n^2} - n)$

h) $\lim_n \frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{n^a}$, $a \in \mathbb{R}$

i) $\lim_n \frac{n^a}{\sqrt{n^3+n^2}-\sqrt[3]{n^3-n^2}}$, $a \in \mathbb{R}$

9. Calculaţi limitele:

a) $\lim_n \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{3n+1}$

b) $\lim_n \left(\frac{n^2+n+2}{n^2+1}\right)^{\frac{n^2-1}{2n+1}}$

c) $\lim_n n \sin(\frac{2n}{n^2+1})$

d) $\lim_n 2^n \operatorname{tg}(\frac{1}{2^n+3^n})$

e) $\lim_n n \ln(\frac{n^2-n+1}{n^2+2})$

f) $\lim_n \sqrt{n} \ln(\frac{2n+\sqrt{n}}{2n+1})$

g) $\lim_n n(2^{\sin\frac{1}{n}} - 1)$

h) $\lim_n n^2(3^{\frac{1}{n}} - 3^{\frac{1}{n+2}})$ i) $x_1 \in (2,3)$, $x_{n+1} = \frac{x_n+3}{2}$.

10. Folosind Cesaro-Stolz, calculaţi:

a) $\lim_n \frac{1}{n}(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}})$

b) $\lim_n \frac{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$

c) $\lim_n \frac{n^k}{a^n}$, $k \in \mathbb{N}$, $a > 1$

d) $\lim_n \frac{\ln n}{n}$

e) $\lim_n \frac{1}{n}(1 + \frac{1}{\ln 2} + \cdots + \frac{1}{\ln n})$

f) $\lim_n \frac{1+2^2\sqrt[2]{2}+3^2\sqrt[3]{3}\cdots+n^2\sqrt[n]{n}}{n(n+1)(n+2)}$

g) $\lim_n \frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$, $p \in \mathbb{N}$

h) $\lim_n \frac{1^n+2^n+\cdots+n^n}{n^n}$

11. Folosind Cauchy-D'Alembert, calculaţi:

    a) $\lim_n \sqrt[n]{n^2}$

    b) $\lim_n \sqrt[n]{\ln n}$

    c) $\lim_n \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

    d) $\lim_n \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}$

    e) $\lim_n \sqrt[n]{\frac{[(n+1)!]^2}{(2n+1)!3^n}}$

    f) $\lim_n \sqrt[n]{\frac{(n+1)\cdots(2n)}{n^n}}$

    g) $\lim_n \sqrt[n]{\frac{n \ln n}{n^{\ln n}}}$

    h) $\lim_n \sqrt[n]{\frac{n^{2n+1}}{(2n)!}}$

12. Decideţi dacă şirurile următoare sunt sau nu Cauchy:

    a) $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$.

    b) $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

    c) $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

    d) $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{\cos k}{k(k+1)}$, $n \geq 1$.

    e) $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin k!}{k^2}$, $n \geq 1$.

    f) $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$, $n \geq 0$.

1.5 Limite de funcţii. Funcţii continue.

Definiţia 1.5.1. *Fie $f : D \to \mathbb{R}$. Fie $a \in D'$ şi $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Spunem că f are limita ℓ în a, dacă se verifică una din condiţiile echivalente următoare:*

(1) $(\forall)(x_n)_n, x_n \in D, x_n \neq a, lim_n x_n = a \Rightarrow \lim_n f(x_n) = \ell$.

(2) $(\forall)V$ *vecinătare pentru* ℓ, $(\exists)U$ *vecinătate pentru* x_0 *cu* $f(U \cap D) \subset V$.

(3) Dacă $\ell \in \mathbb{R}$: $(\forall)\epsilon > 0, (\exists)\delta_\epsilon$ *astfel încât* $(\forall)x \in D, 0 < |x - a| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$.

Dacă există, limita unei funcţii într-un punct este unică.

Definiţia 1.5.2. *Fie $f : D \to \mathbb{R}$. Fie $a \in D'$ şi $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.*

(1) Spunem că limita la dreapta *a lui f în a este ℓ şi scriem* $f(a + 0) = l_d(a) = \lim_{x \searrow a} f(x) = \ell$, *dacă* $(\forall)(x_n)_n, x_n > a, \lim_n x_n = a \Rightarrow \lim_n f(x_n) = \ell$.

(2) Spunem că limita la stânga *a lui f în a este ℓ şi scriem* $f(a-0) = l_s(a) = \lim_{x \nearrow a} f(x) = \ell$, *dacă* $(\forall)(x_n)_n, x_n < a, \lim_n x_n = a \Rightarrow \lim_n f(x_n) = \ell$.

Propoziţia 1.5.3. *Fie $f : D \to \mathbb{R}$ şi $a \in D$. Atunci* $(\exists) \lim_{x \to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow (\exists)f(a + 0) = f(a - 0) = \ell$.

Propoziţia 1.5.4. *(Proprietăţi ale limitelor de funcţii) Fie $f, g, h : D \to \mathbb{R}$, $a \in D'$ şi V o vecinătate pentru a. Atunci:*

(1) Dacă $f(x) \leq g(y)$, $(\forall)x \in (V \cap D) \setminus \{a\}$, *atunci* $\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$.

(2) ***Criteriul cleştelui****: Dacă* $f(g) \leq g(x) \leq h(x)$, $(\forall)x \in (V \cap D) \setminus \{a\}$, *şi* $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = \ell$, $\lim_{x \to a} g(x) = \ell$.

(3) ***Criteriul majorării****: Dacă* $\ell \in \mathbb{R}$, $|f(x) - \ell| \leq g(x)$, $(\forall)x \in (V \cap D) \setminus \{a\}$ *şi* $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, *atunci* $\lim_{x \to a} f(g) = \ell$.

(4) Dacă $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ *şi* $g(x)$ *e mărginită pe* $(V \cap D) \setminus \{a\}$, *atunci* $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = 0$.

(5) $\lim_{x \to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$, *exceptând* $\infty - \infty$.

(6) $\lim_{x \to a}(f(x)g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$, *exceptând* $0 \cdot \infty$.

(7) $\lim_{x \to a} |f(x)| = |\lim_{x \to a} f(x)|$, *dacă există* $\lim_{x \to a} f(x)$.

(8) Dacă $g(x) \neq 0$ *pe* $(V \cap D) \setminus \{a\}$, *atunci* $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$, *exceptând* $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$.

(9) *Dacă* $f(x) > 0$, *atunci* $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = (\lim_{x\to a} f(x))^{(\lim_{x\to a} g(x))}$, *exceptând* $\infty^0, 1^\infty$.

Propoziţia 1.5.5. *Fie* $f : D \to E$, $g : E \to \mathbb{R}$, $a \in D'$. *Dacă* $b = \lim_{x\to a} f(x)$, $b \in E'$, $f(x) \neq b$ *pentru* $x \in (V \cap D) \setminus \{a\}$, *unde* V *e o vecinătate a lui* a, $\lim_{y\to b} g(x) = \ell$, *atunci*

$$\lim_{x\to a}(g \circ f)(x) = \lim_{y\to b} g(y).$$

Limite importante

1. $\lim_{x\to a} P(x) = P(a)$, pentru $P(x)$ funcţie polinomială, $a \in \mathbb{R}$.
2. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$, $\lim_{x\nearrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim_{x\searrow 0} \frac{1}{x} = \infty$.
3. $\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$, dacă $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $a \in \mathbb{R}$ cu $Q(a) \neq 0$.
4. $\lim_{x\to\pm\infty}(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$, $a_n \neq 0$.
5. $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$, $a_n, b_m \neq 0$.
6. $\lim_{x\to a} x^b = a^b$, $\lim_{x\to b} a^x = a^b$, unde $b \in \mathbb{R}$, $a \in (0,\infty)$.
7. Dacă $a \in (1,\infty)$, $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$.
8. Dacă $a \in (0,1)$, $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$, $\lim_{x\to-\infty} a^x = \infty$.
9. Dacă $a \in (1,\infty)$, $\lim_{x\searrow 0} \log_a x = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} \log_a x = \infty$.
10. Dacă $a \in (0,1)$, $\lim_{x\searrow 0} \log_a x = \infty$, $\lim_{x\to\infty} \log_a x = -\infty$.
11. $\lim_{x\to a} \sin x = \sin a$, $\lim_{x\to a} \cos x = \cos a$, $a \in \mathbb{R}$. Nu există $\lim_{x\to\pm\infty} \sin x$, $\lim_{x\to\pm\infty} \cos x$.
12. $\lim_{x\to a} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. $\lim_{x\nearrow\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = \infty$, $\lim_{x\searrow\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = -\infty$.
13. $\lim_{x\to a} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} a$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. $\lim_{x\nearrow 0} \operatorname{ctg} x = -\infty$, $\lim_{x\searrow 0} \operatorname{ctg} x = \infty$.
14. $\lim_{x\to a} \arcsin x = \arcsin a$, $\lim_{x\to a} \arccos x = \arccos a$, $a \in [-1,1]$.
15. $\lim_{x\to a} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} a$, $a \in \mathbb{R}$. $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$.
16. $\lim_{x\to a} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg} a$, $a \in \mathbb{R}$. $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arcctg} x = 0$, $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi$.

17. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$.

18. $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

19. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

20. $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Definiţia 1.5.6. *Fie $f : D \to \mathbb{R}$. Fie $a \in D$. Spunem că f este* continuă *în a, dacă*

$$(\exists) \lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

f se numeşte continuă *pe D, dacă este continuă în orice punct $a \in D$.*

Propoziţia 1.5.7. *Fie $f : D \to \mathbb{R}$ şi $a \in D$. U.A.S.E. (Următoarele afirmaţii sunt echivalente):*

(1) f este continuă în a.

(2) $(\forall)V$ vecinătate pentru $f(a)$, $(\exists)U$ vecinătate pentru a cu $f(U) \subset V$.

(3) $(\forall)\epsilon > 0$, $(\exists)\delta_\epsilon > 0$, astfel încât, $(\forall)x \in D$ cu $|x-a| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$.

(4) $(\forall)(x_n)_n$, $x_n \in D$ cu $\lim_n x_n = a \Rightarrow \lim_n f(x_n) = f(a)$.

Teoremă 1.5.8. *Funcţiile elementare (putere, radical, exponenţială, logaritmică, trigonometrice) sunt continue pe domeniul lor de definiţie. De asemenea, funcţiile obţinute prin operaţii elementare şi compuneri de funcţii continue, sunt continue.*

Teoremă 1.5.9. *(Weierstrass) Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuă, unde $a < b \in \mathbb{R}$. Atunci f este mărginită şi îsi atinge marginile. Mai mult, $f([a,b]) = [c,d] \subset \mathbb{R}$.*

Corolarul 1.5.10. *Dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuă cu $f(a)f(b) \leq 0$, atunci $(\exists)c \in (a,b)$ cu $f(c) = 0$.*

Corolarul 1.5.11. *Dacă $f : [a,b] \to [a,b]$ continuă, atunci $(\exists)c \in (a,b)$ cu $f(c) = c$ (c se numeşte punct fix pentru f).*

Corolarul 1.5.12. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ un interval, cu $f(x) \neq 0, (\forall)x \in I$. Atunci f are acelaşi semn pe I.*

Corolarul 1.5.13. *Fie $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ şi $\lim_{x\to b} f(x) = \infty$ (sau invers). Atunci f se anulează cel puţin o dată în (a,b).*

Corolarul 1.5.14. *Orice polinom $P \in \mathbb{R}[X]$ de grad impar are cel puţin o rădăcină. (Rezultă din corolarul precedent)*

Propoziţia 1.5.15. *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie monotonă. Atunci, pentru orice $a \in I$ punct interior, f are limite laterale în a şi, în plus:*

(1) $f(a-0) \leq f(a) \leq f(a+0)$, dacă f e crescătoare.

(2) $f(a-0) \geq f(a) \geq f(a+0)$, dacă f e descrescătoare.

Pentru $I = [a, b)$, $f(a) \leq f(a+0)$ dacă f e crescătoare, $f(a) \geq f(a+0)$ dacă f e descrescătoare etc.

Corolarul 1.5.16. *O funcţie monotonă nu are puncte de discontinuitate de speţa a 2-a. Mai mult, mulţimea punctelor de discontinuitate este cel mult numărabilă.*

Lemă 1.5.17. *Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi $I \subset D$ un interval deschis. Atunci $f(I)$ este interval deschis.*

Teoremă 1.5.18. *Fie $a < b \in \mathbb{R}$ şi I un interval cu capetele a şi b. Fie $f : I \to J$ strict monotonă şi surjectivă, unde J este un interval. Atunci f este continuă pe I.*

În particular, dacă I e deschis, J e deschis, dacă I închis J e închis, dacă I e deschis la un capăt şi închis la celălalt, la fel este si J.

Mai mult, $f^{-1} : J \to I$ este strict monotonă şi continuă.

Teoremă 1.5.19. *Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este injectivă şi continuă, atunci f este strict monotonă.*

Definiţia 1.5.20. *Fie $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. f se numeşte* uniform continuă *pe D, dacă:*

$(\forall)\epsilon > 0$, $(\exists)\delta_\epsilon > 0$ *astfel încât* $(\forall)x, y \in D$ *cu* $|y-x| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(y)-f(x)| < \epsilon$.

Observaţia 1.5.21. Dacă f este uniform continuă, atunci f este continuă. Reciproca nu e adevărată, în general. De exemplu $f(x) = \cos x$ este uniform continuă pe $\mathbb{R}$, dar $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ nu este uniform continuă pe $(0, \infty)$, deşi e continuă.

Teoremă 1.5.22. *(Cantor) Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este continuă, atunci f este uniform continuă.*

Definiţia 1.5.23. *O funcţie $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numeşte* Lipschitz *de raport $k \geq 0$, dacă*

$$|f(y) - f(x)| \leq k|y - x|,\ (\forall)x, y \in D.$$

De observat că f este în particular uniform continuă (reciproca nu e adevărată).

Definiţia 1.5.24. *O funcţie $f : D \to D$, Lipshitz de raport $k \in [0,1)$, se numeşte* contracţie *pe D.*

Teoremă 1.5.25. *(Banach) Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval închis. Dacă $f : I \to I$ este o contraţie de factor $k \in [0,1)$, atunci f are un unic punct fix, i.e soluţie pentru ecuaţia $f(x) = x$.*

Mai mult, dacă $x_0 \in I$, $x_{n+1} = f(x_n), n \geq 0$, atunci $(x_n)_n$ converge în I şi $f(\alpha) = \alpha$, unde $\alpha = \lim_n x_n$. De asemenea,

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|, (\forall) n \geq 1.$$

Observaţia 1.5.26. O condiţie suficientă pentru ca f să fie o contracţie pe I este aceea ca $\sup_{x\in I} |f'(x)| = k < 1$, unde f' este derivata lui f (vezi secţiunea următoare).

Exemplul 1.5.27. Fie $f : [0,3] \to [0,3]$, $f(x) = \frac{-x^3+3x+4}{4}$. Atunci f e o contracţie de factor $\frac{3}{4}$. Dacă $x_0 = 0$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \geq 0$, atunci $\lim_n x_n = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ este punctul fix al lui f.

Exerciţii

1. Calculaţi limitele:

   a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x^3-1}$

   b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x+\operatorname{tg} 2x}{x^2+x}$

   c) $\lim_{x\to 8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt{x}-2\sqrt{2}}$

   d) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{\sqrt[3]{x^3-x+2}}$

   e) $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x}+x)$

   f) $\lim_{x\to 0}(1+\sin(2x))^{\frac{1}{x}}$

   g) $\lim_{x\to\pi} \frac{\ln(2+\cos x)}{\sin x}$

   h) $\lim_{x\to 1} \frac{2^{x-1}-1}{\operatorname{arctg}(x^2-1)}$

2. Studiaţi continuitatea funcţiei: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x^2+1}-1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

3. Arătaţi că nu există funcţii continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ cu $\operatorname{Im}(f) = (0,1)$.

1.6 Funcţii derivabile. Aplicaţii.

Definiţia 1.6.1. *Fie* $f : D \to \mathbb{R}$ *şi* $x_0 \in D$. *Spunem că* f *este* derivabilă în x_0 *dacă*

$$(\exists) \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}.$$

f *are derivată în* x_0, *dacă* $f'(x_0) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. *Numărul* $f'(x_0)$ *se numeşte derivata lui* f *în* x_0.

Funcţia f *se numeşte* derivabilă pe D *dacă este derivabilă în orice punct* $x_0 \in D$. *În acest caz, derivata lui* f *este funcţia* $f' : D \to \mathbb{R}$ *care ia valorile* $f'(x_0)$ *pentru* $x_0 \in D$.

Propoziţia 1.6.2. *Fie* $f : D \to \mathbb{R}$ *şi* $x_0 \in D$. *Dacă* f *este derivabilă în* x_0 *atunci ecuaţia tangentei la graficul lui* f *în punctul de abscisă* x_0 *este*

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Observaţia 1.6.3. (1) Fie $f : D \to \mathbb{R}$ derivabilă pe D. Atunci $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

(2) Din punct de vedere geometric $f'(x_0)$ reprezintă panta tangentei la graficul lui f în punctul $(x_0, f(x_0))$.

(3) În mecanică, viteza $v(t) = x'(t)$, unde $x(t) =$ poziţia unui mobil pe o axă, la momentul t. De asemenea acceleraţia $a(t) = v'(t)$.

Propoziţia 1.6.4. *Dacă* $f, g : D \to \mathbb{R}$ *sunt derivabile, atunci:*

(1) $(f + g)' = f' + g'$.

(2) $(\alpha f)' = \alpha f'$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(3) $(fg)' = f'g + fg'$.

(4) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$, *dacă* $g(x) \neq 0, (\forall)x \in D$.

Propoziţia 1.6.5. *Fie* $f : E \to D$, $g : D \to \mathbb{R}$ *şi* $x_0 \in D$ *astfel încât* f *e derivabilă în* x_0, g *e derivabilă în* $f(x_0)$ *şi* $f(x) \neq f(x_0)$ *pe* $V \setminus \{x_0\}$, *unde* V *e o vecinătate a lui* x_0. *Atunci* $g \circ f : E \to \mathbb{R}$ *este derivabilă în* x_0 *şi* $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$.

Pe scurt $(g \circ f)' = (g' \circ f)f'$.

Propoziţia 1.6.6. *Fie* $f : E \to D$ *bijectivă şi* $x_0 \in D$ *astfel încât* $f'(x_0) \neq 0$. *Atunci* $f^{-1} : D \to E$ *este derivabilă în* $f(x_0)$ *şi* $(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Definiţia 1.6.7. *Fie $f : D \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$. f se numeşte* diferenţiabilă *în x_0 dacă există $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liniară, adică $(\exists)a \in \mathbb{R}$ cu $L(x) = ax$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$, astfel încât*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)}{x - x_0} = 0.$$

Dacă f e diferenţiabilă în x_0, notăm $L = df(x_0)$ şi o numim diferenţiala lui f în x_0.

f se numeşte diferenţiabilă pe D, dacă e diferenţiabilă în orice punct $x_0 \in D$. Diferenţiala lui f, notată df este aplicaţia care pentru $x_0 \in D$, ia valoarea $df(x_0)$.

Propoziţia 1.6.8. *Fie $f : D \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$. Atunci f e diferenţiablă în x_0 dacă numai dacă f e derivabilă în x_0. Mai mult $(df)(x_0) = f'(x_0)dx$, unde $dx : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este aplicaţia identică, $dx(x) = x$.*

Cu alte cuvinte, noţiunea de derivabilitate şi diferenţiabilitate coincid pe $\mathbb{R}$. Acest lucru nu mai e adevărat în analiza reală cu mai multe variabile.

Propoziţia 1.6.9. *Fie $f, g : D \to \mathbb{R}$ diferenţiabile în $x_0 \in D$ (sau pe D). Atunci:*

(1) $d(f + g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0)$. $(d(f + g) = df + df.)$

(2) $d(fg)(x_0) = df(x_0)g(x_0) + f(x_0)dg(x_0)$. $(d(fg) = gdf + fdg.)$

(3) $d\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{df(x_0)g(x_0) - f(x_0)dg(x_0)}{g^2(x_0)}$. $(d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2}.)$

(4) $d(g \circ f)(x_0) = g'(f(x_0))df$. $(d(g \circ f) = (g' \circ f)df.)$

Derivatele funcţiilor elementare.

1. $c' = 0$.
2. $x' = 1$.
3. $(x^n)' = nx^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
4. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.
5. $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
6. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
7. $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
8. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

9. $(e^x)' = e^x$.
10. $(a^x)' = a^x \ln a$, $a > 0$, $a \neq 1$.
11. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.
12. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$.
13. $(\sin x)' = \cos x$.
14. $(\cos x)' = -\sin x$.
15. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.
16. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
17. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
18. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
19. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x^2+1}$.
20. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{x^2+1}$.

Propoziţia 1.6.10. *(Cosinus şi sinus hiperbolice)*
Fie $\operatorname{ch}, \operatorname{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\operatorname{ch} x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ *şi* $\operatorname{sh} x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$. *Atunci:*

1. $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.
2. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.
3. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$.

Derivatele funcţiilor compuse.

Fie $u = u(x)$.

1. $(u^n)' = nu'u^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
2. $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$.
3. $\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{nu'}{u^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
4. $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.
5. $(\sqrt[n]{u})' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
6. $(u^\alpha)' = \alpha u'u^{\alpha-1}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

7. $(e^u)' = u'e^u$.
8. $(a^u)' = u'a^u \ln a$, $a > 0$, $a \neq 1$.
9. $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.
10. $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$.
11. $(\sin u)' = u' \cos u$.
12. $(\cos u)' = -u' \sin u$.
13. $(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$.
14. $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$.
15. $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.
16. $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.
17. $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{u^2+1}$.
18. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{u^2+1}$.
19. $(\operatorname{ch} u)' = u' \operatorname{sh} u$.
20. $(\operatorname{sh} u)' = u' \operatorname{ch} u$.
21. $(u^v)' = u^v(u' \ln v + \frac{uv'}{v})$, unde $v = v(x)$.

Definiţia 1.6.11. *Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. f se numeşte* derivabilă la stânga *în x_0, dacă*

$$(\exists) f'_s(x_0) = \lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}.$$

$f'_x(x_0)$ *se numeşte* derivata la stânga *a lui f (derivata la stânga poate fi şi $\pm\infty$).*

f *se numeşte* derivabilă la dreapta *în x_0, dacă*

$$(\exists) f'_d(x_0) = \lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}.$$

$f'_d(x_0)$ *se numeşte* derivata la dreapta *a lui f (derivata la dreapta poate fi şi $\pm\infty$).*

Propoziţia 1.6.12. *f e derivabilă în x_0 (are derivată în x_0) $\Leftrightarrow$ f e derivabilă (are derivată) la stânga şi la dreapta în x_0 şi $f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$.*

În acest caz $f'(x_0) = f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$.

Exemplul 1.6.13. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|$. Atunci $f'_s(0)=-1$, $f'_d(0)=1$ deci f nu are derivată în 0.

Definiţia 1.6.14. *Fie $f:D\to\mathbb{R}$, $x_0\in D$ şi $n\geq 2$. Spunem că f este* derivabilă de n-ori *în x_0, dacă f este derivabilă de $(n-1)$-ori într-o vecinătate $V\subset D$ a lui x_0 şi derivata de ordin $(n-1)$-ori, notată $f^{(n-1)}$ este derivabilă în x_0.* Derivata de ordin n *a lui f în x_0 este $f^{(n)}(x_0)=(f^{(n-1)})'(x_0)$.*

f se numeşte derivabilă de n-ori *pe D, dacă e derivabilă de n-ori în orice punct din D.*

Definiţia 1.6.15. *Fie $f:D\to\mathbb{R}$ şi $x_0\in D$.*

(1) f se numeşte de clasă $C^0(x_0)$ (respectiv $C^0(D)$) dacă este continuă în x_0 (respectiv pe D).

(2) f se numeşte de clasă $C^n(x_0)$ (respectiv $C^n(D)$) dacă este derivabilă de n-ori într-o vecinătate a lui x_0 (respectiv pe D) şi derivata de ordin n este o funcţie continuă în x_0 (respectiv pe D).

(3) f se numeşte de clasă $C^\infty(x_0)$ (respectiv $C^\infty(D)$) dacă f e derivabilă de n-ori în x_0 pentru orice $n\geq 1$ (respectiv pe D).

Propoziţia 1.6.16. *Fie $f,g:D\to\mathbb{R}$ derivabile de n-ori. Atunci*

$$(f\cdot g)^{(n)}=C_n^0 f^{(n)}g+C_n^1 f^{(n-1)}g+\cdots+C_n^n f g^{(n)}=\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}g^{(k)}.$$

Similar pentru f,g derivabile de n-ori în $x_0\in D$.

Propoziţia 1.6.17. *Fie $f\in\mathbb{R}[X]$ un polinom cu* $\operatorname{grad} f\geq 1$. *Atunci α este rădăcină de ordin $m\geq 1$ a lui $f \Leftrightarrow f(\alpha)=0, f'(\alpha)=0,\cdots,f^{(m-1)}(\alpha)=0$, $f^{(m)}(\alpha)\neq 0$.*

Teorema lui Fermat şi aplicaţii

Definiţia 1.6.18. *Fie $f:D\to\mathbb{R}$ şi $x_0\in D$.*

(1) $x_0\in D$ se numeşte punct de maxim local *pentru f, dacă există V o vecinătate a lui x_0 astfel încât $f(x)\leq f(x_0)$, $(\forall)x\in V\cap D$.*

(2) $x_0\in D$ se numeşte punct de minim local *pentru f, dacă există V o vecinătate a lui x_0 astfel încât $f(x)\geq f(x_0)$, $(\forall)x\in V\cap D$.*

(3) $x_0\in D$ se numeşte punct de extrem local *pentru f, dacă este maxim local sau de minim local.*

(4) Dacă f e derivabilă în x_0 şi $f'(x_0) = 0$, x_0 se numeşte punct critic *pentru f.*

Teoremă 1.6.19. *(Fermat) Fie $f : D \to \mathbb{R}$ derivabilă în $x_0 \in D$. Dacă x_0 este punct de extrem local pentru f, atunci x_0 este punct critic pentru f, adică $f'(x_0) = 0$.*

Observaţia 1.6.20. Reciproca la teorema lui Fermat nu este adevărată. De exemplu $x_0 = 0$ este punct critic pentru $f(x) = x^3$, dar nu e punct de extrem.

Pe de altă parte, există puncte de extrem în care funcţia respectivă nu e derivabilă. De exemplu $x_0 = 0$ e punct de minim pentru $f(x) = |x|$.

Definiţia 1.6.21. *Fie $a < b \in \mathbb{R}$. O funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continuă pe $[a, b]$ şi derivabilă pe (a, b) se numeşte* funcţie Rolle.

Teoremă 1.6.22. *(Rolle) Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie Rolle cu $f(a) = f(b)$. Atunci $(\exists)c \in (a, b)$ cu $f'(c) = 0$.*

Corolarul 1.6.23. *(Şirul lui Rolle) Fie $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde I e un interval. Între două rădăcini ale lui f' există cel mult o rădăcină pentru f.*

Dacă I are capetele aşi b, calculăm $\alpha = \lim_{x\searrow a} f(x)$, $\beta = \lim_{x\nearrow a} f(x)$. Dacă $x'_1 < x'_2 < \cdots < x'_m$ sunt rădăcinile ecuaţiei $f'(x) = 0$, şirul lui Rolle este şirul semnelor lui $\alpha, f(x'_1), f(x'_2), \ldots, f(x'_m), \beta$.

Între $--$ sau $++$ nu există nici o rădăcină pentru f.

Între $-+$ sau $+-$ există o unică rădăcină pentru f.

Exemplul 1.6.24. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Ecuaţia $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$ are rădăcinile $x'_1 = -1$, $x'_2 = -2$. Avem $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $f(-1) = 3$, $f(1) = -1$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Şirul lui Rolle asociat este $- + -+$, prin urmare $f(x) = 0$ are trei rădăcini reale, câte una în intervalele $(-\infty, -1), (-1, 1)$ şi $(1, \infty)$.

Teoremă 1.6.25. *(Lagrange) Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie Rolle. Atunci $(\exists)c \in (a, b)$ cu $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Corolarul 1.6.26. *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval. Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ e derivabilă pe I şi $f'(x) = 0$, $(\forall)x \in I$, atunci f este constantă.*

Corolarul 1.6.27. *Dacă $f, g : I \to \mathbb{R}$ sunt derivabile pe intervalul I şi $f'(x) = g'(x)$, $(\forall)x \in I$, atunci $g - f$ este constantă.*

Corolarul 1.6.28. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$ derivabilă pe intervalul I. Atunci:*

(1) Dacă $f'(x) \geq 0$, $(\forall)x \in I$, atunci f este crescătoare pe I.

(2) Dacă $f'(x) > 0$, $(\forall)x \in \mathring{I}$, atunci f este strict crescătoare pe I.

(3) Dacă $f'(x) \leq 0$, $(\forall)x \in I$, atunci f este descrescătoare pe I.

(4) Dacă $f'(x) < 0$, $(\forall)x \in \mathring{I}$, atunci f este strict descrescătoare pe I.

Reamintim că $\mathring{I}$ = interiorul intervalului I. De exemplu, pentru $I = [a,b], \mathring{I} = (a,b)$.

Corolarul 1.6.29. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$. Dacă f este continuă în x_0, derivabilă pe $I \setminus \{x_0\}$ şi $(\exists)\lim_{x\to x_0} f'(x) \in \mathbb{R}$, atunci f e derivabilă în x_0 şi $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} f'(x)$.*

Afirmaţii asemănătoare au loc pentru derivatele laterale $f'_s(x_0)$ şi $f'_d(x_0)$.

Teoremă 1.6.30. *(Cauchy) Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funcţii Rolle. Presupunem că $g'(x) \neq 0$, $(\forall)x \in (a,b)$. Atunci $(\exists)c \in (a,b)$ astfel încât $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.*

Demonstraţie. Se aplică Teorema lui Rolle pentru $h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x)$. □

Teoremă 1.6.31. *(Darboux) Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este derivabilă, atunci f' are proprietatea lui Darboux pe I.*

Aplicaţii ale derivatelor

Teoremă 1.6.32. *(Regulile lui l'Hospital) Fie $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ cu proprietăţile:*

(1) f, g sunt derivabile pe I.

(2) $\lim_{x\searrow a} f(x) = \lim_{x\searrow a} g(x) = 0$ (sau $\lim_{x\searrow a} f(x) = \lim_{x\searrow a} g(x) = \infty$).

(3) $g(x) \neq 0$ şi $g'(x) \neq 0$, $(\forall)x \in (a,b)$.

(4) $(\exists)\lim_{x\searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Atunci $(\exists)\lim_{x\searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Similar pentru limite la stânga în b.

Definiţia 1.6.33. *Fie $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

(1) f se numeşte convexă *pe I, dacă:*

$$(\forall)x_1 < x_2 \in I,\ a \in (0,1),\ f((1-a)x_1 + ax_2) \leq (1-a)f(x_1) + af(x_2).$$

(2) f se numeşte strict convexă *pe I, dacă:*

$$(\forall)x_1 < x_2 \in I,\ a \in (0,1),\ f((1-a)x_1 + ax_2) < (1-a)f(x_1) + af(x_2).$$

1. f se numeşte concavă *pe I, dacă:*

$$(\forall)x_1 < x_2 \in I,\ a \in (0,1),\ f((1-a)x_1 + ax_2) \geq (1-a)f(x_1) + af(x_2).$$

2. *f se numeşte* strict concavă *pe I, dacă:*

   $(\forall) x_1 < x_2 \in I,\ a \in (0,1),\ f((1-a)x_1 + ax_2) > (1-a)f(x_1) + af(x_2).$

Propoziţia 1.6.34. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$. Dacă f e de două ori derivabilă pe $\mathring{I}$ atunci:*

1. *$f''(x) \geq 0$, $(\forall) x \in \mathring{I} \Rightarrow f$ este convexă pe I.*
2. *$f''(x) > 0$, $(\forall) x \in \mathring{I} \Rightarrow f$ este strict convexă pe I.*
3. *$f''(x) \leq 0$, $(\forall) x \in \mathring{I} \Rightarrow f$ este concavă pe I.*
4. *$f''(x) < 0$, $(\forall) x \in \mathring{I} \Rightarrow f$ este strict concavă pe I.*

Propoziţia 1.6.35. *Fie $f : D \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$. Presupunem că f e de două ori derivabilă într-o vecinătate $V = (a,b)$ a lui x_0.*

Dacă $f''(x_0) = 0$, $f''(x) \leq 0$, $x \in (a, x_0)$ şi $f''(x) \geq 0$, $x \in (x_0, b)$ atunci x_0 este punct de inflexiune. (Similar, dacă $f''(x) \leq 0$ pe (a, x_0) şi $f''(x) \geq 0$ pe (x_0, b))

Propoziţia 1.6.36. *Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, f de două ori derivabilă în x_0. Atunci:*

1. *Dacă $f'(x_0) = 0$ şi $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ este un punct de minim local.*
2. *Dacă $f'(x_0) = 0$ şi $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ este un punct de maxim local.*
3. *Dacă $f'(x_0) = 0$ şi $f''(x_0) = 0$, nu putem trage nici o concluzie!*

Definiţia 1.6.37. *Fie $f : D \to \mathbb{R}$ şi $a \in D' \setminus D$.*

1. *$x = a$ se numeşte* asimptotă verticală la stânga *(AVS) , dacă $\lim_{x \nearrow a} f(x) = \pm\infty$.*
2. *$x = a$ se numeşte* asimptotă verticală la dreapta *(AVD) , dacă $\lim_{x \searrow a} f(x) = \pm\infty$.*
3. *$x = a$ se numeşte* asimptotă verticală *(AV) dacă este (AVS) şi (AVD).*

Definiţia 1.6.38. *Fie $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$.*

1. *$y = n$ se numeşte* asimptotă orizontală *(AH) la $+\infty$ pentru f dacă $\lim_{x\to\infty} f(x) = n$.*
2. *Dreapta $y = mx + n$, $m \neq 0$ se numeşte* asimptotă oblică *(AO) la $+\infty$ pentru f dacă $\lim_{x\to\infty}(f(x) - mx - n) = 0$.*

Similar, pentru $f : (-\infty, b) \to \mathbb{R}$, definim asimptotele orizontală şi oblică la $-\infty$.

Propoziţia 1.6.39. *Dreapta $y = mx + n$ este asimptotă oblică la $+\infty$ pentru $f \Leftrightarrow (\exists) \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R}$ şi $(\exists) \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx) = n \in \mathbb{R}$.*

Exerciţii

1. Calculaţi derivatele funcţiilor:

   a) $f(x) = xe^{x^2+1}$

   b) $f(x) = \ln(x^2 + x)$

   c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3+2x+1}}$

   d) $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$

   e) $f(x) = \arcsin(\frac{2x}{x^2+1})$

   f) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x^2+1}$

   g) $f(x) = \sin(\ln(x^2 + \sqrt{\cos x}))$

2. Calculaţi derivatele de ordin n şi valorile lor în $x_0 = 0$:

   a) $f(x) = e^{ax}$

   b) $f(x) = \ln(x + 1)$

   c) $f(x) = \cos x$

   d) $f(x) = \sin x$

   e) $f(x) = 1 - e^{-x}$

   f) $f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2}$

   g) $f(x) = x^2e^x$

   h) $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2-1}$

   i) $f(x) = e^x \sin x$

   j) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+4}}$

   k) $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{1+x}}$

   l) $f(x) = \sqrt[3]{x + 8}$.

3. Folosind regula lui L'Hospital, calculaţi limitele:

   a) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$

   b) $\lim_{x\searrow 0} x \ln x$

   c) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}-2x}{x \sin x}$

   d) $\lim_{x\searrow 1}(x - 1)e^{\frac{1}{x-1}}$

   e) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{2x}}$

   f) $\lim_{x\searrow 0}(\operatorname{ctg} x + \ln x)$

g) $\lim_{x\searrow 0} x^x$

h) $\lim_{x\searrow 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

4. Determinaţi punctele de extrem pentru:

a) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^n-x^{n+1}$, $n\geq 2$

a) $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^n-x^{2n}$, $n\geq 2$

c) $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-ax}$, $a\geq 2$

d) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^{-ax^2}$, $a\geq 2$

e) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2e^{-ax}$, $a\geq 2$

f) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|+\sqrt{x^2+a}$, $a>0$

5. Desenaţi graficul funcţiilor (intervale de monotonie, convexitatea, asimptote etc.):

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-2x^2+x+1$

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2+1)e^x$

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^2+4}$

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+2x+2}$

e) $f:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+1}{x-2}$

f) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

g) $f:\mathbb{R}\setminus\{-2\}\to R$, $f(x)=\frac{e^x}{x+2}$

h) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2\ln x$

i) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln(x^2+1)$

6. Fie $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x^2+3}{3x}$.

a) Graficul lui f.

b) Arătaţi că $f([\frac{3}{2},\sqrt{3}])\subset[\frac{3}{2},\sqrt{3}]$

c) $\sup_{x\in[\frac{3}{2},\sqrt{3}]}|f'(x)|=?$

d) Calculaţi limita şirului: $x_1=\frac{3}{2}$, $x_{n+1}:=f(x_n)$.

7. Fie $f:[-2,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x+2}$.

a) Graficul lui f.

b) Arătaţi că $f([\sqrt{2},2])\subset[\sqrt{2},2]$.

c) $\sup_{x\in[\sqrt{2},2]}|f'(x)|=?$.

d) Calculaţi limita şirului: $x_1=\sqrt{2}$, $x_{n+1}=f(x_n)$.

1.7 Serii de numere reale

Definiţia 1.7.1. *Fie* $(x_n)_n$ *un şir de numere reale,* $n \geq 1$ *sau* $n \geq n_0$ *mai general, unde* $n_0 \in \mathbb{N}$. *Considerăm şirul*

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + x_2 + \cdots + x_n,\ n \geq 1.$$

Şirul $(S_n)_n$ *se numeşte* şirul sumelor parţiale *asociat lui* $(x_n)_n$.

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *este prin definiţie perechea* $((x_n)_n, (S_n)_n)$.

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *se numeşte* convergentă, *dacă şirul* $(S_n)_n$ *este convergent. În caz contrar, seria* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *se numeşte* divergentă.

Dacă există $\lim_n S_n = S \in \overline{\mathbb{R}}$, *atunci* S *se numeşte suma seriei* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. *În acest caz, notăm* $S = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Observaţia 1.7.2. Prin $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ înţelege atât seria cât şi suma seriei, în cazul când seria are sumă.

Exemplul 1.7.3. (1) Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ este convergentă şi are suma $S = 1$. Într-adevăr,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1},$$

deci $S = \lim_n S_n = 1$.

(2) Seria $\sum_{n=1}^{\infty} n$ este divergentă şi are suma $S = \infty$.

(3) Seria $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ este divergentă şi nu are sumă.

Propoziţia 1.7.4. *(Criteriul necesar de convergenţă) Dacă seria* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *este convergentă, atunci* $\lim_n x_n = 0$.

Demonstraţie. Trecând la limită în relaţia $x_n = S_n - S_{n-1}$, obţinem $\lim_n x_n = S - S = 0$, unde $S = \lim_n S_n$. □

Observaţia 1.7.5. Reciproca nu e adevărată, de exemplu seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă, dar $\lim_n \frac{1}{n} = 0$. Criteriul necesar de convergenţă se aplică pentru a arăta că o serie e divergentă, în cazul când $\lim_n x_n \neq 0$.

Propoziţia 1.7.6. *(Liniaritate) Fie* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *şi* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ *doă serii care au sumă. Fie* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Atunci*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n,\ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha x_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} x_n,$$

cu excepţia cazurilor de nedeterminare $\infty - \infty$ sau $0 \cdot \infty$. De exemplu,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \neq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \; (\infty - \infty).$$

Propoziţia 1.7.7. *(Seria geometrică) Fie $q \in \mathbb{R}$. Atunci:*

1. $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$*, dacă* $|q| < 1$.
2. $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \infty$*, dacă* $q \geq 1$.
3. $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ *nu are sumă, dacă* $q \leq -1$.

Serii cu termeni pozitivi

În continuare, vom presupune că $x_n > 0$, $(\forall)n$. Se observă că şirul sumelor parţiale $(S_n)_n$ este strict crescător. Prin urmare, dacă $(S_n)_n$ e mărginit, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ e convergentă, iar dacă $(S_n)_n$ nu e mărginit, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ e divergentă şi are suma ∞.

Propoziţia 1.7.8. *(Seria armonică) Fie $s \in \mathbb{R}$. Atunci:*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ *este convergentă dacă* $s > 1$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ *este divergentă dacă* $s \leq 1$.

Demonstraţie. Se poate aplica Criteriul de condensare Cauchy sau criteriul integral. □

Propoziţia 1.7.9. *(Criterii de comparaţie)*

1. *Dacă* $x_n \leq y_n$, $(\forall)n \geq n_0$, *atunci*

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} y_n \text{ convergenta} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ convergenta} \\ \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ divergenta} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} y_n \text{ divergenta} \end{cases}$$

2. *Dacă* $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{y_{n+1}}{y_n}$, $(\forall)n \geq n_0$, *atunci*

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} y_n \text{ convergenta} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ convergenta} \\ \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ divergenta} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} y_n \text{ divergenta} \end{cases}$$

3. *Dacă există* $\ell = \lim_n \frac{x_n}{y_n} \in \overline{\mathbb{R}}$, *atunci:*

   a) Dacă $\ell \in (0, \infty)$, *seriile* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *şi* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ *au aceeaşi natură.*

   b) Dacă $\ell = 0$ *şi* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ *e convergentă, atunci* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *e convergentă.*

   c) Dacă $\ell = \infty$ *şi* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ *e divergentă, atunci* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *e divergentă.*

Propoziţia 1.7.10. *(Criteriul raportului)*
Presupunem că există $\ell = \lim_n \frac{x_{n+1}}{x_n}$. *Atunci:*

1. *Dacă* $\ell < 1$, *atunci seria* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *e convergentă.*
2. *Dacă* $\ell > 1$, *atunci seria* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *e divergentă.*

Propoziţia 1.7.11. *(Criteriul rădăcinii)*
Presupunem că există $\ell = \lim_n \sqrt[n]{x_n}$. *Atunci:*

1. *Dacă* $\ell < 1$, *atunci seria* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *e convergentă.*
2. *Dacă* $\ell > 1$, *atunci seria* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *e divergentă.*

Propoziţia 1.7.12. *(Criteriul Raabe-Duhamel)*
Presupunem că există $\ell = \lim_n n(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1)$. *Atunci:*

1. *Dacă* $\ell > 1$, *atunci seria* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *e convergentă.*
2. *Dacă* $\ell < 1$, *atunci seria* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *e divergentă.*

Propoziţia 1.7.13. *(Criteriul logaritmic)*
Presupunem că există $\ell = \lim_n \frac{\ln(1/x_n)}{\ln n}$. *Atunci:*

1. *Dacă* $\ell > 1$, *atunci seria* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *e convergentă.*
2. *Dacă* $\ell < 1$, *atunci seria* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *e divergentă.*

Propoziţia 1.7.14. *(Criteriul de condensare Cauchy) Dacă şirul* $(x_n)_n$ *e descrescător şi converge la* 0, *atunci seriile* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *şi* $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x_{2^n}$ *au aceeaşi natură.*

Propoziţia 1.7.15. *(Criteriul integral)*
Fie $f : [1, \infty) \to (0, \infty)$ *o funcţie continuă şi descrescătoare. Fie* $x_n := f(n), n \geq 1$. *Atunci, seria* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *şi integrala* $\int_1^{\infty} f(x)dx$ *au aceeaşi natură.*

Serii cu termeni generali

Propoziţia 1.7.16. *(Criteriul general Cauchy)*
Seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *este convergentă, dacă şi numai dacă:* $(\forall)\epsilon > 0$, $(\exists)n_\epsilon \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $(\forall)p \geq 1$, *rezultă* $|x_{n+1} + \cdots + x_{n+p}| < \epsilon$.

Propoziţia 1.7.17. *(Criteriul Abel-Dirichlet)*
Fie $(a_n)_n$ *e un şir descrescător cu* $a_n > 0$ *şi* $\lim_n a_n = 0$. *Fie* $(x_n)_n$ *un şir pentru care şirul sumelor parţiale asociat* $S_n = x_1 + \cdots + x_n$ *este mărginit. Atunci seria* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n a_n$ *este convergentă.*

Propoziţia 1.7.18. *(Criteriul Leibniz)*

Fie $(a_n)_n$ *e un şir descrescător cu* $a_n > 0$ *şi* $\lim_n a_n = 0$. *Atunci seria* $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ *este convergentă.*

Definiţia 1.7.19. *O serie* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *se numeşte* absolut convergentă*(AC), dacă seria* $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ *este convergentă.*

Propoziţia 1.7.20. *Dacă* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este (AC) atunci* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă.*

Reciproca nu este adevărată, în general. De exemplu, seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ este convergentă (Leibniz), dar nu este absolut convergentă. O astfel de serie se numeşe *semiconvergentă*.

Aproximarea sumei unei serii convergente

Propoziţia 1.7.21. *Fie* $(a_n)_n$ *un şir cu termeni pozitivi, astfel încât seria* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *este convergentă. Fie* $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *suma seriei şi* $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $n \geq 0$, *şirul sumelor parţiale. Presupunem că există* $n_0 \in \mathbb{N}$ *şi* $\alpha < 1$ *astfel încât* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \alpha$, $(\forall) n \geq n_0$. *Atunci:*

$$0 < S - S_n \leq \frac{\alpha^{n-n_0+1}}{1-\alpha} a_n, \ (\forall) n \geq n_0.$$

Spune că S *se aproximează cu* S_n, *pentru* $n \geq n_0$, *cu eroarea* $S - S_n$. *Scriem* $S \approx S_n$.

Propoziţia 1.7.22. *Fie* $(a_n)_n$ *un şir cu termeni pozitivi, descrescător,* $\lim_n a_n = 0$. *(Atunci seria* $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ *este convergentă, conform criteriului Leibniz). Fie* $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *suma seriei şi* $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$, $n \geq 0$, *şirul sumelor parţiale. Atunci:*

$$|S - S_n| \leq a_{n+1}, \ (\forall) n \geq 0.$$

Spunem că S *se aproximează cu* S_n, *pentru* $n \geq 0$, *cu eroarea* $|S - S_n|$. *Scriem* $S \approx S_n$.

Formula lui Stirling

$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} - \frac{571}{2488320n^4} + \cdots\right)$, seria din dreapta se numeşte seria Stirling. Mai precis, conform [15], avem:

$$\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n+1}} < n! < \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}}.$$

În particular, se obţine $\lim_n \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{2\pi n}} = 1$.

Exerciţii

1. Calculaţi suma seriilor:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$

   b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n(n+1)(n+2)}$

   c) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln(1-\frac{1}{n^2})$

   d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!}$

   e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n+(-4)^{n+1}}{6^n}$

   f) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$

   g) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

   h) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}(\frac{1}{n^2+n+1})$. Indicaţie: $\operatorname{arctg}(x)-\operatorname{arctg}(y)=\operatorname{arctg}(\frac{x-y}{1+xy})$, $xy>-1$.

2. Arătaţi că seriile următoarea sunt divergente:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$

   b) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{n+1})^n$

   c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+n+1}{3n^2-n+1}$

3. Studiaţi convergenţa seriilor, folosind criterii de comparaţie:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{\sqrt{n^3+1}}$

   b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+3}$

   c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$.

   d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^a}{\sqrt{n^2+1}-n}$, $a \in \mathbb{R}$

   e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+n}-n}{n^a}$, $a \in \mathbb{R}$

   f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2^n}$

   g) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin(\frac{\pi}{2^n})$

   h) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(\frac{n^2+1}{n^2-n+2})$

   i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$

   j) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\sin(\frac{1}{n^2+n+1})$

   k) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\sin(\frac{\pi}{n^2})-1}$

   l) $\sum_{n=1}^{\infty} n(2^{\frac{1}{n}}-2^{\frac{1}{n+1}})$

   m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^{\alpha}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

n) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{n^3+2}$

p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+n^2}-\sqrt[3]{n^3-n}}{n^k+1}$, $k \in \mathbb{R}$

q) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{\sqrt[3]{n^3+n}-\sqrt[3]{n^3-n}}$, $k \in \mathbb{R}$

4. Studiaţi convergenţa seriilor, folosind criteriul raportului:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$, $a > 0$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n+3)!}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$, $a \in \mathbb{R}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3}\right)^n n!$

f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^a \cdot \ln n}{n!}$, $a \in \mathbb{R}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2n+1)}{2\cdot 5\cdots(3n-1)}$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{n^n}$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\sqrt[n]{n!}}$, $a > 0$

5. Studiaţi convergenţa seriilor, folosind criteriul Raabe-Duhamel:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$, unde $(2n-1)!! = 1\cdot 3\cdots(2n-1)$, $(2n)!! = 2\cdot 4\cdots(2n)$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a(a+1)\cdots(a+n-1)}$, $a > 0$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\cdots(a+n)}{(n+3)!}$, $a > 0$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} a^{\sqrt{n}}$, $a > 0$

6. Studiaţi convergenţa seriilor, folosind criteriul rădăcinii:

a) $\sum_{n=2}^{\infty} (\frac{2n^2+3n+1}{3n^2+2n})^n$

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{an+1}{bn+2})^n$, $a, b > 0$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{an+1}{bn+2})^{n^2}$, $a, b > 0$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} (a^n \frac{n!}{n^n})^n$, $a > 0$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} (a\frac{n^2+n+1}{n^2+1})^n$, $a > 0$

7. Studiaţi convergenţa seriilor, folosind criteriul logaritmic:

   a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

   b) $\sum_{n=1}^{\infty} a^{\ln n}$, $a > 0$

   c) $\sum_{n=1}^{\infty} a^{\sqrt[3]{n}}$, $a > 0$

   j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\ln a}}{(\ln a)^n}$, $a > 1$

8. Studiaţi convergenţa seriilor, folosind criteriul integral sau criteriul de condensare Cauchy:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, $s \in \mathbb{R}$

   b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\ln n)^a}$, $a \in \mathbb{R}$

9. Studiaţi absolut convergenţa şi convergenţa seriilor:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

   b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n}$

   c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$

   d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$

   e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(n+1)}$

   f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+2}$

   g) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \ln(\frac{n^2+1}{n^2})$

   h) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n^a}{\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}}$, $a \in \mathbb{R}$

   i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n (3^{\frac{1}{n}} - 3^{\frac{1}{n+1}})$

   j) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt[n]{n} \arcsin(\frac{1}{n})$

   k) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$. Indicaţie: $\sin(\pi\sqrt{n^2+1}) = (-1)^n \sin(\pi\sqrt{n^2+1} - \pi n)$

   l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$

   m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n(n+1)}$

   n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2 \sin n}{\sqrt{n}}$

   o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.

   Indicaţie: $\sin x + \sin(2x) + \cdots + \sin(nx) = \frac{\sin(nx/2)\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}$, $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

10. Aproximaţi cu o eroarea $\varepsilon < 10^{-3}$ suma seriilor:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot n!}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! 3^n}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n! 2^n}$

h) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}$

i) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(3n+2)^2}$

1.8 Şiruri de funcţii

Definiţia 1.8.1. *Un şir de funcţii $(f_n)_n$ este o familie de funcţii $f_n : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, indexată după $n \in \mathbb{N}^*$.*

Fie $f : D \to \mathbb{R}$. Spunem că şirul $(f_n)_n$ converge punctual *la f şi notăm $f_n \xrightarrow{C.P.} f$, dacă şirurile numerice $(f_n(x))_n$ sunt convergente pentru orice $x \in D$ şi $f(x) = \lim_n f_n(x)$, $(\forall)x \in D$. Se poate folosi şi notaţia $f = \lim_n f_n$.*

Observaţia 1.8.2. Din definiţia şirurilor convergente, se observă că $f_n \xrightarrow{C.P.} f$ dacă şi numai dacă:

$$(\forall)x \in D,\ (\forall)\varepsilon > 0,\ (\exists)n_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N},\ \text{ astfel încât } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ (\forall)n \geq n_{\varepsilon,x}.$$

Această observaţie sugerează următoarea definiţie:

Definiţia 1.8.3. *Fie $f_n : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, un şir de funcţii şi $f : D \to \mathbb{R}$. Spunem că şirul $(f_n)_n$* converge uniform *la f, şi notăm $f_n \xrightarrow{C.U.} f$, dacă:*

$$(\forall)\varepsilon > 0,\ (\exists)n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \textit{ astfel încât } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ (\forall)n \geq n_\varepsilon, (\forall)x \in D.$$

Evident, dacă $f_n \xrightarrow{C.U.} f$, atunci $f_n \xrightarrow{C.P.} f$. Reciproca însă nu este valabilă!

Propoziţia 1.8.4. *Fie $f_n : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, un şir de funcţii şi $f : D \to \mathbb{R}$.*

$$f_n \xrightarrow{C.U.} f \iff \lim_n \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Observaţia 1.8.5. Fie $(f_n)_n$ un şir de funcţii care converge punctual la f. Dacă există $\varepsilon > 0$ astfel încât $(\forall)n \in \mathbb{N}$, $(\exists)x_n \in D$ cu proprietatea că $|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon$, atunci şirul $(f_n)_n$ nu converge uniform la f.

Corolarul 1.8.6. *Fie $f_n : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, un şir de funcţii şi $f : D \to \mathbb{R}$. Presupunem că există un şir $(\alpha_n)_n$, astfel încât*

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n,\ (\forall)n \geq 1, (\forall)x \in D \textit{ şi } \lim_n \alpha_n = 0.$$

Atunci $f_n \xrightarrow{C.U.} f$.

Teoremă 1.8.7. *(Criteriul Cauchy) Fie $f_n : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, un şir de funcţii şi $f : D \to \mathbb{R}$. $f_n \xrightarrow{C.U.} f$ dacă şi numai dacă:*

$$(\forall)\varepsilon > 0,\ (\exists)n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \textit{ astfel încât } |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon,\ (\forall)n, m \geq n_\varepsilon, (\forall)x \in D.$$

Corolarul 1.8.8. *Fie $f_n : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, un şir de funcţii şi $f : D \to \mathbb{R}$. Presupunem că există un şir $(\alpha_n)_n$, a. î. $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq \alpha_n$, $(\forall)n, p \geq 1, (\forall)x \in D$ şi $\lim_n \alpha_n = 0$. Atunci $f_n \xrightarrow{C.U.} f$.*

Propoziţia 1.8.9. *Fie* $f_n : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, *un şir de funcţii şi* $f : D \to \mathbb{R}$ *astfel încât* $f_n \xrightarrow{C.U.} f$. *Atunci:*

(1) Dacă f_n *sunt mărginite, atunci* f *e mărginită.*

(2) Dacă f_n *sunt continue, atunci* f *e continuă.*

(3) Dacă f_n *sunt derivabile şi* $f_n' \xrightarrow{C.U.} g$, *atunci* f *e derivabilă şi* $f' = g$. *Cu alte cuvinte,* $(\lim_n f_n)' = \lim_n f_n'$.

(4) Dacă f_n *sunt continue pe* $[a, b] \subset D$, *atunci* $\lim_n \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{dx} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$.

Teoremă 1.8.10. *(Dini) Fie* $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, *şi* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. *Presupunem că*

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x), (\forall)x \in [a, b] \text{ (sau } f_n(x) \geq f_{n+1}(x), (\forall)x \in [a, b]).$$

Dacă $f_n \xrightarrow{C.P.} f$, *atunci* $f_n \xrightarrow{C.U.} f$.

Exerciţii

1. Studiaţi convergenţa punctuală şi uniformă:

   a) $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$.

   b) $f_n(x) = x^{2n} - x^n$, $x \in [0, 1]$.

   c) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$, $x \in [0, 1]$.

   d) $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$, $x \in \mathbb{R}$. De asemenea, pentru şirul $(f_n')_n$.

   e) $f_n(x) = e^{-nx}$, i) $x \in [0, \infty)$, ii) $x \in [1, \infty)$.

   f) $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$, i) $x \in [0, 1]$, ii) $x \in [1, \infty)$.

   g) $f_n(x) = \frac{x+n}{x+n+1}$, $x \in [0, \infty)$. Calculaţi $\lim_n \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{dx}$.

   h) $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$, $x \in [0, \infty)$.

   i) $f_n(x) = \operatorname{arctg}(nx)$, i) $x \in \mathbb{R}$, ii) $x \in [a, \infty)$, unde $a > 0$.

   j) $f_n(x) = x^{1+\frac{1}{n}}$, $x \in [1, 2]$.

   k) $f_n(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{1+n^2x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

   l) $f_n(x) = \frac{nx}{2nx+1}$, i) $x \in (0, \infty)$, ii) $x \in [1, \infty)$.

   m) $f_n(x) = x^2e^{-nx}$, $x \in [0, 1]$.

   n) $f_n(x) = xe^{-nx^2}$, $x \in [0, 1]$.

   o) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x}$, $x \in [0, \infty)$.

1.9 Serii de funcţii

Definiţia 1.9.1. *Fie $f_n : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, un şir de funcţii. Definim $S_n : D \to \mathbb{R}$,*

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} f_k = f_1 + f_2 + \cdots + f_n, \ n \geq 1.$$

Şirul $(S_n)_n$ se numeşte şirul sumelor parţiale asociat lui $(f_n)_n$.

Seria de funcţii $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este prin definiţie perechea $((f_n)_n, (S_n)_n)$.

Fie $S : D \to \mathbb{R}$. Spunem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge punctual la S, şi scriem $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \xrightarrow{C.P.} S$, dacă $S_n \xrightarrow{C.P.} S$.

Spunem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniform la S (este uniform convergentă), şi scriem $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \xrightarrow{C.U.} S$, dacă $S_n \xrightarrow{C.U.} S$.

Teoremă 1.9.2. *(Cauchy) Fie $f_n : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, un şir de funcţii. Atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă, dacă şi numai dacă:*

$$(\forall)\varepsilon > 0, \ (\exists)n_\varepsilon \geq 1 \text{ astfel încât } |f_{n+1}(x)+\cdots+f_{n+p}(x)| < \varepsilon, \ (\forall)n \geq n_\varepsilon, p \geq 1, x \in D.$$

Definiţia 1.9.3. *Fie $f_n : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, un şir de funcţii. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ se numeşte absolut uniform convergentă, dac ua seria $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ este uniform convergentă.*

La fel ca în cazul seriilor numerice, dacă $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este absolut uniform convergentă, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este convergentă, însă reciproca este falsă în general.

Teoremă 1.9.4. *(Weierstrass) Fie $f_n : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, un şir de funcţii, şi $(\alpha_n)_n$ un şir cu termeni pozitivi. Presupunem că*

$$|f_n(x)| \leq \alpha_n, \ (\forall)n \geq 1, (\forall)x \in D \text{ şi } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \text{ e convergentă.}$$

Atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este absolut uniform convergentă, deci uniform convergentă.

Teoremă 1.9.5. *(Abel-Dirichlet) Fie $f_n : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, un şir de funcţii, astfel încât şirul sumelor parţiale $(S_n)_n$ este uniform mărginit, adică: $(\exists)M > 0$ astfel încât $|S_n(x)| < M$, $(\forall)x \in D$.*

Fie $a_n : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, un şir de funcţii cu proprietatea că $a_n(x) \geq a_{n+1}(x)$, $(\forall)x \in D$, şi $a_n \xrightarrow{C.U.} 0$.

Atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$ este uniform convergentă.

Teoremă 1.9.6. *(Leibniz) Fie $a_n : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, un şir de funcţii cu proprietatea că $a_n(x) \geq a_{n+1}(x)$, $(\forall)x \in D$, şi $a_n \xrightarrow{C.U.} 0$. Atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ este uniform convergentă.*

Demonstraţie. Fie $f_n : D \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = (-1)^n$, $(\forall)n \geq 1$ şi $x \in D$. Aplicăm Teorema Abel-Dirichlet. □

Propoziţia 1.9.7. *Fie $f_n : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, un şir de funcţii, $S : D \to \mathbb{R}$, astfel încât $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \xrightarrow{C.U.} S$. Atunci:*

(1) Dacă f_n sunt continue, atunci S e continuă.

(2) Dacă f_n sunt derivabile şi $\sum_{n=1}^{\infty} f_n' \xrightarrow{C.U.} T$, unde $T : D \to \mathbb{R}$, atunci T este derivabilă şi $S' = T$. Cu alte cuvinte, $(\sum_{n=1}^{\infty} f_n)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$.

(3) Dacă f_n sunt continue pe $[a,b] \subset D$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{dx} = \int_a^b S(x)\,\mathrm{dx}$.

Propoziţia 1.9.8. *Fie $(a_n)_n$ un şir descrescător de numere reale pozitive. Atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)$ este uniform convergentă, dacă şi numai dacă $\lim_n na_n = 0$.*

Exemplul 1.9.9. Considerăm seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$, $x \in \mathbb{R}$. Folosind criteriul Abel-Dirichlet, se poate arăta că seria este punctual convergentă. Pe de altă parte, din propoziţia anterioară, rezultă că seria nu este uniform convergentă. De observat că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ nu este absolut convergentă pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Într-adevăr, avem:

$$\frac{|\sin(nx)|}{n} \geq \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{1-\cos(2nx)}{2n} = \frac{1}{2n} - \frac{\cos(2nx)}{2n}.$$

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ este divergentă. Folosind criteriul Abel-Dirichlet, se arată că $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{2n}$ este convergentă pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. ($\cos x + \cos(2x) + \cdots + \cos(nx) = \frac{\sin(nx/2)\cos((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}$, $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$). Rezultă că $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(nx)|}{n}$ este divergentă.

Exerciţii

1. Studiaţi convergenţa punctuală şi uniformă a şirurilor de funcţii:
   a) $\sum_{n=1}^{\infty}(x^n - x^{n-1})$, $x \in [0,1]$,
   b) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sin(\frac{x}{n+1}) - \sin(\frac{x}{n}))$, i) $x \in \mathbb{R}$, ii) $x \in [0,1]$,
   c) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{nx}{1+n+x} - \frac{(n-1)x}{n+x})$, $x \in [0,1]$,
   d) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2})$, $x \in [0,1]$,
   e) $\sum_{n=1}^{\infty} na^{-nx}$, i) $x \in \mathbb{R}$, ii) $x \in (0,\infty)$, iii) $x \in [1,\infty)$.

2. Arătaţi că seriile următoare sunt uniform convergente:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^{-nx}}{x+n^2}$, $x \in [0, \infty)$,

   b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{x^2+n^3}}$, $x \in \mathbb{R}$,

   c) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}(\frac{1}{x^2+n^2})$, $x \in \mathbb{R}$,

   d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+n)^2}{n^4}$, $x \in [0, 1]$,

   e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}$, $\alpha > 1$, $x \in [0, 1]$,

   f) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$, $x \in [1, \infty)$.

3. Arătaţi că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2\sqrt{n}}$ este uniform convergentă pe $\mathbb{R}$ şi poate fi derivată termen cu termen.

4. Arătaţi că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ este uniform convergentă pe $\mathbb{R}$ dar nu poate fi derivată termen cu termen.

5. Arătaţi că seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(3^n x)}{6^n}$ este uniform convergentă pe $\mathbb{R}$. Fie $S(x)$ suma seriei, $x \in \mathbb{R}$. Arătaţi că S este o derivabilă şi calculaţi $S'(\pi/3)$.

6. Arătaţi că $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2^n x)}{6^n}$ este uniform convergentă pe $\mathbb{R}$. Fie $S(x)$ suma seriei, $x \in \mathbb{R}$. Arătaţi că S este o derivabilă şi calculaţi $S'(\frac{\pi}{4})$.

1.10 Formula lui Taylor. Serii de puteri

Definiţia 1.10.1. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$ derivabilă de n-ori în $x_0 \in I$.*

1. Polinomul Taylor *de ordin n al lui f în x_0 este:*

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

2. $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ *se numeşte* restul Taylor *de ordin n.*

3. $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ *se numeşte* formula Taylor *de ordin n*

Teoremă 1.10.2. *Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este de clasă $C^{(n+1)}(I)$ şi $x \in I$, atunci $(\exists)c \in (x_0, x)$ (sau (x, x_0)) astfel încât*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Formula de mai sus se numeşte forma Lagrange a lui $R_n(x)$.

Observaţia 1.10.3. Dacă f este de clasă $C^\infty(I)$ şi pentru $x \in I$ avem $\lim_n R_n(x) = 0$, atunci $f(x) = \lim_n T_n(x) =: \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$. Dacă $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$, $(\forall)x \in V$, unde V e o vecinătate a lui x_0, spunem că f este *analitică* în x_0 şi scriem că $f \in C^\omega(x_0)$. f se numeşte *analitică* pe I dacă e analitică în orice punct din I.

Nu toate funcţiile de clasă C^∞ sunt analitice. De exemplu, pentru $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, $f^{(n)}(0) = 0, (\forall)n \geq 0$. Prin urmare, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ dacă şi numai dacă $x = 0$, deci f nu e analitică în 0. Pe de altă parte $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Definiţia 1.10.4. *Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale. Considerăm şirul de funcţii $f_n(x) = a_n x^n$, $n \geq 0$. Se numeşte serie de puteri, seria de funcţii $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Mulţimea (domeniul) de convergenţă a seriei de puteri este*

$$D := \{x \in \mathbb{R} \mid (S_n(x))_n \text{ este convergent } \}.$$

Funcţia $S : D \to \mathbb{R}$, definită prin $S(x) := \lim_{n\to\infty} S_n(x) =: \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ se numeşte suma seriei de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Teoremă 1.10.5. *(Abel) Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale şi $R := \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}}$. Atunci $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este absolut convergentă (ca serie numerică) pentru orice $x \in (-R, R)$ şi divergentă pe $(-\infty, -R) \cup (R, \infty)$. R se numeşte raza de convergenţă a seriei de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Fie D domeniul de convergenţă al seriei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.*

(1) $R = 0 \Rightarrow D = \{0\}$.

(2) $R = \infty \Rightarrow D = \mathbb{R}$.

(3) $R \in (0, \infty) \Rightarrow D = (-R, R), [-R, R), (-R, R]$ sau $[-R, R]$.

Mai mult, dacă $K \subset D$ e compactă, atunci seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este uniform absolut convergentă pe K.

Dacă şirul $\sqrt[n]{|a_n|}$ este convergent şi $a_n > 0$, $(\forall) n \geq 0$ atunci

$$R = \frac{1}{\lim_n \sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_n \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

Teoremă 1.10.6. *Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri cu raza de convergenţă $R > 0$ şi cu domeniul de convergenţă D. Atunci:*

(1) Seria $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ are raza de convergenţă R, funcţia S e derivabilă pe $(-R, R)$ şi

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = S'(x),\ (\forall) x \in (-R, R).$$

Cu alte cuvinte, $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)'$, $(\forall) x \in (-R, R)$.

(2) Seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ are raza de convergenţă R şi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n \,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \int_0^x S(t) \,\mathrm{d}t = \int_0^x (\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n) \,\mathrm{d}t,\ (\forall) x \in D.$$

Dezvoltări în serii de puteri

1. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
2. $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
3. $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
4. $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$, $(\forall) x \in (-1, 1)$.

5. $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$, $(\forall)x \in (-1,1)$.

6. $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$, $(\forall)x \in (-1,1)$.

7. $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$, $(\forall)x \in (-1,1]$.

8. $\operatorname{arctg}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$, $(\forall)x \in [-1,1]$.

9. $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$, $(\forall)x \in (-1,1)$.

10. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}$, $x \in (-1,1)$, unde $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdots (2n)$ şi $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdots (2n-1)$.

11. $\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} x^{2n+1}$, $x \in [-1,1]$

Exerciţii

1. Determinaţi raza de convergenţă şi domeniul de convergenţă al seriilor:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n x^n$

   b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n}$

   c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

   d) $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$

   e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

   f) $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{n}{n+1})^n x^n$

   g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} x^n$

   h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} x^{2n}$

   i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n \cdot 2^n}$

   j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(\frac{2x}{x+3})^n$

   k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}(\frac{1+x}{1-x})^n$

2. Determinaţi domeniul de convergenţă şi suma seriilor:

   a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-3)^n x^n$

   b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n!}$

   c) $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$

   d) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$

   e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{3^n(n+1)}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n}$

h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$

j) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{3n+1}}{3n+1}$

k) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+1}}{4n+1}$

l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{(n(2n-1))}$

n) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+2)3^n}$

o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n \cdot n!}$

p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n(2n-1)!}$

3. Fie $f(x) = \sqrt{x+4}$. Calculaţi $T_1(x), T_2(x)$ în jurul lui 0. Aproximaţi $\sqrt{4,5}$ cu $T_2(x)$ şi estimaţi eroarea.

4. Fie $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+4}}$. Calculaţi $T_1(x), T_2(x)$ în jurul lui 0. Aproximaţi $\frac{1}{\sqrt{4,5}}$ cu $T_2(x)$ şi estimaţi eroarea.

5. Fie $f(x) = \ln(1+x)$. Calculaţi $T_3(x)$ în jurul lui 0. Aproximaţi $\ln(1.2)$ cu $T_3(x)$ şi estimaţi eroarea.

6. Fie $f(x) = \sqrt[3]{x+8}$. Calculaţi $T_2(x) =?$ în jurul lui 0. Aproximaţi $\sqrt[3]{9}$ cu $T_3(x)$ şi estimaţi eroarea.

7. Aproximaţi $\cos(0.2), \sin(0.2)$ şi $\frac{1}{\sqrt{e}}$ folosind $T_3(x)$ şi estimaţi eroarea.

8. Fie $a \in \mathbb{R}$. Arătaţi că $\mathcal{B}_a = \{(X-a)^n : \ n \geq 0\}$ este o bază a spaţiului vectorial real $\mathbb{R}[X]$. Scrieţi $P(X) = 2X^3 - 3X^2 + X + 1$ în $\mathcal{B}_2$.

9. Scrieţi dezvoltarea în serie de puteri a funcţiilor:

a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

b) $f(x) = \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

c) $f(x) = \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

d) $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{dt}$

e) $f(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t} dt$

g) $f(x) = \int_0^x \frac{\arcsin t}{t}\,\mathrm{dt}$

h) $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{dt}$

i) $f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2}$

j) $f(x) = \frac{3}{(1-x)(1+2x)}$

k) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$, $x \neq 0$

10. Folosind dezvoltarea în serie de puteri, aproximaţi cu o eroarea $< 10^{-3}$:

a) $\int_0^{1/2} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{dx}$

b) $\int_0^{1/2} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,\mathrm{dx}$

c) $\int_0^{1/2} \frac{\arcsin x}{x}\,\mathrm{dx}$

d) $\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{dx}$

e) $\int_0^{1/2} \frac{1-\cos x}{x^2}\,\mathrm{dx}$

f) $\int_0^1 \cos(x^2)\,\mathrm{dx}$

g) $\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}\,\mathrm{dx}$

h) $\int_0^{1/2} \frac{\ln(x+1)}{x}\,\mathrm{dx}$

1.11 Structuri în spaţiul $\mathbb{R}^n$

Definiţia 1.11.1. *Fie V o mulţime nevidă. Spunem că V are structură de spaţiu vectorial real, dacă există două operaţii:*

$$V \times V \to V,\ (x,y) \mapsto x+y,\ \textit{numită adunare, şi}$$
$$\mathbb{R} \times V \to V,\ (\alpha,x) \mapsto \alpha \cdot x,\ \textit{numită înmulţire cu scalari,}$$

astfel încât $(V,+)$ este grup comutativ şi în plus sunt îndeplinite următoarele condiţii:

(1) $\alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$

(2) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot y$

(3) $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$

(4) $1 \cdot x = x$

Observaţia 1.11.2. Într-un spaţiu vectorial real V, se verifică următoarele proprietăţi:

(1) $0 \cdot x = \mathbf{0}$, pentru orice $x \in V$, unde $\mathbf{0}$ este elementul neutru din $(V,+)$, numit şi vectorul nul.

(2) $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$, pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$.

(3) $(-1) \cdot \cdot \cdot x = -x$, pentru orice $x \in V$, unde $-x$ este vectorul opus lui x.

Propoziţia 1.11.3. $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ *are structură de spaţiu vectorial peste* $\mathbb{R}$*, cu operaţiile:*

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$
$$\alpha \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n).$$

Definiţia 1.11.4. *Fie V un spaţiu vectorial real. O aplicaţie $\langle, \cdot, \cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ se numeşte produs scalar, dacă verifică următoarele proprietăţi:*

(1) $\langle x, x\rangle \geq 0,\ (\forall) x \in V;\ \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}.$

(2) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle,\ (\forall) x, y \in V.$

(3) $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle,\ (\forall) x, y, z \in V,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

Spunem că $(V, \langle, \rangle)$ este un spaţiu vectorial euclidian.

Propoziţia 1.11.5. *(Inegalitatea Schwarz-Cauchy-Buniakovski) Fie $(V, \langle, \rangle)$ un spaţiu vectorial euclidian. Atunci:*

$$\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle,\ (\forall) x, y \in \mathbb{V}.$$

Propoziţia 1.11.6. *Aplicaţia* $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *definită prin*

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n,\ (\forall)x, y \in \mathbb{R}^n,$$

este un produs scalar, numit produsul scalar standard pe $\mathbb{R}^n$.

$(\mathbb{R}^n, \langle,\rangle)$ *este un spaţiu vectorial euclidian.*

Definiţia 1.11.7. *Fie* V *un spaţiu vectorial real. O aplicaţie* $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}_+$ *se numeşte normă, dacă verifică următoarele proprietăţi:*

(1) $||x|| \geq 0$, $(\forall)x \in V$. $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}$.

(2) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$, $(\forall)x \in V$.

(3) $||\alpha \cdot x|| = |\alpha| \cdot ||x||$, $(\forall)x \in V, \alpha \in \mathbb{R}$.

Spunem că $(V, ||\cdot||)$ *este un spaţiu vectorial normat.*

Propoziţia 1.11.8. *Dacă* $(V, \langle,\rangle)$ *este un spaţiu euclidian, atunci aplicaţia*

$$||\cdot|| : V \to \mathbb{R}_+,\ ||x|| := \langle x, x\rangle,\ (\forall)x \in V,$$

este o normă, numită normă euclidiană.

Produsul scalar standard pe $\mathbb{R}^n$ *induce norma (euclidiană):*

$$||\cdot|| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+,\ ||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = x_1^2 + \cdots + x_n^2,\ (\forall)x \in \mathbb{R}^n.$$

Propoziţia 1.11.9. *Fie* $(V, ||\cdot||)$ *un spaţiu vectorial normat. U.A.S.E.:*

(1) $||\cdot||$ *este o normă euclidieană.*

(2) $||\cdot||$ *verifică "identitatea paralelogramului":*

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2,\ (\forall)x, y \in V.$$

În plus, dacă $||\cdot||$ *e o normă euclidiană, atunci produsul scalar din care provine este* $\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}(||x + y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2)$.

Definiţia 1.11.10. *Fie* X *o mulţime nevidă. O aplicaţie* $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ *se numeşte distanţă (metrică), dacă verifică următoarele proprietăţi:*

(1) $d(x, y) \geq 0$, $(\forall)x, y \in X$. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

(2) $d(x, y) = d(y, x)$, $(\forall)x, y \in X$.

(3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, $(\forall)x, y, z \in X$.

Spunem că (X, d) *este un spaţiu metric.*

Propoziţia 1.11.11. *Fie $(V, ||\cdot||)$ un spaţiu vectorial normat. Aplicaţia*

$$d : V \times V \to \mathbb{R}_+,\ d(x, y) := ||y - x||,\ (\forall)x, y \in V,$$

este o distaţă pe V.

Distanţa (euclidiană) pe $\mathbb{R}^n$ (indusă de norma euclidiană) este

$$d(x, y) := ||y - x|| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2},\ (\forall)x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Observaţia 1.11.12. Produsul scalar standard pe $\mathbb{R}$ este produsul uzual al numerelor reale. Norma indusă este modulul unui număr real, iar distanţa indusă este

$$d(x, y) = |y - x|, (\forall)x, y \in \mathbb{R},$$

adică distanţa dintre două numere de pe dreapta reală.

Definiţia 1.11.13. *Fie X o mulţime nevidă şi $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ o familie de submulţimi a lui X. Spunem că τ este o topologie pe X, dacă verifică următoarele proprietăţi:*

(1) $\emptyset, X \in \tau$.

(2) Dacă $D_1, D_2 \in \tau$, atunci $D_1 \cap D_2 \in \tau$.

(3) Dacă $(D_i)_i$ este o familie de submulţimi ale lui τ, atunci $\bigcup_i D_i \in \tau$.

Spunem că (X, τ) este un spaţiu topologic.

Mulţimile $D \in \tau$ se numesc deschise.

O mulţime F se numeşte închisă *dacă $X \setminus D$ este deschisă.*

O mulţime $V \subset X$ se numeşte vecinătate *pentru $x \in X$, dacă există o mulţime deschisă D, astfel încât $x \in D \subset V$.*

Definiţia 1.11.14. *Fie (X, τ) şi (X', τ') două spaţii topologice. O funcţie $f : X \to X'$ se numeşte continuă, dacă $(\forall)D' \in \tau'$, rezultă $f^{-1}(D') \in \tau$.*

Propoziţia 1.11.15. *Fie (X, τ) şi (X', τ') două spaţii topologice şi $f : X \to X'$ o funcţie. f este continuă dacă şi numai dacă:*

$(\forall)x \in X$, $(\forall)V \subset X'$ vecinătate pt. $f(x)$, $(\exists)U \subset X$ vecinătate pt. x a.î. $f(U) \subset V$.

Definiţia 1.11.16. *Fie (X, d) un spaţiu metric. Fie $a \in X$ şi $r > 0$, un număr real.*

(1) $B(a, r) := \{x \in X \mid d(a, x) < r\}$ se numeşte bila deschisă *de centru a şi rază r.*

(2) $\bar{B}(a, r) := \{x \in X \mid d(a, x) \leq r\}$ se numeşte bila închisă *de centru a şi rază r.*

(3) $S(a,r) := \{x \in X \mid d(a,x) = r\}$ se numeşte sfera *de centru a şi rază r.*

Exemplul 1.11.17. Considerăm $\mathbb{R}^n$ cu distanţa euclidiană.

(1) $n = 1$. Dacă $a \in \mathbb{R}$ şi $r > 0$, atunci $B(a,r) = (a-r, a+r)$, $\bar{B}(a,r) = [a-r, a+r]$ şi $S(a,r) = \{a-r, a+r\}$.

(2) $n = 2$. Fie $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ şi $r > 0$. Atunci

$$B((a,b),r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2\}$$

este discul deschis cu centrul în (a,b) şi rază r. De asemenea, $\bar{B}((a,b),r)$ este discul închis, iar $S((a,b),r)$ este cercul, cu centrul (a,b) şi rază r. În mod uzual, se folosesc notaţiile $D((a,b),r)$, respectiv $C((a,b),r)$ pentru disc, respectiv cerc.

(3) $n = 3$. Fie $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ şi $r > 0$. Atunci

$$B((a,b,c),r) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \leq r^2\}$$

este bila deschisă (3-dimensională) cu centrul (a,b,c) şi rază r. Similar, $\bar{B}((a,b,c),r)$ este bila închisă, iar $S((a,b,c),r)$ e sfera (în sens uzual), cu centrul(a,b,c) şi rază r.

Definiţia 1.11.18. *Fie (X,d) un spaţiu metric şi $A \subset X$ o submulţime.*

(1) $a \in A$ este un punct interior, dacă $(\exists)r > 0$ astfel încât $B(a,r) \subset A$.

(2) $x \in X$ este un punct aderent la A, dacă $(\forall)r > 0$, avem $B(x,r) \cap A \neq 0$.

(3) $a \in A$ este un punct izolat, dacă $(\exists)r > 0$ astfel încât $B(a,r) \cap A = \{a\}$.

(4) $x \in X$ e un punct de acumulare pentru A, dacă $(\forall)r > 0$, avem $(B(x,r) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$. Cu alte cuvinte, x este aderent, dar nu e izolat.

(5) $x \in X$ este un punct frontieră pentru A, dacă este aderent la A, dar nu e punct interior.

Definiţia 1.11.19. *Fie (X,d) un spaţiu metric şi $A \subset X$ o submulţime.*

(1) $\mathring{A}$:= mulţimea punctelor interioare ale lui A, se numeşte interiorul mulţimii A.

(2) $\bar{A}$:= mulţimea punctelor aderente la A, se numeşte închiderea lui A.

(3) Notăm $\mathrm{Iz}(A)$:= mulţimea punctelor izolate din A.

(4) Notăm A' := mulţimea punctelor de acumulare pentru A.

(5) $\partial A = \mathrm{Fr}(A)$:= mulţimea punctelor frontieră pentru A, se numeşte frontiera mulţimii A.

Mulţimea $D \subset X$ *se numeşte deschisă, dacă* $D = \mathring{D}$.

Mulţimea $F \subset X$ *se numeşte închisă, dacă* $F = \bar{F}$. *Se observă imediat că* F *e închisă dacă şi numai dacă* $X \setminus F$ *este deschisă.*

Propoziţia 1.11.20. *Fie* $A \subset X$. *Avem că:*
1) $\mathring{A} \subset A \subset \bar{A}$, *2)* $A' = \bar{A} \setminus \mathrm{Iz}(A)$, *3)* $\partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A}$.

Propoziţia 1.11.21. *Fie* (X, d) *un spaţiu metric. Familia* τ *a mulţimilor deschise din* X, *în sensul definiţiei 1.11.19, este o topologie pe* X, *numită topologie metrică.*

Dacă $x \in X$, *o submulţime* $V \subset X$ *este vecinătate pentru* x, *dacă* $(\exists) r > 0$ *astfel încât* $B(x, r) \subset V$.

Definiţia 1.11.22. *Fie* (X, d) *un spaţiu metric. Un şir de elemente din* X, *este o funcţie* $x : \mathbb{N} \to X$. *La fel ca în cazul şirurilor numerice, folosim notaţia* $(x_n)_n$ *pentru a desemna şirul* x.

Definiţia 1.11.23. *Fie* (X, d) *un spaţiu metric. Spunem că şirul* $(x_n)_n$ *converge la* $x \in X$ *dacă verifică una din condiţiile echivalente:*

(1) Oricare ar fi V *o vecinătate pentru* x, $(\exists) n_V \in \mathbb{N}$, *astfel încât* $x_n \in V$, $(\forall) n \geq n_V$.

(2) Oricare ar fi $\varepsilon > 0$, $(\exists) n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, *astfel încât* $d(x_n, x) < \varepsilon$, $(\forall) n \geq n_\varepsilon$.

Observaţia 1.11.24. Fie $(x_n, y_n)_n$ un şir de elemente din $\mathbb{R}^2$ şi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Atunci $\lim_n (x_n, y_n) = (x, y)$ dacă şi numai dacă $\lim_n x_n = x$ şi $\lim_n y_n = y$. (Afirmaţia se poate generaliza pentru $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$)

Propoziţia 1.11.25. *Fie* (X, d) *un spaţiu metric,* $A \subset X$ *şi* $x \in X$. *Atunci:*

1. $x \in \bar{A}$ *dacă şi numai dacă, există un şir* $(x_n)_n$ *cu* $x_n \in A$, $(\forall) n$, *astfel încât* $\lim_n x_n = x$.

2. $x \in A'$ *dacă şi numai dacă, există un şir* $(x_n)_n$ *cu* $x_n \in A \setminus \{x\}$, $(\forall) n$, *astfel încât* $\lim_n x_n = x$.

Propoziţia 1.11.26. *Fie* (X, d) *şi* (X', d') *două spaţii metrice,* $f : D \subset X \to X'$ *o funcţie şi* $a \in X$. *U.A.S.E.:*

1. f *este continuă în* a, *i.e.* $(\forall) V \subset X'$ *vecinătate a lui* $f(a)$, $(\exists) U \subset X$ *vecinătate a lui* a, *astfel încât* $f(U) \subset V$.

2. $(\forall) \varepsilon > 0$, $(\exists) \delta_\varepsilon > 0$ *astfel încât* $(\forall) x \in X$ *cu* $d(x, a) < \delta_\varepsilon$, *avem* $d'(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

3. $(\forall)(x_n)_n$ *un şir de elemente din* X *cu* $\lim_n x_n = a$, *rezultă că* $\lim_n f(x_n) = f(a)$.

Definiţia 1.11.27. *Fie (X, d) şi (X', d') două spaţii metrice şi $f : D \subset X \to X'$ o funcţie. Fie $a \in X$ un punct de acumulare pentru D şi $\ell \in X'$. Spunem că f are limita ℓ în a şi scriem $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$, dacă funcţie $g : D \to X'$, $g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D \setminus \{a\} \\ \ell, & x = a \end{cases}$ este continuă în a.*

Propoziţia 1.11.28. *Fie (X, d) şi (X', d') două spaţii metrice şi $f : D \subset X \to X'$ o funcţie. Fie $a \in X$ un punct de acumulare pentru D şi $\ell \in X'$. Atunci $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$, dacă şi numai dacă, pentru orice şir $(x_n)_n$ de elemente din $D \setminus \{a\}$ cu $\lim_n x_n = a$, rezultă că $\lim_n f(x_n) = \ell$.*

Exerciţii

1. Fie $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 < 1\}$. Reprezentaţi grafic D. Este D o mulţime deschisă? Determinaţi $\overline{D}$ şi ∂D.

2. Fie $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$. Este K compactă? Este K conexă? Este K simplu conexă? (Justificaţi)

3. Arătaţi că $|| \cdot ||_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, $||x||_p := (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$, unde $p \in (0, \infty)$, este o normă. Mai mult, $||x||_p$ este euclidiană, dacă şi numai dacă $p = 2$, caz în care coincide cu norma indusă de produsul scalar standard din $\mathbb{R}^n$.

4. Arătaţi că $d_\infty(x, y) = \max_{i=1}^n\{|y_i - x_i|\}$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ este o distanţă.

5. Arătaţi că $\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{dx}$ este un produs scalar în spaţiul vectorial real $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) := \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ continuă }\}$.

6. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Studiaţi continuitatea lui f:

   a) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3+2y^3}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

   b) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

   c) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2+y^3}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

   d) $f(x, y) = \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x^2+y^2}), & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

1.12 Teorema lui Banach de punct fix.

Definiţia 1.12.1. *Fie (X, d) un spaţiu metric. Spunem că şirul $(x_n)_n$ este Cauchy (fundamental), dacă:*

$$(\forall)\varepsilon > 0,\ (\exists)n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \textit{astfel încât } d(x_n, x_m) < \varepsilon, (\forall)n \geq n_\varepsilon.$$

Propoziţia 1.12.2. *Dacă şirul $(x_n)_n$ este convergent, atunci el este şir Cauchy. (Reciproca e falsă în general!)*

Definiţia 1.12.3. *Un spaţiu metric (X, d) se numeşte complet, dacă orice şir Cauchy din X este convergent.*

Observaţia 1.12.4. (1) Spaţiul metric $(\mathbb{R}^n, d)$, cu distanţa euclidiană, este complet.

(2) Fie (X, d) un spaţiu metric complet şi $X' \subset X$ o submulţime nevidă. X' are structură de spaţiu metric, împreuna cu restricţia distanţei d din X. Spunem că (X', d) este un subspaţiu metric al lui (X, d). Atunci X' este complet dacă şi numai dacă X' este o submulţime închisă în X.

(3) Pentru a exemplifica (2), fie $I = (0, 1]$ cu distanţa uzuală din $\mathbb{R}$. I nu este un spaţiu complet. De exemplu, şirul $x_n = \frac{1}{n}$, $n \neq 1$, este un şir Cauchy de elemente din I, dar nu converge în I! (Evident, pentru că $\lim_n \frac{1}{n} = 0 \notin I$.) Pe de altă parte, dacă I este un interva închis, adică $I = \mathbb{R}$, $I = [a, \infty)$, $I = (-\infty, b]$ sau $I = [a, b]$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, atunci I este un spaţiu metric complet.

(3) Spaţiul metric $(\mathbb{Q}, d)$, cu distanţa uzuală, nu este complet. Într-adevăr, se poate arăta că închiderea mulţimii $\mathbb{Q}$ este $\bar{Q} = \mathbb{R}$.

Definiţia 1.12.5. *Fie (X, d) un spaţiu metric şi $k \in [0, 1)$. O aplicaţie $f : X \to X$ se numeşte contracţie de factor k, dacă*

$$d(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y),\ (\forall)x, y \in X.$$

Observaţia 1.12.6. O contracţie $f : X \to X$ este o funcţie continuă.

Teoremă 1.12.7. *(Banach de punct fix) Fie (X, d) un spaţiu metric complet şi $f : X \to X$ o contracţie de factor $k \in [0, 1)$. Atunci există un unic $\alpha \in X$ punct fix pentru f, i.e $f(\alpha) = \alpha$. Mai mult, avem*

$$d(x_n, \alpha) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0),\ (\forall)n \geq 1.$$

Reamintim următorul caz particular al Teoremei Banach, enunţat în secţiunea 1.8:

Propoziţia 1.12.8. *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval deschis şi $f : I \to I$ o funcţie de clasă C^1. Dacă $k = \sup_{x\in I} |f'(x)| < 1$, atunci f este o contraţie pe I de factor k. Mai mult, dacă $\alpha \in I$ este punctul fix al lui f, $x_0 \in I$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \geq 0$, atunci $\alpha = \lim_n x_n$ şi*

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|,\ (\forall) n \geq 1.$$

Propoziţia 1.12.9. *(Metoda lui Newton) Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de clasă C^2 astfel încât ecuaţia $f(x) = 0$ are o soluţie unică $\alpha \in [a, b]$. Presupunem că există $k < 1$ astfel încât $|f(x)f''(x)| < kf'(x)^2$, $(\forall)x \in [a, b]$. Atunci şirul $x_0 = a$, $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n \geq 0$, converge la α.*

Mai mult, $|x_n - \alpha| < \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|$.

Exerciţii

1. Studiaţi dacă funcţiile următoare sunt contracţii:

   a) $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$

   b) $f(x) = q \sin x$, $q \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$

   c) $f(x) = \ln x + e - 1$, $x \in [e, \infty)$

   d) $f(x) = \frac{2x}{4+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

2. Arătaţi că $f : [\sqrt{2}, \frac{3}{2}] \to [\sqrt{2}, \frac{3}{2}]$, $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$ este o contraţie. Aproximaţi $\sqrt{2}$ cu o eroare $< 10^{-3}$.

3. Arătaţi că t $f : [\frac{3}{2}, \sqrt{3}] \to [\frac{3}{2}, \sqrt{3}]$, $f(x) = \frac{2x}{3} + \frac{1}{x}$ este o contraţie. Aproximaţi $\sqrt{3}$ cu o eroare $< 10^{-2}$.

4. Calculaţi cu o eroare $< 10^{-3}$ soluţia reală α a ecuaţiei:

   a) $x^3 + 4x - 1 = 0$

   b) $x^3 + 12x - 1 = 0$

   c) $x^3 + x^2 - 6x + 1 = 0$, $\alpha \in [0, 1]$

5. Folosind metoda lui Newton, aproximaţi $\sqrt[3]{2}$ cu o eroare $< 10^{-2}$.

   (Indicaţie: $x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2 < 0$, $(\forall)x \in [1, 2]$)

1.13 Derivate parţiale. Diferenţiale.

În cele ce urmează, vom studia funcţii $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, unde $m, n \in \mathbb{N}^*$. Avem că

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)),\ (\forall)x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Funcţiile $f_1, \dots, f_m : D \to \mathbb{R}$ se numesc componentele lui f. Notăm $f = (f_1, \dots, f_m)$. Continuitatea lui f se defineşte în raport cu metricile euclidiene din $\mathbb{R}^n$ şi $\mathbb{R}^m$.

Propoziţia 1.13.1. *Fie $f = (f_1, \dots, f_m) : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ şi $a \in D$. Atunci f este contină în a (respectiv pe D) dacă şi numai dacă $f_1, \dots, f_m$ sunt continue în a (respectiv pe D).*

Definiţia 1.13.2. *Fie $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, $f(t) = (f_1(t), \dots, f_m(t))$, unde $f_k : (a, b) \to \mathbb{R}$. Spunem că f este derivabilă în t_0, dacă*

$$(\exists)f'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \in \mathbb{R}^m.$$

Vectorul $f'(t_0)$ se numeşte derivata lui f în t_0.

f se numeşte derivabilă pe (a, b), dacă e derivabilă în fiecare punct din (a, b), caz în care funcţia $f' : (a, b) \to \mathbb{R}^m$ se numeşte derivata lui f.

Propoziţia 1.13.3. *$f : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, $f(t) = (f_1(t), \dots, f_m(t))$ este derivabilă în t_0 (pe (a, b)) dacă şi numai dacă $f_1, \dots, f_m : (a, b) \to \mathbb{R}$ sunt derivabile în t_0 (respectiv pe (a, b)). În plus, $f'(t_0) := (f_1'(t_0), \dots, f_m'(t_0))$ (respectiv $f' = (f_1', \dots, f_m') : (a, b) \to \mathbb{R}^m$).*

Definiţia 1.13.4. *Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă, $f : D \to \mathbb{R}^m$ o funcţie şi $a \in D$. Fie $s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ un vector cu $||s|| = 1$. Fie $r > 0$ astfel încât $B(a, r) \subset D$ şi*

$$g : (-r, r) \to \mathbb{R}^m,\ g(t) = f(a + ts) = f(a_1 + ts_1, a_2 + ts_2, \dots, a_n + ts_n),\ (\forall)t \in (-r, r).$$

Spunem că f este derivabilă în a, după direcţia lui s, dacă g este derivabilă în 0.

Vectorul

$$\frac{df}{ds}(a) := g'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + ts) - f(a)}{t}$$

se numeşte derivata lui f în a, după direcţia lui s. Dacă f este derivabilă în orice punct, după direcţia lui s, funcţia $\frac{df}{ds} : D \to \mathbb{R}^m$ se numeşte derivata lui f după direcţia lui s.

Definiţia 1.13.5. *Fie $\{e_1, \dots, e_n\}$ baza canonică din $\mathbb{R}^n$, adică $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, unde 1 este pe poziţia i. Spunem că f este derivabilă parţial, în raport cu x_i, în a, dacă*

$$(\exists)\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) := \frac{df}{de_i}(a) = \lim_{x_i \to a_i} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{x_i - a_i} \in \mathbb{R}^m.$$

Vectorul $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ se numeşte derivata parţială a lui f, în raport cu x_i, în a. Dacă f este derivabilă parţial în raport cu x_i, în orice punct, atunti $\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \to \mathbb{R}^m$ se numeşte derivata parţială a lui f în raport cu x_i.

Observaţia 1.13.6. De observat că, dacă $f = (f_1, \dots, f_m)$, unde $f_k : D \to \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq m$, sunt componentele lui f, atunci f e derivabilă parţial în a dacă şi numai dacă $f_1, \dots, f_m$ sunt derivabile parţial în a şi $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = (\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(a))$.

Propoziţia 1.13.7. *Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă, $f : D \to \mathbb{R}^m$ o funcţie şi $a \in D$. Fie $s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ un vector cu $||s|| = 1$. Dacă f admite derivate parţiale în raport cu $x_1, \dots, x_n$ în a, atunci f este derivabilă în a după direţia lui s şi*

$$\frac{df}{ds}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)s_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)s_n.$$

Propoziţia 1.13.8. *Fie $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ derivabile parţial în raport cu x_i pe D. Atunci:*

$$(1)\ \frac{\partial(f+g)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$
$$(2)\ \frac{\partial(\alpha f)}{\partial x_i} = \alpha \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$
$$(3)\ \frac{\partial(f \cdot g)}{\partial x_i} = f \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} + g \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$
$$(4)\ \frac{\partial(\frac{f}{g})}{\partial x_i} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot g - f \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}}{g^2},\ \text{dacă } g(a) \neq 0, (\forall) a \in D.$$

Definiţia 1.13.9. *Fie $f = (f_1, \dots, f_m) : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ şi $a \in D$. Presupunem că f_k este derivabilă parţial în a în raport cu x_i, pentru orice $1 \leq k \leq m$, $1 \leq i \leq n$. Matricea*

$$J_f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{k=\overline{1,m} \\ i=\overline{1,n}}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix},$$

se numeşte matricea jacobiană a lui f în a. Dacă $m = n$, matricea $J_f(a)$ este pătratică şi determinantul ei

$$\frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}(a) := \det J_f(a),$$

se numeşte jacobianul (sau determinantul funcţional) al funcţiilor $f_1, \dots, f_m$ în a.

Definiţia 1.13.10. *Fie $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ şi $a \in D$. Spunem că f este diferenţiabilă în a, dacă există $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ o aplicaţie liniară, astfel încât*

$$(\exists) \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{||x-a||} = 0.$$

Aplicaţia $df(a) := T$ se numeşte diferenţiala lui f în a.

Dacă f este diferenţiabilă în orice punct din D, aplicaţia

$$df : D \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m),\ a \mapsto df(a),$$

se numeşte diferenţiala lui f, unde $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \{T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ liniară }\}$.

Propoziţia 1.13.11. *Fie $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ şi $a \in D$. Dacă f este diferenţiabilă în a (respectiv pe D) atunci f este continuă în a (respectiv pe D). În plus, f are derivate parţiale în a (pe D) în raport cu $x_1, \ldots, x_n$ şi $J_f(a)$ este matricea aplicaţiei liniare $df(a)$ în raport cu bazele canonice din $\mathbb{R}^n$ şi $\mathbb{R}^m$. Altfel spus,*

$$df(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\,\mathrm{dx}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\,\mathrm{dx}_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\,\mathrm{dx}_n,\ \mathrm{dx}_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \mathrm{dx}_i(u_1, \ldots, u_n) := u_i.$$

Dacă f este diferenţiabilă pe D, avem $df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\mathrm{dx}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\mathrm{dx}_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,\mathrm{dx}_n$.

Observaţia 1.13.12. Dacă $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in (a, b)$, atunci f este derivabilă în x_0 dacă şi numai dacă f este diferenţiabilă în x_0. Acest lucru nu mai este adevărat în general pentru funcţii $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Există funcţii care au derivate parţiale în raport cu toate variabile într-un punct $a \in D$ şi nu sunt nici măcar continue în punctul respectiv, cu atât mai puţin diferenţiabile; sau, chiar dacă sunt continue, nu sunt diferenţiabile. Evident, continuitatea într-un punct nu asigură existenţa derivatelor parţiale ale unei funcţii şi cu atât mai puţin a diferenţiabilităţii.

Definiţia 1.13.13. *Fie $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ şi $a \in D$. Spunem că f este de clasă C^1 în a (respectiv pe D) dacă f are derivate parţiale Scriem $f \in C^1(a)$ (respectiv $f \in C^1(D)$).*

Propoziţia 1.13.14. *Fie $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ şi $a \in D$. Dacă $f \in C^1(a)$ ($f \in C^1(D)$), atunci f este diferenţiabilă în a (pe D). Reciproca nu este adevărată, în general!*

Teoremă 1.13.15. *(Diferenţiala unei funcţii compuse) Fie $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ şi $g : E \subset R^m \to \mathbb{R}^p$, astfel încât $\mathrm{Im}(f) \subset E$. Fie $a \in D$ astfel încât f este diferenţiabilă în a şi g este diferenţiabilă în $f(a)$. Atunci funcţia $g \circ f : D \to \mathbb{R}^p$ este diferenţiabilă în a şi avem:*

$$d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a),\ \text{deci } J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)) \cdot J_f(a).$$

Cazul n=2,m=1:

Fie $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ şi $(x_0, y_0) \in D$. Atunci, f e derivabilă în raport cu x, în (x_0, y_0), dacă există

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

În mod similar,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

Funcţiile $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ se numesc derivatele parţiale ale lui f în raport cu x, y.

Funcţia f este diferenţiabilă în (x_0, y_0) dacă şi numai dacă are derivate parţiale $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ în (x_0, y_0) astfel încât

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0,$$

caz în care $df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,\mathrm{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,\mathrm{dy}$ este diferenţiala lui f în (x_0, y_0). Dacă f e diferenţiabilă pe D, atunci $df = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{dy}$ este diferenţiala lui f.

Exemplul 1.13.16. Fie $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 + y\ln(x^2+y^2)$, $(x_0, y_0) = (1,1)$. Pentru a calcula $\frac{\partial f}{\partial x}$, vom deriva expresia lui $f(x,y)$, privind y drept constantă. Avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3) + \frac{\partial}{\partial x}(y\ln(x^2+y^2)) = 3x^2 + y\frac{\partial}{\partial x}(\ln(x^2+y^2)) =$$
$$= 3x^2 + y\frac{\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 3x^2 + y\frac{2x}{x^2+y^2} = 3x^2 + \frac{2xy}{x^2+y^2}.$$

În mod similar, $\frac{\partial f}{\partial y}$ se calculează derivând expresia lui $f(x,y)$ şi privind x drept constantă:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^3) + \frac{\partial}{\partial y}(y\ln(x^2+y^2)) = 0 + \frac{\partial}{\partial y}(y)\ln(x^2+y^2) + y\frac{\partial}{\partial y}(\ln(x^2+y^2)) =$$
$$= \ln(x^2+y^2) + y\frac{\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \ln(x^2+y^2) + y\frac{2y}{x^2+y^2} = \ln(x^2+y^2) + \frac{2y^2}{x^2+y^2}.$$

În particular, obţinem $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 4$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \ln 2 + 1$. Diferenţiala lui f este

$$\mathrm{df} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{dy} = (3x^2 + \frac{2xy}{x^2+y^2})\,\mathrm{dx} + (\ln(x^2+y^2) + \frac{2y^2}{x^2+y^2})\,\mathrm{dy},$$

şi diferenţiala lui f în $(1,1)$ este

$$\mathrm{df}(1,1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\,\mathrm{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\,\mathrm{dy} = 4\,\mathrm{dx} + (\ln 2 + 1)\,\mathrm{dy}\,.$$

Cazul n=3,m=1:

Fie $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ şi $(x_0, y_0, z_0) \in D$. Atunci, f e derivabilă în raport cu x, în (x_0, y_0, z_0), dacă există

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0,z_0) - f(x_0,y_0,z_0)}{x - x_0}.$$

În mod similar,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) = \lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0,y,z_0) - f(x_0,y_0,z_0)}{y - y_0}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(x_0,y_0,z) - f(x_0,y_0,z_0)}{z - z_0}.$$

Funcţiile $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ se numesc derivatele parţiale ale lui f în raport cu x, y, z.

Funcţia f este diferenţiabilă în (x_0, y_0, z_0) dacă şi numai dacă are derivate parţiale $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ în $A := (x_0, y_0, z_0)$ astfel încât

$$\lim_{(x,y,z)\to A} \frac{f(x,y,z) - f(A) - \frac{\partial f}{\partial x}(A)(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(A)(y-y_0) - \frac{\partial f}{\partial z}(A)(z-z_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} = 0,$$

caz în care $df(x_0,y_0,z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\,\mathrm{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\,\mathrm{dy} + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\,\mathrm{dz}$ este diferenţiala lui f în (x_0,y_0,z_0). Dacă f e diferenţiabilă pe D, atunci $df = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{dy} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{dz}$ este diferenţiala lui f.

Exemplul 1.13.17. Fie $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2y + ze^{2x+z}$, $(x_0,y_0,z_0) = (1,1,-2)$. Atunci:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y) + \frac{\partial}{\partial x}(ze^{2x+z}) = y\frac{\partial}{\partial x}(x^2) + z\frac{\partial}{\partial x}(e^{2x+z}) = 2xy + 2ze^{2x+z},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2y) + \frac{\partial}{\partial y}(ze^{2x+z}) = x^2\frac{\partial}{\partial y}(y) + z\frac{\partial}{\partial y}(e^{2x+z}) = x^2 + ze^{2x+z},$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(x^2y) + \frac{\partial}{\partial z}(ze^{2x+z}) = 0 + \frac{\partial}{\partial z}(z)e^{2x+z} + z\frac{\partial}{\partial z}(e^{2x+z}) = (1+z)e^{2x+z}.$$
$$\mathrm{df} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{dy} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{dz} = (2xy + 2ze^{2x+z})\,\mathrm{dx} + (x^2 + ze^{2x+z})\,\mathrm{dy} + (1+z)e^{2x+z}\,\mathrm{dz}\,.$$

În particular, obţinem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,-2) = 2 - 4e^0 = -2,\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,-2) = 1 - 2e^0 = -2,\ \frac{\partial f}{\partial z}(1,1,-2) = (-1)e^0 = -1.$$
$$df(1,1,-2) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,1,-2)\,\mathrm{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,-2)\,\mathrm{dy} + \frac{\partial f}{\partial z}(1,1,-2)\,\mathrm{dz} = -2\,\mathrm{dx} - 2\,\mathrm{dy} - \mathrm{dz}\,.$$

Exemplul 1.13.18. Fie $f = (f_1,f_2,f_3):\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (x+y, x^2 + y^2, xe^y)$, $g = (g_1,g_2):\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g(u,v,w) = (u^2 - v, uw)$, şi $h := g\circ f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

$$h(x,y) = (g\circ f)(x,y,z) = g(f(x,y)) = g(x+y, x^2+y^2, xe^y) =$$
$$= ((x+y)^2 - x^2 - y^2, (x+y)xe^y) = (2xy, (x^2+xy)e^y),\ (\forall)(x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$

În particular, $h(1,1) = g(f(1,1)) = g(2,2,e) = (2,2e)$. Matricea jacobiana a lui f într-un punct arbitrar $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ este

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2y \\ e^y & xe^y \end{pmatrix}. \text{ Deci } J_f(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ e & e \end{pmatrix}.$$

Matricea jacobiana a lui g într-un punct arbitrar $(u,v,w)\in\mathbb{R}^3$ este

$$J_g(u,v,w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u} & \frac{\partial g_1}{\partial v} & \frac{\partial g_1}{\partial w} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u} & \frac{\partial g_2}{\partial v} & \frac{\partial g_2}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u & -1 & 0 \\ w & 0 & u \end{pmatrix},\ J_g(f(1,1)) = J_g(2,2,e) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ e & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Din Teorema 1.13.15 obţinem:

$$J_{g\circ f}(x,y) = J_g(f(x,y))\cdot J_f(x,y) = J_g(x+y, x^2+y^2, xe^y)\cdot J_f(x,y) =$$
$$= \begin{pmatrix} 2x+2y & -1 & 0 \\ xe^y & 0 & x+y \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2y \\ e^y & xe^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ (2x+y)e^y & (x^2+xy+x)e^y \end{pmatrix}.$$

În particular, avem:

$$J_{g\circ f}(1,1) = J_g(f(1,1)) \cdot J_f(1,1) = J_g(2,2,e) \cdot J_f(1,1) =$$
$$= \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ e & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ e & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3e & 3e \end{pmatrix}.$$

Derivate parţiale şi diferenţiale de ordin superior

Definiţia 1.13.19. *Fie $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ o funcţie derivabilă în raport cu x_i pe D. Dacă $\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \to \mathbb{R}^m$ este derivabilă parţial în raport cu x_j, funcţia*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} := \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i}) : D \to \mathbb{R}^m,$$

se numeşte derivata parţială de ordinul 2 a lui f în raport cu x_j, x_i.

Dacă $j = i$, notăm $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} := \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$.

În mod inductiv, dacă $\frac{\partial f^{k-1}}{\partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}}$ este derivabilă în raport cu x_{i_1}, spunem că f are derivata parţială de ordin k, în raport cu $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$,

$$\frac{\partial f^k}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}} := \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(\frac{\partial f^{k-1}}{\partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}} : \right) : R \to \mathbb{R}^m.$$

Definiţia 1.13.20. *Spunem că o funcţie f este de clasă C^k pe D, unde $k \geq 1$, şi scriem $f \in C^k(D)$ dacă f are derivate parţiale de ordin k (în raport cu orice ordine) şi acestea sunt continue.*

Teoremă 1.13.21. *(Schwarz) Fie $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^2. Atunci*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \ (\forall) 1 \leq i, j \leq n.$$

Mai general, dacă f este de clasă C^k, $k \geq 2$, atunci $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}$ nu depinde de ordinea variabilelor $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$.

Definiţia 1.13.22. *O funcţie $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se numeşte formă de gradul k, dacă $q(x) = P(x)$, unde $P \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ este un polinom omogen de grad k.*

O formă de gradul 1, i.e. $q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$, se numeşte formă liniară. De exemplu, diferenţiala unei funcţii $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ într-un punct a, $\mathrm{df}(a)$ este o formă liniară.

O formă de gradul 2, i.e. $q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ se numeşte formă pătratică.

Definiţia 1.13.23. *Fie $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Spunem că f este diferenţiabilă de ordin 2 pe D, dacă f este diferenţiabilă şi, pentru orice $a \in D$, există o formă pătratică $T(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ astfel încât*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - df(a)(x-a) - \frac{1}{2!}T_a(x-a)}{||x-a||^2} = 0.$$

Forma pătratică $d^2 f(a) := T(a)$ se numeşte diferenţiala de ordin 2 a lui f în a. În mod inductiv, spunem că f este diferenţiabilă de ordin k pe D, dacă f e diferenţiabilă de oridn $k-1$, şi pentru orice $a \in D$, există o formă de ordin k, notată $d^k f(a)$ astfel încât

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - df(a)(x-a) - \frac{1}{2!}d^2 f(a)(x-a) - \cdots - \frac{1}{k!}d^k f(a)(x-a)}{||x-a||^k} = 0.$$

Forma $d^k f(a)$ se numeşte diferenţiala de ordin k a lui f în a.

Propoziţia 1.13.24. *Fie $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^k , $k \geq 1$. Atunci f este diferenţiabilă de ordin k şi*

$$d^k f(a) = (\frac{\partial}{\partial x_1} \mathrm{dx}_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} \mathrm{dx}_n)^k (f)(a),\ (\forall) a \in D.$$

În particular, pentru $k = 2$, avem

$$d^2 f(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) \mathrm{dx}_1^2 + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \mathrm{dx}_n^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) \mathrm{dx}_1 \mathrm{dx}_2 + \cdots + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1} \partial x_n}(a) \mathrm{dx}_{n-1} \mathrm{dx}_n .$$

Definiţia 1.13.25. *Fie $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, o funcţie de clasă C^2 pe D. Se numeşte Laplacianul lui f, funcţia*

$$\Delta f := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}.$$

Cazul $n = 2$.

Fie $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^k, $k \geq 2$, şi $(x_0, y_0) \in D$. Diferenţiala de ordin 2 a lui f este

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \mathrm{dx}^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \mathrm{dx}\,\mathrm{dy} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \mathrm{dy}^2 .$$

Diferenţiala de ordin 2 a lui f în punctul (x_0, y_0) este

$$d^2 f(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \mathrm{dx}^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \mathrm{dx}\,\mathrm{dy} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \mathrm{dy}^2 .$$

De observat că $d^2 f(x_0, y_0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este o formă pătratică, şi avem

$$d^2 f(x_0,y_0)(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)a^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)ab + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)b^2,\ (\forall)(a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

În general, diferenţiala de ordin k a lui f este

$$d^k f = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-j} \partial y^j} \,\mathrm{dx}^{k-j}\,\mathrm{dy}^j = \frac{\partial^k f}{\partial x^k}\,\mathrm{dx}^k\,\mathrm{dy}^j + \binom{k}{1} \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-1} \partial y}\,\mathrm{dx}^{k-1}\,\mathrm{dy} + \cdots + \frac{\partial^k f}{\partial y^k}\,\mathrm{dy}^k,$$

unde $\binom{k}{j} = C_k^j$ = combinări de k luate câte j. Diferenţiala de ordin k a lui f în (x_0, y_0) este

$$d^k f(x_0,y_0) = \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x_0,y_0)\,\mathrm{dx}^k + \cdots + \binom{k}{j} \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-j} \partial y^j}(x_0,y_0)\,\mathrm{dx}^{k-j}\,\mathrm{dy}^j + \cdots + \frac{\partial^k f}{\partial y^k}(x_0,y_0)\,\mathrm{dy}^k.$$

Laplacianul lui f este $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Cazul $n = 3$.

Fie $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^k, $k \geq 2$, şi $(x_0, y_0, z_0) \in D$. Diferenţiala de ordin 2 a lui f este

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\mathrm{dx}^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,\mathrm{dy}^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\,\mathrm{dz}^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dz} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz}.$$

Diferenţiala de ordin 2 a lui f în punctul (x_0, y_0, z_0) este

$$d^2 f(x_0,y_0,z_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0,z_0)\,\mathrm{dx}^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0,z_0)\,\mathrm{dy}^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x_0,y_0,z_0)\,\mathrm{dz}^2 +$$

$$+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0,z_0)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x_0,y_0,z_0)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dz} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x_0,y_0,z_0)\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz}.$$

Laplacianul lui f este $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

Formula Taylor

Definiţia 1.13.26. *Fie $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^m, $m \geq 1$, şi $a \in D$. Polinomul Taylor de ordin m a lui f, în jurul lui a, este:*

$$T_m(x) := \sum_{k=0}^{m} \frac{d^k f(a)(x-a)}{k!}.$$

Restul Taylor de ordin m a lui f, în jurul lui a, este:

$$R_m(x) := f(x) - T_m(x).$$

Formula Taylor este identitatea $f(x) = T_m(x) + R_m(x)$. Pentru $x \in D$, spunem că $f(x)$ se aproximează cu $T_m(x)$ (şi scriem $f(x) \approx T_m(x)$), cu eroarea absolută $|R_m(x)|$.

Teoremă 1.13.27. *Fie $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^{m+1} şi $a \in D$. Fie $x \in D \setminus \{a\}$. Atunci există $\xi \in D$ astfel încât*

$$R_m(x) = \frac{d^m f(\xi)(x-a)}{(m+1)!} \text{ şi } ||\xi - a|| < ||x - a||.$$

Cazul $n = 2$

Fie $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^m, $m \geq 2$, şi $(x_0, y_0) \in D$.
Polinomul Taylor de ordin 1 (aproximarea liniară) a lui f, în jurul lui (x_0, y_0) este:

$$T_1(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Polinomul Taylor de ordin 2 (aproximarea pătratică) a lui f, în jurul lui (x_0, y_0) este:

$$T_2(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)+$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right).$$

În general, polinomul Taylor de ordin m a lui f, în jurul lui (x_0, y_0) este:

$$T_m(x,y) = f(x_0,y_0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-j} \partial y^j}(x_0,y_0)(x-x_0)^{k-j}(y-y_0)^j.$$

Cazul $n = 3$

Fie $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^m, $m \geq 2$, şi $(x_0, y_0, z_0) \in D$.
Polinomul Taylor de ordin 1 (aproximarea liniară) a lui f, în jurul lui (x_0, y_0, z_0) este:

$$T_1(x,y) = f(x_0,y_0,z_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0).$$

Polinomul Taylor de ordin 2 (aproximarea pătratică) a lui f, în jurul lui (x_0, y_0, z_0) este:

$$T_2(x,y) = f(x_0,y_0,z_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)+$$
$$+ \frac{1}{2!}(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)^2+$$
$$+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)(y-y_0) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)(z-z_0) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)(z-z_0)).$$

Independenţă funcţională. Transformări

Definiţia 1.13.28. *Fie $f_1, \ldots, f_m, f : D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Spunem că f depinde funcţional de $f_1, \ldots, f_m$, dacă există $\Phi : D \to \mathbb{R}$, atfel încât*

$$\Phi(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)) = f(x),\ (\forall)x \in D.$$

Spunem că $f_1, \ldots, f_m$ sunt dependente funcţional, dacă cel puţin una dintre ele depinde de celelalte. În caz contrar, spunem că este sunt independente funcţional.

Teoremă 1.13.29. *Fie $f_1, \ldots, f_n : D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clasă C^1.*

1. *Dacă $\frac{D(f_1,\ldots,f_n)}{D(x_1,\ldots,x_n)} = 0$ pe D, atunci $f_1, \ldots, f_n$ sunt dependente funcţional.*

2. *Dacă $\frac{D(f_1,\ldots,f_n)}{D(x_1,\ldots,x_n)} \neq 0$ pe $D \setminus A$, unde $\mathring{A} = \emptyset$, atunci $f_1, \ldots, f_n$ sunt independente funcţional în orice punct $a \in D$ (adică pe o vecinătate deschisă a lui a).*

Exemplul 1.13.30. (Coordonate polare) Considerăm $\Phi : D = [0, \infty) \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, definită prin

$$\Phi(\rho, \theta) = (x(\rho, \theta), y(\rho, \theta)) = (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta),\ (\forall)\rho \in [0, \infty), \theta \in [0, 2\pi].$$

Avem

$$\left| \frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} \right| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho,$$

determinant care se anulează doar pe mulţimea $\{0\} \times [0, 2\pi]$, care nu conţine puncte interioare. Conform Teoremei 1.13.29, rezultă că funcţiile $x(\rho, \theta), y(\rho, \theta)$ sunt funcţional independente pe D.

Exerciţii

1. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Studiaţi continuitatea, diferenţiabilitatea, existenţa derivatelor parţiale şi dacă $f \in C^1$ în $(0, 0)$, pentru:

   a) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

   b) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

   c) $f(x, y) = x\sqrt{x^2 + y^2}$

d) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

e) $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{xyz^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, & (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0, & (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$ (Evident, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.)

f) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Arătaţi că $f \notin C^2$.

2. Fie $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$. Calculaţi df, d^2f, $df(1,1)$ şi $d^2f(1,1)$.

3. Fie $f(x,y,z) = x\ln(y^2+z^2)$. Calculaţi df, d^2f, $df(1,0,1)$ şi $d^2f(1,0,1)$.

4. Fie $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$. Calculaţi df, d^2f, $df(1,1)$ şi $d^2f(1,1)$.

5. Calculaţi derivatele parţiale de ordin 2 pentru:
   a) $f(x,y) = xe^{x^2+y^2}$
   b) $f(x,y,z) = xye^{x^2z}$
   c) $f(x,y) = \mathrm{arctg}(x^2+y^2)$
   d) $f(x,y) = \arcsin(\frac{x}{y})$
   e) $f(x,y) = \mathrm{tg}(x^2+y^2)$.

6. Calculaţi Laplacianul lui f, Δf, pentru:
   a) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$
   b) $f(x,y) = xe^{x^2-y^2}$
   c) $f(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$
   d) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
   e) $f(x,y,z) = x^2 + \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$
   f) $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

7. Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (x^2-y^2+z^2, xye^z)$. Determinaţi matricea Jacobiană $J_f(x,y,z)$ şi $J_f(1,1,1)$.

8. Fie $f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$, unde $u(x,y) = x^3-y^3$, $v(x,y) = \ln(x^2+y^2)$. Calculaţi $J_f(x,y)$ şi $\frac{D(u,v)}{D(x,y)}$.

9. Fie $z(x,y) = \varphi(bx-ay)$, unde $a,b \in \mathbb{R}$. Calculaţi $E = a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y}$.

10. Fie $z(x,y) = \varphi(x^2+y^2)$. Calculaţi $E = y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y}$.

11. Fie $z(x,y) = xy\varphi(x^2 - y^2)$. Calculaţi $E = xy^2\frac{\partial z}{\partial x} + x^2y\frac{\partial z}{\partial y}$.

12. Fie $z(x,y) = \varphi(\frac{y}{x})$, $\varphi \in C^1$. Calculaţi $E = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$.

13. Fie $z = \phi(x - at) + \psi(x + at)$. Arătaţi că $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$.

14. Fie $f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$ şi $F(x,y) = g(f(x,y))$, unde $g : Im(f) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Determinaţi derivatele parţiale ale lui F în funcţie de derivatele parţiale ale lui g, u şi v. Caz particular: $u(x,y) = x^2 + y^2$ şi $v(x,y) = x - y$.

15. Determinaţi funcţiile $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clasă C^2, $u(x,y) = \varphi(x^2 - y^2)$, cu proprietatea că $\Delta u = 0$.

16. Fie $f(x,y) = \ln(1+2xy)$. Calculaţi $T_1(x,y)$ şi $T_2(x,y)$, în jurul lui $(0,1)$.

17. Fie $f(x,y) = e^x\sqrt{y+4}$. Calculaţi $T_1(x,y)$ şi $T_2(x,y)$, în jurul lui $(0,1)$.

18. Fie $f(x,y) = \sqrt{x}\sqrt[3]{y}$. Calculaţi $T_1(x,y)$ şi $T_2(x,y)$, în jurul lui $(1,1)$.

19. Fie $f(x,y) = e^{x+2y}$. Determinaţi $T_n(x,y) =$, în jurul lui $(0,0)$.

20. Arătaţi că $u = x + y + z$, $v = x^2 + y^2 + z^2$ şi $w = xy + yz + zx$ sunt funcţional dependente (adică $\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)} = 0$) şi determinaţi o relaţie între ele.

21. Determinaţi $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, astfel încât $u(x,y) = \Phi(x+y)$ şi $v(x,y) = \Phi(x)\Phi(y)$ să fie funcţional dependente.

22. În ecuaţia $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$, folosiţi schimbările de variabilă $u = x + at$ şi $v = x - at$.

23. În ecuaţia $x^2y'' + 2xy' + \frac{1}{x^2}y = 0$, folosiţi schimbarea de variabilă $t = \frac{1}{x}$.

24. În ecuaţia $x^2y'' - 2xy' + y = 0$, $x > 0$, folosiţi schimbarea de variabilă $x = e^t$ $(t = lnx)$.

1.14 Extreme locale şi funcţii implicite

Definiţia 1.14.1. *Fie* $f : D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *o funcţie de clasă* C^1 *şi* $a = (a_1, \dots, a_n) \in D$.

1. *a e* minim local *pentru f dacă* $(\exists)V$ *vecinătate a lui a, a. î.* $f(x) \geq f(a), (\forall)x \in V$.
2. *a e* maxim local *pentru f dacă* $(\exists)V$ *vecinătate a lui a, a. î.* $f(x) \leq f(a), (\forall)x \in V$.
3. *a e* extrem local *pentru f dacă e minim local sau maxim local.*
4. *a e* punct critic *pentru f dacă* $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0$.

Teoremă 1.14.2. *(Fermat) Fie* $f : D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *de clasă* C^1 *şi* $a = (a_1, \dots, a_n) \in D$. *Dacă a este punct de extrem local pentru f, atunci a este punct critic.*

Definiţia 1.14.3. *Fie* $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *o formă pătratică.*

1. *Aplicaţia* $q^0 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $q^0(x, y) = \frac{1}{2}(q(x + y) - q(x) - q(y))$, *se numeşte forma biliniară polară, asociată lui q.*
2. *Matricea asociată lui q, relativ la baza* $\{e_1, \dots, e_n\}$ *din* $\mathbb{R}^n$, *este* $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, *unde* $a_{ij} = q^0(e_i, e_j)$, $(\forall)i, j = \overline{1, n}$. *De observat că* $A = A^t$, *adică A este simetrică.*
3. *q se numeşte* pozitiv definită, *dacă* $q(x) \geq 0, (\forall)x \in \mathbb{R}^n$ *şi* $q(x) = 0 \Leftrightarrow x = (0, \dots, 0)$.
4. *q se numeşte* negativ definită, *dacă* $-q$ *este pozitiv definită.*
5. *q este de tip* (r, s), *dacă există o bază* $\mathcal{B}$ *în* $\mathbb{R}^n$ *cu proprietatea că matricea asociată lui q este diagonală* $Diag(b_1, \dots, b_r, -b_{r+1}, \dots, -b_{r+s}, 0, \dots, 0)$ *unde* $r + s \leq n$ *şi* $b_i > 0, (\forall)1 \leq i \leq r + 2$. *(Conform unui rezultat de algebră liniară, numerele r şi s depind doar de forma pătratică q, nu de baza aleasă)*

Definiţia 1.14.4. *Fie* $f : D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *de clasă* C^2 *şi* $a = (a_1, \dots, a_n) \in D$. Matricea Hessiană *a lui f în a este* $H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{i,j=\overline{1,n}}$. *Observaţie:* $H_f(a)$ *e matricea asociată formei pătratice* $(d^2 f)(a)$, *în baza canonică din* $\mathbb{R}^n$.

Propoziţia 1.14.5. *Fie* $f : D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *de clasă* C^2 *şi* $a = (a_1, \dots, a_n) \in D$ *un punct critic pentru f.*

1. *Dacă* $d^2f(a)$ *este pozitiv definită, atunci* a *este minim local.*

2. *Dacă* $d^2f(a)$ *este negativ definită, atunci* a *este maxim local.*

3. *Dacă* $d^2f(a)$ *este de tip* (r,s) *cu* $r,s>0$*, atunci* a *nu este extrem local.*

Definiţia 1.14.6. *Fie* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *o matrice pătratică de ordin* n*. Polinomul caracteristic al lui* A *este* $P_A(x) := \det(A - \lambda I_n)$*. Soluţiile ecuaţiei* $P_A(x) = 0$ *se numesc valori proprii ale matricii* A*.*

Teoremă 1.14.7. *O matrice simetrică* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *are toate valorile proprii reale.*

Propoziţia 1.14.8. *Fie* $f : D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *de clasă* C^2 *şi* $a = (a_1, \dots, a_n) \in D$ *un punct critic pentru* f*. Fie* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *valorile proprii ale matricii* $H_f(a)$*:*

1. *Dacă* $\lambda_1 > 0, \dots, \lambda_n > 0$*, atunci* a *este punct de minim local.*

2. *Dacă* $\lambda_1 < 0, \dots, \lambda_n < 0$*, atunci* a *este punct de maxim local.*

3. *dacă există* i *cu* $\lambda_i > 0$ *şi* j *cu* $\lambda_j < 0$*, atunci* a *nu este punct de extrem local.*

Demonstraţie. Deoarece $H_f(a)$ este o matrice simetrică, conform unui rezultat de algebră liniară, există o bază $\mathcal{B}$ a lui $\mathbb{R}^n$ în care forma pătrică $d^2f(a)$ este $Diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. $\square$

Cazul $n = 2$

Fie $f : D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

1. Se rezolvă sistemul $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = 0$. Soluţiile sale (în D) sunt punctele critice ale lui f.

2. Se calculează matricea Hessiană $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$.

3. Pentru (x_0, y_0) punct critic, calculăm $H_f(x_0, y_0)$ şi $\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$, $\Delta_2 = \det(H_f(x_0, y_0))$.

   - $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ este minim local.
   - $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ este maxim local.
   - $\Delta_2 < 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ nu este extrem local.

Cazul $n = 3$

Fie $f : D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

1. Se rezolvă $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0$. Soluţiile sale (în D) sunt punctele critice ale lui f.

2. Se calculează matricea Hessiană $H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix}$.

3. Pentru (x_0, y_0, z_0) punct critic, calculăm $H_f(x_0, y_0, z_0)$ şi $\Delta_i :=$ determinantul obţinut din primele i linii şi coloane ale matricii $H_f(x_0, y_0, z_0)$, unde $1 \le i \le 3$. Presupunem că $\Delta_i \neq 0$, $i = 1, 2, 3$. Atunci:

   - $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0 \Rightarrow (x_0, y_0, z_0)$ este punct de minim local.
   - $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0 \Rightarrow (x_0, y_0, z_0)$ este punct de maxim local.
   - În orice altă variantă $\Rightarrow (x_0, y_0, z_0)$ nu este punct de extrem local.

4. Dacă metoda de la punctul 3. nu funcţionează, i.e. cel puţin un Δ_i este zero, calcălăm valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ale matricii $H_f(x_0, y_0, z_0)$. Atunci:

   - $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0 \Rightarrow (x_0, y_0, z_0)$ este punct de minim local.
   - $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0 \Rightarrow (x_0, y_0, z_0)$ este punct de maxim local.
   - Dacă există o valoare proprie $\lambda_i > 0$ şi o alta $\lambda_j < 0 \Rightarrow (x_0, y_0, z_0)$ nu este punct de extrem local.

Dreapta de regresie

Considerăm că avem o serie de măsurători $x = (x_1, \ldots, x_n)$ şi $y = (y_1, \ldots, y_n)$ a două mărimi care depind liniar una de cealaltă. Dreapta de regresie $d : y = ax + b$ este acea dreaptă care realizează minimul sumei pătratelor distanţelor pe verticală de la punctele (x_i, y_i) la dreapta d. Cu alte cuvinte, minimul funcţiei:

$$E(a,b) := \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2.$$

Este uşor de observat că acest minim este de fapt punctul critic al funcţiei (a, b), altfel spus, soluţia sistemului

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i(ax_i + b - y_i) = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i) = 0 \end{cases}.$$

Extreme ale funcţiilor definite implicit

Teoremă 1.14.9. *(Teorema funcţiilor implicite) Fie* $F = (F_1, \ldots, F_m) : D = \overset{\circ}{D} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *o funcţie de clasă* C^1*. Fie* $(a, b) \in D$ *astfel încât* $F(a, b) = 0$*.*

Dacă $\det(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(a, b))_{i,j=\overline{1,m}} \neq 0$*, atunci există o mulţime deschisă* $U \subset \mathbb{R}^n$*, o mulţime deschisă* $V \subset \mathbb{R}^m$ *şi o unică funcţie* $g = (g_1, \ldots, g_m) : U \to V$ *de clasă* C^1*, astfel încât:*

1. $(a, b) \in U \times V \subset D$.
2. $F(x, g(x)) = 0$, $(\forall) x \in U$.
3. $g(a) = b$.

Mai mult, derivatele parţiale $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$*, unde* $1 \leq i \leq m$ *şi* $1 \leq j \leq n$*, sunt determinate de sistemul cu* $m \cdot n$ *ecuaţii:*

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial g_1}{\partial x_j} + \frac{\partial F_i}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial g_2}{\partial x_j} + \cdots + \frac{\partial F_i}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial g_m}{\partial x_j} = -\frac{\partial F_i}{\partial x_j},\ 1 \leq i \leq m \text{ şi } 1 \leq j \leq n.$$

Corolarul 1.14.10. *(Cazul* $m = n = 1$*) Fie* $F : D = \overset{\circ}{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *o funcţie de clasă* C^1 *şi* $(x_0, y_0) \in D$*, astfel încât* $F(x_0, y_0) = 0$ *şi* $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$*. Atunci există* $I, J \subset \mathbb{R}$ *intervale deschise, şi o unică funcţie* $g : I \to J$ *de clasă* C^1*, astfel încât:*

1. $(x_0, y_0) \in I \times J \subset D$.
2. $F(x, g(x)) = 0$, $(\forall) x \in I$, *şi* $g(x_0) = y_0$.
3. $g'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))}$, $(\forall) x \in I$.

Punctele critice ale funcţiei g *sunt determinate de sistemul:*

$$\left\{ F(x, y) = 0,\ \frac{\partial F}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0. \right.$$

Presupunem în plus că g *este de clasă* C^2*. Atunci:*

1. *Dacă* x_1 *este punct critic şi* $g''(x_1) > 0$*, atunci* x_1 *este punct de minim local.*
2. *Dacă* x_1 *este punct critic şi* $g''(x_1) < 0$*, atunci* x_1 *este punct de maxim local.*

Corolarul 1.14.11. *(Cazul* $n = 2, m = 1$*) Fie* $F : D = \overset{\circ}{D} \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *o funcţie de clasă* C^1 *şi* $(x_0, y_0, z_0) \in D$*, astfel încât* $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ *şi* $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$*. Atunci există* $U \subset \mathbb{R}^2$ *şi* $V \subset \mathbb{R}$ *deschise, şi o unică funcţie* $g : U \to V$ *de clasă* C^1*, astfel încât:*

1. $(x_0, y_0, z_0) \in U \times V \subset D$.

2. $F(x, y, g(x, y)) = 0$, $(\forall)(x, y) \in U$, *şi* $g(x_0, y_0) = z_0$.

3. $\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,g(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,g(x,y))}$, $\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,g(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,g(x,y))}$, $(\forall)x \in U$.

Punctele critice ale funcţiei g sunt determinate de sistemul:

$$\left\{ F(x, y, z) = 0,\ \frac{\partial F}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0. \right.$$

Dacă funcţia g este de clasă C^2, punctele de extrem ale sale se determină după metoda descrisă pentru funcţii de două variabile.

Extreme locale condiţionate. Metoda multiplicatorilor Lagrange.

Definiţia 1.14.12. *Fie $f : D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şi $E \subset D$ o submulţime care nu este deschisă.*

1. *Un punct $a \in E$ se numeşte punct de* minim condiţionat *de E pentru f, dacă există $V \subset D$ o vecinătate pentru a, astfel încât $f(x) \geq f(a)$, $(\forall)x \in E \cap V$.*

2. *Un punct $a \in E$ se numeşte punct de* maxim condiţionat *de E pentru f, dacă există $V \subset D$ o vecinătate pentru a, astfel încât $f(x) \leq f(a)$, $(\forall)x \in E \cap V$.*

3. *Un punct $a \in E$ se numeşte punct de* extrem condiţionat *de E pentru f, dacă este punct de minim sau de maxim condiţionat.*

Fie $f : D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^2 Vrem să găsim punctele de extrem condiţionat ale funcţiei f din domeniul $E = \{x \in D\ :\ g_1(x) = \cdots = g_m(x) = 0\}$, unde $g_1, \ldots, g_m : D \to \mathbb{R}$ sunt funcţii de clasă C^2.

Fie $F : D \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definită prin:

$$F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, \ldots, x_n) + \cdots + \lambda_m g_m(x_1, \ldots, x_n).$$

Dacă $(x_1^0, \ldots, x_n^0, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0)$ este un punct critic pentru F, atunci $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ este un punct critic pentru $\Phi(x_1, \ldots, x_n) := F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0)$. Mai mult:

1. Dacă $d^2\Phi(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ este pozitiv definită atunci $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ e punct de minim condiţionat pentru f.

2. Dacă $d^2\Phi(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ este negativ definită atunci $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ e punct de maxim condiţionat pentru f.

3. Dacă E este compact şi $f(x_1^0, \dots, x_n^0)$ are valoarea minimă printre valorile lui f în punctele sale critice, atunci $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ este punct de minim condiţionat pentru f.

4. Dacă E este compact şi $f(x_1^0, \dots, x_n^0)$ are valoarea maximă printre valorile lui f în punctele sale critice, atunci $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ este punct de minim condiţionat pentru f.

Exerciţii

1. Determinaţi extremele (libere) ale funcţiilor:

   a) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$,

   b) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 10$,

   c) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$,

   d) $f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$,

   e) $f(x, y) = xy + \frac{2}{x} + \frac{5}{x}$,

   f) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$,

   g) $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - 2xy$,

   h) $f(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2x + 2y + 6z$,

   i) $f(x, y, z) = xyz - x - y - z$,

   j) $f(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + z$, $x, y, z \neq 0$.

2. Determinaţi dreapta de regresie pentru:

   a) $x = (-2, 1, 2)$, $y = (3, 0, -1)$. Estimaţi $y(3)$.

   b) $x = (-1, 0, 1)$, $y = (2, 2, 3)$. Estimaţi $y(2)$,

   c) $x = (-2, 0, 1, 2)$, $y = (3, 1, 2, 0)$. Estimaţi $y(3)$.

3. Fie $y(x)$ func ctia definită implicit de $x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$, în jurul punctului $(1, 1)$. Calculaţi $y'(x)$, $y''(x)$, $y'(1)$ şi $y''(1)$.

4. Fie $y(x)$ func ctia definită implicit de $y = 2x \operatorname{arctg}(\frac{y}{x})$, în jurul punctului $(1, 0)$. Calculaţi $y'(x) =?$ şi $y'(1) =?$.

5. Calculaţi derivatele parţiale de ordin 1 şi 2 pentru funcţia $z(x, y)$ definită implicit de:

   a) $x \sin(y + z) + xz = 0$

   b) $x^2 + y^2 - 2z = 0$

   c) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$.

6. Fie $y(x)$ şi $z(x)$ definite implicit de $\begin{cases} x + 2y - z - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 3z - 2 = 0 \end{cases}$, în jurul lui $(1, 1, 1)$. Calculaţi $y'(x), z'(x), y''(x), z''(x), y'(1), z'(1), y''(1), z''(1)$.

7. Determinaţi extremele locale ale funcţiei $y = y(x)$, definită de:

   a) $2xy^3 + y - x^2 = 0$

   b) $x^3 + y^3 - 2xy = 0$

   c) $2x^2y + y^2 - 4x - 3$

8. Determinaţi extremele locale ale funcţiei $z = z(x, y)$, definită de:

   a) $x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0$

   b) $z^3 + z + 20(x^2 + y^2) - 8(xy + x + y) = 0$.

9. Determinaţi extremele funcţiei $f(x, y) = x^2 + y^2$ pe dreapta $3x + 2y = 6$.

10. Determinaţi extremele funcţiei $f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y$ pe dreapta $x + y - 1 = 0$.

11. Determinaţi extremele funcţiei $f(x, y, z) = xyz$ pe sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

12. Determinaţi distanţa dintre $M(2, 0)$ şi parabola $y^2 = 2x$, folosind extreme cu legături.

13. Determinaţi extremele funcţiei $f(x, y, z) = xyz$ pe domeniul $x+y+z = 6$, cu $x, y, z > 0$.

14. Determinaţi extremele funcţiei $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3x - 2y + 1$ pe $K = \{(x, y) |\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

15. Determinaţi extremele funcţiei $f(x, y) = xy$ pe $K = \{(x, y) |\ x^2 + 2y^2 \leq 1\}$.

16. Determinaţi valorile extreme ale funcţiei $f(x, y) = x^2 + y^2$ pe $K = \{(x, y) |\ x^2 + 4y^2 \leq 1\}$.

1.15 Exerciţii recapitulative

1. Fie $A = \{\frac{n+\sqrt{n^2+1}}{2} | n \in \mathbb{Q} \cap [0,\infty)\}$ şi $B = \{(a_1, a_2, a_3, \ldots) | a_n \in \{0,1,2,3\}\}$. Decideţi dacă A şi B sunt numărabile.

2. Fie $A = \{\frac{1-i\sqrt{n}}{2} | n \in \mathbb{N}^*\}$ şi $B = \{\frac{m^2+\sqrt{n}}{2} | m, n \in \mathbb{Q}_+\}$. Decideţi dacă A şi B sunt numărabile.

3. Fie $A = \{n \in \mathbb{Z} | \ 5 \nmid n, 7|n\}$, $B = \{\frac{m^2+i\sqrt{3}}{n^2+1} | m, n \in \mathbb{Z}\}$, $D = \{it | \ t \in \mathbb{R}^*\}$. Care mulţimi sunt numărabile şi care nu?

4. Decideţi dacă următoarele mulţimi sunt finite, numărabile sau nenumărabile:

   $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (\exists) t \in \mathbb{Q}, \text{ astfel încât } x^2 = t\}$

   $B = \{(a_1, a_2, \ldots, a_j, \ldots) \mid a_j \in \{0,1,2\}\}$

   $C = \{z \in \mathbb{C} \mid z^{10} = 1\}$

5. Decideţi dacă următoarele mulţimi sunt finite, numărabile sau nenumărabile:

   $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (\exists) t \in \mathbb{Q}, \text{ astfel încât } x = ln(t)\}$

   $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$

   $C = \{x \in [0, 2\pi] \mid \sin x = \frac{\sqrt{3}}{3}\}$

6. Studiaţi convergenţa seriilor:

   a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{n^3+2}$.

   b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+n^2}-\sqrt[3]{n^3-n}}{n^k+1}$, $k \in \mathbb{R}$.

   c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

   d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{\sqrt[3]{n^3+n}-\sqrt[3]{n^3-n}}$, $k \in \mathbb{R}$.

   e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^3+2}}\right)$.

   f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1-\cos\frac{\pi}{n}}}{2n+1}$.

   g) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n} - 1)$

   h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$.

   i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!}$.

   j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}(0.25)^n$.

   k) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{n}\right)^n n!$, $a > 0$.'

   l) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2+n+2}\right)^{n^2}$

m) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{an^2+1}{bn^2+n+1}\right)^n$, $a, b > 0$.

n) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 5\cdots(3n-1)}{3\cdot 6\cdots(3n)}$.

o) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n(n!)^2}{(2n)!}$, $a > 0$.

p) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\ln n}\right)^{\ln(\ln n)}$.

q) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{3\ln n}{n}\right)^n$.

7. Studiaţi convergenţa şi absolut convergenţa seriilor:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(2n+1)}$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{n^3+1}}\right)$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln(n+1)}$.

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln^a n}$, $a > 0$.

e) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}$.

f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$, $a > -1$.

g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\sqrt[3]{n}+(-1)^n b\sqrt{n}}{\sqrt{2n^3+n+1}}$.

h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2^n)}{(n+1)^{\alpha}}$, $\alpha > 1$.

8. Aproximaţi suma seriilor următoare cu o eroare $< 10^{-3}$:

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(4n+1)!}$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3\sqrt{n+1}}$.

c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n(n+1)!}$.

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3(2n)!}$.

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$.

9. Studiaţi convergenţa punctuală şi uniformă a a şirurilor de funcţii:

a) $f_n(x) = \frac{nx}{2+2n+x}$, i) $x \in [0,1]$, ii) $x \in [1,\infty)$.

b) $f_n(x) = nx(1-x)^n$, $x \in [0,1]$.

c) $f_n(x) = x^n - x^{3n}$, $x \in [0,1]$.

d) $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$, $x \in [0,\infty)$.

e) $f_n(x) = \frac{1-e^{-nx}}{1+e^{-nx}}$, $x \in (0,\infty)$.

f) $f_n(x) = \operatorname{arctg}\frac{x}{1+n(n+1)x^2}$.

g) $f_n(x) = x^2 e^{-2nx}$, $x \in [0, \infty)$.

h) $f_n(x) = x^n e^{-nx}$, $x \in [0, \infty)$.

i) $f_n(x) = 2xe^{-nx^2}$, $x \in [0, \infty)$.

j) $f_n(x) = \sqrt{(n^2+1)\sin\frac{\pi}{n} + nx} - nx$, $x \in (1, \infty)$.

k) $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$, $x \in \mathbb{R}$. $(f_n')_n$ este convergent?

l) $f_n(x) = \frac{ne^{-x}+xe^{-n}}{x+n}$, $x \in [0, \infty)$. Calculaţi $\lim_n \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{dx}$

m) $f_n(x) = x^{\frac{n+1}{n}}$, i) $x \in [0, 1]$, ii) $x \in [1, \infty)$.

10. Studiţi convergenţa punctuală şi uniformă a seriilor de funcţii şi a seriilor derivatelor:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-x}$, i) $x \in (1, \infty)$, ii) $x \in [a, \infty)$, unde $a > 1$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+n)^2}{n^4}$, i) $x \in \mathbb{R}$, ii) $x \in [a, b]$, unde $a < b \in \mathbb{R}$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$, $x \in [0, 1]$.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+nx)}{nx^n}$, $x \in [a, \infty)$, unde $a > 1$.

e) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$, i) $x \in (0, \infty)$, ii) $x \in [a, \infty)$, unde $a > 0$.

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}-e^{(n-1)x}}{(1+e^{(n-1)x})(1+e^{nx})}$, $x \in (0, 1]$.

11. Arătaţi că $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2\sqrt{n}}$ e convergentă. Fie $f(x) =$ suma seriei. Arătaţi că f e derivabilă şi scrieţi $f'(x)$ ca o serie de funcţii.

12. Arătaţi că $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(4^n x)}{6^n}$ e uniform convergentă. Calculaţi $S'(\pi/4)$, unde $S(x)$ e suma seriei.

13. Arătaţi că $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$ e uniform convergentă. Se poate deriva termen cu termen pe $\mathbb{R}$?

14. Determinaţi polinomul Taylor T_2, în jurul lui a, pentru funcţiile: a) $f(x) = x^2 e^{-x^2}$, $a = 0$.

b) $f(x) = x\sqrt{2-x^2}$, $a = 1$.

c) $f(x) = (2x+1)\cos(x^2)$, $a = 0$.

d) $f(x) = x^x$, $a = 1$.

15. Fie $f(x) = \ln(1+x^2)$. Calculaţi $T_3(x)$, în jurul lui $a = 0$. Aproximaţi $\ln(1.25)$ folosind T_3 şi estimaţi eroarea.

16. Fie $f(x) = \sqrt[3]{8+x}$. Calculaţi $T_2(x)$, în jurul lui $a = 0$. Aproximaţi $\sqrt[3]{9}$ folosind T_2 şi estimaţi eroarea.

17. Fie $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+4}}$. Calculaţi $T_1(x), T_2(x) =?$ în jurul lui $a = 0$. Aproximaţi $\frac{1}{\sqrt{4.5}}$ folosind T_2 şi estimaţi eroarea.

18. Aproximaţi $\sin(0.3)$, $\cos(0.3)$, $\frac{1}{\sqrt[3]{1.2}}$ şi $\ln(1.3)$ cu două zecimale exacte.

19. Determinaţi domeniile de convergenţă ale seriilor:

    a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$.

    b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{2n+1} (x-1)^n$.

    c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n} (x+2)^n$.

    d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin^n x$.

    e) $\sum_{n=1}^{\infty} n 2^n \cdot e^{-nx}$.

    f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} \left(\frac{2x}{x+3}\right)^n$.

20. Determinaţi domeniile de convergenţă şi suma seriilor:

    a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$.

    b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n 4^n}$.

    c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n+1} x^{n+1}$.

    d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n}$.

    e) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) x^n$.

    f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2)^3}{(n+1)(n+3)} x^n$.

21. Scrieţi dezvoltările în serie de puteri ale funcţiilor, precizând domeniul pe care au loc acestea:

    a) $f(x) = (2 + e^{-x})^3$.

    b) $f(x) = \sin^2 x$.

    c) $f(x) = \frac{\mathrm{sh}(2x) - 2\sin x}{x^2}$.

    d) $f(x) = \frac{x}{x^3 - 3x + 2}$.

    e) $f(x) = \frac{1}{1 + x + x^2 + x^3}$.

    f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

    g) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$.

    h) $f(x) = \frac{1 - \arccos x}{x}$.

22. Folosind dezvoltările în serie de puteri, calculaţi:
    a) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.
    b) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^2\sin^2 x^2}$.
    c) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)-\sin(2x)+2x^2}{x^3}$.
    d) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x+2-e^{2x}}{2x^2(e^x-1)}$.
23. Folosind dezvoltări în serie de puteri, calculaţi suma seriilor:
    a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$.
    b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}n!}$.
    c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n(n+1)}$.
    d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{4^n}$.
    e) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$.
    f) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.
24. Calculaţi cu o eroare $< 10^{-3}$, integralele:
    a) $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln(x+1)}{x}\,\mathrm{dx}$.
    b) $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{f(x)}{x^2}\,\mathrm{dx}$.
    c) $\int_0^{1}\frac{1-\cos(x)}{x^2}\,\mathrm{dx}$.
    d) $\int_0^{1}\cos(x^2)\,\mathrm{dx}$.
    e) $\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{dx}$.
    f) $\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{1-e^{-x}}{x}\,\mathrm{dx}$.
    g) $\int_0^{\frac{1}{2}}e^{-x^2}\,\mathrm{dx}$.
    h) $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\arcsin x}{x}\,\mathrm{dx}$.
25. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{3}$. Definim şirul următor de mulţimi $I_0=[0,1]$, $I_{n+1}=f(I_n)\cup f(2+I_n)$, $n\geq 0$. De exemplu, $I_1=[0,\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},1]$, $I_2=[0,\frac{1}{9}]\cup[\frac{2}{9},\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},\frac{7}{9}]\cup[\frac{8}{9},1]$ etc. Fie $C:=\bigcap_{n=0}^{\infty}$, mulţimea lui Cantor. Arătaţi că C este compactă, nenumărabilă şi de măsură Lebesgue nulă. (Indicaţie: Măsura mulţimii I_n este suma lungimii intervalelor componente)
26. Fie $a<b$. Arătaţi că $d_1(f,g)=\int_a^b|g(x)-f(x)|\,\mathrm{dx}$ este o distanţă în spaţiul $C^0([a,b])$ al funcţiilor continue pe $[a,b]$. Determinaţi o normă care induce distanţa d_1. Norma respectivă este euclidiană?

27. Este $[0,1)$ un spaţiu metric complet? Dar $[0,1]$? Justificaţi!

28. În $\mathbb{R}^2$ considerăm următoarele submulţimi:
$A = \{(x,y) \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$,
$B = \{(x,y) \mid 1 \leq x^2 + 2y^2 \leq 2\}$,
$C = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1,\ x, y > 0\}$,
$D = \{(x,y) \mid x + 2y + 3 = 0\}$,
$E = \{(1, \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{(1,0)\}$,
$F = \{(0,0)\} \cup \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$.
Precizaţi care dintre ele sunt închise, deschise, mărginite, compacte, conexe, simplu conexe. Determinaţi închiderea, interiorul, frontiera şi mulţimea punctelor lor de acumulare.

29. Decideţi dacă funcţiile următoare sunt contracţii pe mulţimile precizate. În caz afirmativ, determinaţi punctul fix sau, dacă acest lucru nu e posibil, scrieţi un şir care are ca limită punctul fix corespunzător.
a) $f(x) = ax + b$, $x \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$.
b) $f(x) = p\cos x + q$, $x \in \mathbb{R}$, $p, q \in \mathbb{R}$.
c) $f(x) = 1 + \operatorname{arctg} x$, i) $x \in \mathbb{R}$, ii) $x \in [1, \infty)$.
d) $f(x) = \ln x + e - 1$, $x \in [e, \infty)$.
e) $f(x) = \sqrt[3]{10 - x}$, $x \in [1, 2]$.
f) $f(x) = \frac{1-x^2}{5(1+x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$.
g) $f(x) = \frac{1}{x^2+5}$, $x \in [0, 1]$.
h) $f(x) = \frac{x}{2(1+x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$.

30. Aproximaţi cu o eroare $\varepsilon < 10^{-3}$ soluţia $\alpha \in [0,1]$ a ecuaţiei:
a) $x^3 + x^2 - 6x + 1 = 0$.
b) $x^3 + 12x - 1 = 0$.
c) $x^3 + 4x - 1 = 0$.
d) $x - \frac{x^3}{6} = \frac{1}{2}$.

31. Aproximaţi cu o eroare $\varepsilon < 10^{-2}$, $\sqrt[3]{3}$ şi $\sqrt{3}$, folosind metoda lui Newton.

32. Studiaţi continuitatea funcţiilor:
a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

b) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases}\frac{2x+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}.$

c) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases}\frac{ye^{-\frac{1}{x^2}}}{y^2+e^{-\frac{2}{x^2}}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}.$

d) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}, & (x,y)\neq(0,0)\\ a, & (x,y)=(0,0)\end{cases},\ a\in\mathbb{R}.$

e) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases}(1+|xy|)^{-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ a, & (x,y)=(0,0)\end{cases},\ a\in\mathbb{R}.$

f) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ f(x,y,z)=\begin{cases}\frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x=y=0\end{cases}.$

33. Studiaţi continuitatea, existenţa derivatelor parţiale şi diferenţiabilitatea funcţiilor:

a) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases}y\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}.$

b) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases}e^{-\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}.$

34. Arătaţi că funcţiile următoare sunt diferenţiabile în origine dar nu sunt de clasă C^1:

a) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^4}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}.$

b) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ f(x,y,z)=\begin{cases}\frac{xy^2z}{\sqrt{x^2+y^4+z^2}}, & (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0, & (x,y,z)=(0,0)\end{cases}.$

35. Arătaţi că funcţia $f(x,y)=y\sqrt{x^2+y^2}$ este de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^2$. Este f de clasă C^2 pe $\mathbb{R}^2$?

36. Arătaţi că funcţiile următoare sunt de clasă C^1, dar nu sunt de clasă C^2:

a) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases}xy\sin\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right), & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}.$

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xy^3}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

37. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = 2xy^3 - ye^{-x^2}$. Calculaţi $df(0, 0)$, $df(1, 1)$, $d^2f(0, 0)$ şi $d^2f(1, 1)$.

38. Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (xy^2 + 2z, ye^{z-x^2})$. Calculaţi $J_f(x, y, z)$, $J_f(1, 1, 1)$ şi $df(1, 1, 1)$.

39. Calculaţi derivatele parţiale de ordin 1 şi 2 ale funcţiilor:
   a) $f(x, y) = y\cos(x^2 - y)$.
   b) $f(x, y) = xe^{x^2+y^2}$.
   c) $f(x, y, z) = xye^{y^2+z^2}$.
   d) $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + 1) - \frac{1}{y^2+z^2}$.

40. Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + yz - xy$ şi $a = (1, 1, 2)$. Determinaţi versorul $\vec{s}$ pentru care $\frac{df}{d\vec{s}}(a)$ este maximă.

41. Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = xy^2 - 2xyz$ şi $a = (2, 1, 1)$. Determinaţi versorul $\vec{s}$ pentru care $\frac{df}{d\vec{s}}(a)$ este minimă.

42. Calculaţi Laplacianul funcţiilor:
   a) $f(x, y) = xe^{x^2-y^2}$.
   b) $f(x, y) = xy - \frac{y}{x^2+y^2}$.
   c) $f(x, y) = 1 + \ln(x^2 + y^2)$.
   d) $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.
   e) $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$.
   f) $f(x, y, z) = x^2 + \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$.

43. Fie $f(x, y, z) = xz + \sqrt{y^2 + z^2}$. Calculaţi $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ şi $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.

44. Fie $f(x, y, z) = y^2 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Calculaţi $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ şi $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

45. Fie $z(x, y) = f\left(\frac{y}{x}\right)$, unde $f \in C^1(\mathbb{R})$. Calculaţi $E = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$.

46. Fie $z(x, y) = xy + e^{\frac{y}{x}}$. Arătaţi că $x\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$.

47. Fie $z(x, y) = x^n f\left(\frac{y}{x^2}\right)$, $n \geq 1$. Arătaţi că $x\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y} = nz$.

48. Fie $u(x,y) = f(x+ay) + g(x-ay)$, unde $f,g \in C^2(\mathbb{R})$. Arătaţi că $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

49. Determinaţi $f \in C^2((0,\infty))$ pentru care $z(x,y)$ este armonică, unde:

    a) $z(x,y) = f(x^2+y^2)$, $(x,y) \neq (0,0)$.

    b) $z(x,y) = xf(x^2+y^2)$, $(x,y) \neq (0,0)$.

    c) $z(x,y) = f(\frac{y}{x})$, $x > 0$.

    (Indicaţie: $f'(t) = a(t)f(t) \Leftrightarrow f(t) = Ce^{a(t)}$ pentru $C \in \mathbb{R}$)

50. Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ omogenă de grad r, i.e. $f(tx,ty,tz) = t^r f(x,y,z)$, $\forall t \neq 0$. Arătaţi că:

    a) $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = r \cdot f$.

    b) $\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f = r(r-1) \cdot f$.

51. Arătaţi că transformările următoare sunt difeomorfisme şi calculaţi jacobianul lor şi al transformării inverse:

    a) $f : (0,\infty) \times (0,\infty) \to (0,\infty) \times (0,\infty)$, $f(x,y) = (xy, 3y)$.

    b) $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $f(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$.

    c) $f : (0,\infty) \times (0,\infty) \to (0,\infty) \times \mathbb{R}$, $f(x,y) = (xy, \frac{y^2-x^2}{2})$.

52. Calculaţi polinoamele Taylor T_1 şi T_2 în jurul lui (a,b), pentru:

    a) $f(x,y) = xe^{x+2y}$, $(a,b) = (0,0)$.

    b) $f(x,y) = e^{2x}\sqrt{y+9}$, $(a,b) = (0,0)$.

    c) $f(x,y) = \ln(x^4 - y + 1)$, $(a,b) = (0,1)$.

    d) $f(x,y) = \ln(y^3 - 2x + 1)$, $(a,b) = (1,0)$.

    e) $f(x,y) = \sqrt{(}1 + x + 4xy)$, $(a,b) = (0,1)$.

    f) $f(x,y) = \sqrt{(}4 + y + xy)$, $(a,b) = (1,0)$.

53. Fie $f(x,y,z) = \sqrt{\frac{x+1}{(y+1)(y+1)}}$. Calculaţi T_1 în jurul lui $(0,0,0)$.

54. Aproximaţi $\sqrt{1.05} \cdot \sqrt[3]{0.95}$ şi $e^{-0.2}\sqrt[4]{1.1}$ folosind T_2.

55. Determinaţi polinoamele Taylor de ordin n în jurului originii pentru:

    a) $f(x,y) = e^{x+2y}$.

    b) $f(x,y) = \sin(x+2y) + \cos(2x+y)$.

    c) $f(x,y) = \ln(1+x+y)$.

    d) $f(x,y,z) = e^{x+y+z}$.

56. Determinaţi extremele locale ale funcţiilor:
   a) $f(x,y) = xy + \frac{5}{x} + \frac{2}{y}$.
   b) $f(x,y) = y^3 + 3x^2y - 12x - 15y$.
   c) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 6xy$.
   d) $f(x,y) = 8x^3 + y^3 - 2xy$.
   e) $f(x,y) = x^2ye^{2x+3y}$.
   f) $f(x,y) = 3xy^2 - x^3 - 15x - 36y + 9$.
   g) $f(x,y) = \sin x \sin y \sin(x+y)$.
   h) $f(x,y) = 4x^2 + y^2 + \frac{2}{xy^2}$, $x, y > 0$.
   i) $f(x,y) = y^4 - 8y^3 + 18y^2 - 8y + x^3 - 3x^2 - 3x$.
   j) $f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}$
   k) $f(x,y) = xy\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, unde $x^2 + y^2 < 1$.
   l) $f(x,y) = (1 + e^y)\cos x - ye^y$
   m) $f(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2x + 2y + 6z$.
   n) $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - xy + x - 2z$.
   o) $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - yz - 2x + z + 2$.
   p) $f(x,y,z) = \sin x + \sin y + \sin x - \sin(x+y+z)$.
   q) $f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$, $x, y, z > 0$.
57. Determinaţi dreapta de regresie şi estimaţie $y(3)$ pentru datele:
   a) $x = (-1, 0, 1)$ şi $y = (0.1, 0.2, 0.2)$.
   b) $x = (-1, 0, 2)$ şi $y = (-2, 1, 2)$.
   c) $x = (-2, 0, 2)$ şi $y = (3, 0, 1)$.
   d) $x = (-2, 0, 1)$ şi $y = (3, 1, 1.5)$.
58. Găsiţi punctele de extrem ale funcţiilor:
   a) $f(x,y) = x^2 + y^2$ pe $3x + 2y = 6$.
   b) $f(x,y) = xy$ pe $x^2 + 2y^2 \leq 1$.
   c) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 3x - 2y + 1$ pe $x^2 + y^2 \leq 1$.
   d) $f(x,y) = e^{xy}$ pe $x + y = 3$.
   e) $f(x,y,z) = x + y + z$ pe $\gamma : \{x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ 2x + 2y + z = 1$.
   f) $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2$ pe $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
   g) $f(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 - xy + z^4 - 2z^2$ pe $x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 8$.
   h) $f(x,y,z) = xyz$ pe $\gamma : \{x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x + y + z = 0$.

59. Determinaţi valorile extreme ale funcţiilor:

a) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3x + 2y$ pe $x^2 + y^2 \leq 4$.

b) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3x - 2y + 1$ pe $x^2 + y^2 \leq 4$.

c) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 2y$ pe $2x^2 + 2y^2 \leq 1$.

d) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) - xy$ pe $x^2 + y^2 \leq 16,\ y \geq 2$

e) $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2$ pe $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

f) $f(x, y, z) = ax + by + xz$ pe $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, unde $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

60. Găsiţi extremele funcţiei $y = y(x)$, respectiv $z(x, y)$, definită implicit de:

a) $2xy^3 - y - x^2 = 0$.

b) $x^3 + y^3 - 3x^3y - 3 = 0$.

c) $x^3 + y^3 - 2xy = 0$.

d) $x^2 + y^2 - e^{2\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{y}} = 0$, $y \neq 0$.

e) $x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0$.

f) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 - x^2 - y^2$, $a > 0$.

Capitolul 2

Calcul integral

2.1 Primitive.

Definiţia 2.1.1. *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval propriu şi $f : I \to R$. Spunem că f* admite primitive *pe I, dacă există o funcţie $F : I \to \mathbb{R}$ derivabilă, astfel încât $F' = f$.*

Dacă f admite primitive, integrala nedefinită a lui f, notată $\int f(x)\,\mathrm{dx}$ este mulţimea tuturor primitivelor lui f.

Observaţia 2.1.2. Dacă $f : I \to R$ admite primitive şi F, G sunt primitive pentru f, atunci $F = G + c$, unde $c \in \mathbb{R}$. Prin urmare:

$$\int f(x)\,\mathrm{dx} = F(x) + \mathcal{C},$$

unde $\mathcal{C} = \{c : I \to \mathbb{R} \mid c \text{ constantă }\}$.

Propoziţia 2.1.3. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$. Atunci implicaţiile următoare sunt stricte:*

f continuă $\Rightarrow$ f admite primitive $\Rightarrow$ f are proprietatea lui Darboux.

Exemplul 2.1.4. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ are primitiva $F(x) = \begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, dar nu este continuă. Fie $g(x) = \begin{cases} 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$. Atunci g are proprietatea lui Darboux, dar nu admite primitive.

Propoziţia 2.1.5. *(Liniaritatea integralei) Fie $f, g : I \to \mathbb{R}$ două funcţii care admit primitive şi $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci $f + g$, αf admit primitive şi:*

1. $\int (f(x) + g(x))\,\mathrm{dx} = \int f(x)\,\mathrm{dx} + \int g(x)\,\mathrm{dx}.$

2. $\int \alpha f(x)\,\mathrm{dx} = \alpha \int f(x)\,\mathrm{dx}.$

Propoziţia 2.1.6. *(Formula de integrare prin părţi) Fie $f, g : I \to \mathbb{R}$ două funcţii de clasă C^1 (derivabile cu derivatele continue). Atunci:*

$$\int f'(x)g(x)\,\mathrm{dx} = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{dx}\,.$$

Propoziţia 2.1.7. *(Prima schimbare de variabilă) Fie $f : I \to \mathbb{R}$ continuă şi $u : J \to I$, $u = u(x)$, de clasă C^1. Fie F o primitivă pentru f. Atunci:*

$$\int f(u(x))u'(x)\,\mathrm{dx} = F(u(x)) + \mathcal{C}.$$

Propoziţia 2.1.8. *(A doua schimbare de variabilă) Fie $f : I \to \mathbb{R}$ continuă şi $\varphi : I \to J$, $x = \varphi(t)$ bijectivă, derivabilă şi cu derivata continuă şi nenulă. Fie F o primitivă pentru $(f \circ \varphi)\varphi'$. Atunci:*

$$\int f(x)\,\mathrm{dx} = F(\varphi^{-1}(x)) + \mathcal{C}.$$

Listă cu primitivele unor funcţii uzuale

1. $\int 1\,\mathrm{dx} = x + \mathcal{C}$.
2. $\int x^n\,\mathrm{dx} = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \mathcal{C},\ n \in \mathbb{N}$.
3. $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{dx} = \ln|x| + \mathcal{C}$.
4. $\int \frac{1}{x^n}\,\mathrm{dx} = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + \mathcal{C},\ n \geq 2$.
5. $\int x^\alpha\,\mathrm{dx} = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \mathcal{C},\ \alpha \neq -1$.
6. $\int e^x\,\mathrm{dx} = e^x + \mathcal{C}$.
7. $\int a^x\,\mathrm{dx} = \frac{a^x}{\ln a} + \mathcal{C},\ a > 0,\ a \neq 1$.
8. $\int \sin x\,\mathrm{dx} = -\cos x + \mathcal{C}$.
9. $\int \cos x\,\mathrm{dx} = \sin x + \mathcal{C}$.
10. $\int \mathrm{tg}\, x\,\mathrm{dx} = -\ln|\cos x| + \mathcal{C}$.
11. $\int \mathrm{ctg}\, x\,\mathrm{dx} = \ln|\sin x| + \mathcal{C}$.
12. $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{dx} = \mathrm{tg}\, x + \mathcal{C}$.
13. $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{dx} = -\mathrm{ctg}\, x + \mathcal{C}$.
14. $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + \mathcal{C},\ a > 0$.
15. $\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + \mathcal{C},\ a > 0$.
16. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + \mathcal{C},\ a > 0$.
17. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + \mathcal{C},\ a > 0$.
18. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin\frac{x}{a} + \mathcal{C},\ a > 0$.
19. $\int \mathrm{sh}\, x\,\mathrm{dx} = \mathrm{ch}\, x + \mathcal{C}$.
20. $\int \mathrm{ch}\, x\,\mathrm{dx} = \mathrm{sh}\, x + \mathcal{C}$.

Exemple de funcţii care se integrează prin părţi

1. $\int \ln x \,\mathrm{dx} = \int x' \ln x \,\mathrm{dx} = x\ln x - \int 1 \,\mathrm{dx} = x\ln x - x + \mathcal{C}$.

2. $\int xe^x \,\mathrm{dx} = \int x(e^x)' \,\mathrm{dx} = xe^x - \int e^x \,\mathrm{dx} = (x-1)e^x + \mathcal{C}$.

3. $\int x\cos x \,\mathrm{dx} = \int x(\sin x)' \,\mathrm{dx} = x\sin x - \int \sin x \,\mathrm{dx} = x\sin x + \cos x + \mathcal{C}$.

4. $\int x\sin x \,\mathrm{dx} = -\int x(\cos x)' \,\mathrm{dx} = -x\cos x + \int \cos x \,\mathrm{dx} = -x\cos x + \sin x + \mathcal{C}$.

5. $\int \arcsin x \,\mathrm{dx} = \int x' \arcsin x \,\mathrm{dx} = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{dx} = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + \mathcal{C}$.

6. $\int \arccos x \,\mathrm{dx} = x\arcsin x - \sqrt{1-x^2} + \mathcal{C}$.

7. $\int \operatorname{arctg} x \,\mathrm{dx} = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{x^2+1} \,\mathrm{dx} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \mathcal{C}$.

8. $\int \operatorname{arcctg} x \,\mathrm{dx} = x\operatorname{arcctg} x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \mathcal{C}$.

9. $\int e^{ax}P(x) \,\mathrm{dx} = e^{ax}Q(x) + \mathcal{C}$, unde $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ cu $\mathrm{grad}(Q) = \mathrm{grad}(P)$.

10. $\int e^{ax}(P(x)\cos(bx) + Q(x)\sin(bx)) \,\mathrm{dx} = e^{ax}(M(x)\cos(bx) + N(x)\sin(bx)) + \mathcal{C}$, unde $P, Q, M, N \in \mathbb{R}[X]$ cu $\max\{\mathrm{grad}(M), \mathrm{grad}(M)\} = \max\{\mathrm{grad}(P), \mathrm{grad}(Q)\}$.

11. $\int \sqrt{x^2+a^2} \,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\ln(x + \sqrt{x^2+a^2})) + \mathcal{C}$, $a > 0$.

    Demonstraţie. Avem $I = \int \sqrt{x^2+a^2} \,\mathrm{dx} = \int \frac{x^2+a^2}{\sqrt{x^2+a^2}} \,\mathrm{dx} = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}} \,\mathrm{dx} + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$.
    Pe de altă parte $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}} \,\mathrm{dx} = \int x(\sqrt{x^2+a^2})' \,\mathrm{dx} = x\sqrt{x^2+a^2} - I$.
    Înlocuind în prima relaţie, obţinem formula cerută. $\square$

12. $\int \sqrt{x^2-a^2} \,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\ln|x + \sqrt{x^2-a^2}|) + \mathcal{C}$, $a > 0$.

13. $\int \sqrt{a^2-x^2} \,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}) + \mathcal{C}$, $a > 0$.

14. Fie $I_n = \int x^n e^x dx$. Evident, $I_0 = e^x + \mathcal{C}$.

    Pentru $n \geq 1$, $I_n = \int x^n(e^x)' \,\mathrm{dx} = x^n e^x - \int nx^{n-1}e^x \,\mathrm{dx}$, deci $I_n = x^n e^x - I_{n-1}$.

15. Fie $I_n = \int \frac{x^n}{x^2+a^2} \,\mathrm{dx}$, $a > 0$. Avem $I_0 = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \mathcal{C}$, $I_1 = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2) + \mathcal{C}$.

    Pentru $n \geq 2$, $I_n = \int \frac{x^n + a^2x^{n-2} - a^2x^{n-2}}{x^2+a^2} \,\mathrm{dx} = \int x^{n-2} \,\mathrm{dx} - a^2 \int \frac{x^{n-2}}{x^2+a^2} \,\mathrm{dx}$, deci

    $I_n = \frac{x^{n-1}}{n-1} - a^2 I_{n-2}$.

Exemple de funcţii care se integrează prin schimbare de variabilă

1. $\int (ax+b)^n \,\mathrm{dx} = \frac{1}{a}\int u^n \,\mathrm{du} = \frac{u^{n+1}}{a(n+1)} + \mathcal{C} = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + \mathcal{C}$, unde $a, b \neq 0$, $n \geq 1$. Se foloseşte $u = ax + b$.

2. $\int \frac{\mathrm{dx}}{x \ln^a x} \,\mathrm{dx} = \int u^{-a} \,\mathrm{dx} = -\frac{1}{(a-1)u^{a-1}} + \mathcal{C} = -\frac{1}{(a-1)\ln^{a-1} x} + \mathcal{C}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $u = \ln x$.

3. $\int (2x+b)(x^2+bx+c)^n \,\mathrm{dx} = \frac{(x^2+bx+c)^{n+1}}{n+1} + \mathcal{C}$, $n \geq 1$. Se foloseşte $u = x^2 + bx + c$.

4. $\int \frac{x}{x^2 \pm a^2} \,\mathrm{dx} = \frac{1}{2} \ln |x^2 \pm a^2| + \mathcal{C}$. Se foloseşte $u = x^2 \pm a^2$.

5. $\int \frac{x}{(x^2+a^2)^n} \,\mathrm{dx} = -\frac{1}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \mathcal{C}$, $n \geq 2$. Se foloseşte $u = x^2 + a^2$.

6. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \,\mathrm{dx} = \sqrt{x^2 \pm a^2} + \mathcal{C}$. Se foloseşte $u = x^2 \pm a^2$.

7. $\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \,\mathrm{dx} = -\sqrt{a^2 - x^2} + \mathcal{C}$. Se foloseşte $u = a^2 - x^2$.

8. $\int x\sqrt{x^2 \pm a^2} \,\mathrm{dx} = \frac{1}{3}(x^2 \pm a^2)^{\frac{3}{2}} + \mathcal{C}$. Se foloseşte $u = x^2 \pm a^2$.

9. $\int x\sqrt{a^2 - x^2} \,\mathrm{dx} = -\frac{1}{3}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} + \mathcal{C}$. Se foloseşte $u = a^2 - x^2$.

10. $\int \frac{x}{x^4+1} \,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{du}}{u^2+1} = \operatorname{arctg} u + \mathcal{C} = \operatorname{arctg} x^2 + \mathcal{C}$, $u = x^2$.

11. $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}} \,\mathrm{dx} = \int \frac{\mathrm{du}}{\sqrt{u^2+1}} = \ln(1 + \sqrt{u^2+1}) + \mathcal{C} = \ln(1 + \sqrt{e^{2x}+1}) + \mathcal{C}$, $u = e^x$.

12. $\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} \,\mathrm{dx} = \int \frac{5t^5}{t^3+t^2} \,\mathrm{dt} = 5\int \frac{t^3}{t+1} \,\mathrm{dt} = \cdots$, cu $x = t^6$.

13. $\int e^{\sqrt{x}} \,\mathrm{dx} = 2\int te^t \,\mathrm{dt} = 2(t-1)e^t + \mathcal{C} = 2(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}} + \mathcal{C}$, $x = t^2$.

14. $\int \frac{1}{1+e^x} \,\mathrm{dx} = -\int \frac{\mathrm{dt}}{t+1} = -\ln(t+1) + \mathcal{C} = -\ln(1+e^x) + \mathcal{C}$, $x = -\ln t$.

15. $\int \sqrt{a^2 - x^2} \,\mathrm{dx} = \int \sqrt{a^2 \cos^2 t} \cos t \,\mathrm{dt} = \frac{a}{2}\int (1 + \cos(2t)) \,\mathrm{dt} = \cdots$, $x = a \sin t$.

Propoziţia 2.1.9. *Fie $f, g : I \to \mathbb{R}$. Dacă $G : I \to \mathbb{R}$ e o primitivă pentru g şi $H : I \to \mathbb{R}$ este o primitivă pentru $f + g$, atunci $F = H - G$ este o primitivă pentru f.*

Exemplul 2.1.10. Să se arate că $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{k}{x}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$ admite primitive. Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} \frac{2}{k} x \cos(\frac{k}{x}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Evident, g este continuă pe $\mathbb{R}$, deci admite primitive. Fie G o primitivă a lui g.

Fie $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $H(x) = \begin{cases} \frac{1}{k} x^2 \cos(\frac{k}{x}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Atunci H este derivabilă şi $H'(x) = f(x) + g(x)$. Conform propoziţiei anterioare, rezultă că $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = H(x) - G(x)$ este o primitivă pentru f.

Integrarea funcţiilor raţionale

Definiţia 2.1.11. *Se numeşte* funcţie raţională, *o funcţie* $f : I \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, *unde* $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ *şi* $Q(x) \neq 0, (\forall) x \in I$.

Funcţiile raţionale simple *sunt următoarele:*

1. $f(x) = P(x)$ *funcţie polinomială.*
2. $f(x) = \frac{A}{(x-a)^n}$, $a, A \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$.
3. $f(x) = \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^n}$, $B, C, b, c \in \mathbb{R}$, $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, $n \geq 1$.

Teoremă 2.1.12. *Orice funcţie raţională se scrie, în mod unic, ca o sumă de funcţii raţionale simple.*

Demonstraţie. Presupunem că $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$. Dacă $\text{grad}(P) \geq \text{grad}(Q)$, din teorema de împărţire cu rest, există $L, R \in \mathbb{R}[X]$ cu $P = QL + R$, $\text{grad}(R) < \text{grad}(Q)$. Atunci $f(x) = L(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$.

Dacă $\text{grad}(P) < \text{grad}(Q)$, îl descompunem pe Q în produs de polinoame ireductibile (adică de gradul 1 sau de gradul 2 cu $\Delta < 0$):

$Q(X) = a(X-a_1)^{n_1} \cdots (X-a_p)^{n_p} (X^2+b_1X+c_1)^{m_1} \cdots (X^2+b_qX+c_q)^{m_q}$. Atunci:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{n_j} \frac{A_{jk}}{(x-a_j)^k} + \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{B_{jk}x + C_{jk}}{(x^2+b_jx+c_j)^k},$$

unde $A_{jk}, B_{jk}, C_{jk} \in \mathbb{R}$ se determină în mod unic din această relaţia, aducând fracţiile din dreapta la acelaşi numitor şi identificând apoi coeficienţii. $\square$

Propoziţia 2.1.13. *(Integrarea funcţiilor raţionale simple)*

1. *Dacă* $f(x) = P(x)$, *atunci folosim* $\int x^n \,\mathrm{dx} = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \mathcal{C}$.
2. $\int \frac{A}{x-a} \,\mathrm{dx} = A \ln|x-a| + \mathcal{C}$, $\int \frac{A}{(x-a)^n} \,\mathrm{dx} = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + \mathcal{C}$, $n \geq 2$.

3. *Cazul* $f(x) = \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^n}$, $b^2 - 4c < 0$ *este mai dificil, motiv pentru care îl vom defalca după cum urmează:*

   - $\int \frac{1}{x^2+bx+c}\,\mathrm{dx} = \int \frac{1}{(x+\frac{b}{2})^2+\frac{4c-b^2}{4}}\,\mathrm{dx} = \frac{2}{\sqrt{4c-b^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}} + \mathcal{C}$.
   - $\int \frac{2x+b}{x^2+bx+c}\,\mathrm{dx} = \ln(x^2+bx+c) + \mathcal{C}$.
   - $\int \frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^n}\,\mathrm{dx} = -\frac{1}{(n-1)(x^2+bx+c)^{n-1}} + \mathcal{C}$, $n \geq 2$.
   - *Fie* $J_n = \int \frac{1}{(t^2+bt+c)^n}$ *cu* $n \geq 2$. *Cu schimbarea de variabilă* $x = t + \frac{b}{2}$ *ne reducem la o integrală de forma* $I_n = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,\mathrm{dx}$. *Avem*

     $$I_n = \frac{1}{a^2} \int \frac{x^2+a^2-x^2}{(x^2+a^2)^n}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{a^2} I_{n-1} - \int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}\,\mathrm{dx}\,.$$

     Pe de altă parte, folosind

     $$\int x \frac{x}{(x^2+a^2)^n}\,\mathrm{dx} = \frac{x}{2(1-n)(x^2+a^2)^{(n-1)}} + \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1},$$

     obţinem relaţia de recurenţă

     $$I_n = \frac{1}{a^2}\left(\frac{2n-3}{2n-2}\right) I_{n-1} + \frac{x}{a^2(2n-2)(x^2+a^2)^{(n-1)}}.$$

   - *Caz particular:* $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^2}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2(x^2+x^2)}$.

Integrale care se reduc la integrale de funcţii raţionale

Integrale de forma $\int R(u(x))\,\mathrm{dx}$

Presupunem că $R(u)$ este o funcţie raţională şi $(u^{-1})'$ raţională:

1. $t = e^{ax}$, $x = \frac{1}{a} \ln t$. De exemplu $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,\mathrm{dx} = \int \frac{t\,\mathrm{dt}}{1+t} = t - \ln|1+t| + \mathcal{C} = e^x - \ln(1+e^x) + \mathcal{C}$.

2. $t = \operatorname{tg} x$, $x = \operatorname{arctg} t$. De exemplu $\int \frac{\operatorname{tg}^2 x+1}{\operatorname{tg}^2 x-1}\,\mathrm{dx} = \int \frac{\mathrm{dt}}{t^2-1} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\operatorname{tg} x-1}{\operatorname{tg} x+1}\right) + \mathcal{C}$.

3. $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, $ad - bc \neq 0$. De exemplu $\int \sqrt{\frac{2x+1}{x+3}}\,\mathrm{dx} = \int t \left(\frac{-3t^2+1}{t^2-2}\right)'\mathrm{dt} = \cdots$.

Integrale trigonometrice

Fie $\int R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{dx}$, unde $R(u,v)$ este o funcţie raţională:

1. Substituţia universală $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}$, $\mathrm{dx} = \frac{2\,\mathrm{dt}}{1+t^2}$.

   De exemplu: $\int \frac{\sin x dx}{1+\cos x+\sin x} = \int \frac{2t}{1+(1-t^2)+2t}\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{dt} = \cdots$.

2. $R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x)$, $t = \operatorname{tg} x$. $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$, $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$, $\mathrm{dx} = \frac{\mathrm{dt}}{1+t^2}$.

   De exemplu: Fie $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. $\int \frac{1}{\cos x \sin x+2}\,\mathrm{dx} = \int \frac{1}{t+2(t^2+1)}\,\mathrm{dt} = \cdots$

3. $R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x)$, $t = \sin x$. $\cos^2 x = 1 - t^2$, $\mathrm{dt} = \cos x\,\mathrm{dx}$.

   De exemplu: $\int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{dx} = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\,\mathrm{dx} = \int \frac{\mathrm{dt}}{1-t^2} = \cdots$.

4. $R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x)$, $t = \cos x$. $\sin^2 x = 1 - t^2$, $\mathrm{dt} = -\sin x\,\mathrm{dx}$.

   De exemplu: $\int \cos^4 x \sin^3 x\,\mathrm{dx} = -\int t^4(1-t^2)\,\mathrm{dt} = \cdots$.

Integrale hiperbolice

Reamintim: Cosinusul hiperbolic este $\operatorname{ch} x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, sinusul hiperbolic este $\operatorname{sh} x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$, tangenta hiperbolică este $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$. Fie $\int R(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x)\,\mathrm{dx}$, unde $R(u, v)$ este o funcţie raţională:

1. Substituţia universală $t = \operatorname{th}\frac{x}{2}$. $\operatorname{ch} x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$, $\operatorname{sh} x = \frac{2t}{1-t^2}$, $\operatorname{th} x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\mathrm{dx} = \frac{2\,\mathrm{dt}}{1-t^2}$.

2. $R(-\operatorname{ch} x, -\operatorname{sh} x) = R(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x)$, $t = \operatorname{th} x$. $\operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{1-t^2}$, $\operatorname{sh}^2 x = \frac{t^2}{1-t^2}$, $\mathrm{dx} = \frac{\mathrm{dt}}{1-t^2}$.

3. $R(-\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x) = -R(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x)$, $t = \operatorname{sh} x$. $\operatorname{ch}^2 x = 1 + t^2$, $\mathrm{dt} = \operatorname{ch} x\,\mathrm{dx}$.

4. $R(\operatorname{ch} x, -\operatorname{sh} x) = -R(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x)$, $t = \operatorname{ch} x$. $\operatorname{sh}^2 x = t^2 - 1$, $\mathrm{dt} = \operatorname{sh} x\,\mathrm{dx}$.

Integrale iraţionale

1. $\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})\,\mathrm{dx}$, unde R e raţională şi $ad - bc \neq 0$. Se foloseşte $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

2. *Integrale Euler*: $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{dx}$, $a \neq 0$, $\Delta \neq 0$.

   - Dacă $a > 0$, folosim $t = \sqrt{ax^2+bx+c} \pm \sqrt{a}x$.
   - Dacă $c > 0$, folosim $tx = \sqrt{ax^2+bx+c} \pm \sqrt{c}$.

- Dacă $a < 0, c \leq 0$, folosim $t(x - x_1) = \pm\sqrt{ax^2 + bx + c}$, unde x_1 e o rădăcină pentru $ax^2 + bx + c = 0$.

3. *Integrale binome*: $\int x^\alpha (ax^\beta + b)^\gamma \, \mathrm{dx}$, $a, b, c \in \mathbb{Q}$.
   - Dacă $\gamma \in \mathbb{Z}$, folosim $t = x^s$, unde s e numitor comun pentru fracţiile a şi b.
   - Dacă $\frac{\alpha+1}{\beta} \in \mathbb{Z}$, folosim $t^r = ax^\beta + b$, unde r e numitorul lui γ.
   - Dacă $\frac{\alpha+1}{\beta} + \gamma \in \mathbb{Z}$, folosim $t^r x^\beta = ax^\beta + b$, unde r e numitorul lui γ.
4. Integrale de tipul $\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, unde P este un polinom de grad $n \geq 1$. Atunci există un polinom Q de grad $n - 1$ şi $\lambda \in \mathbb{R}$, astfel încât:
$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = Q(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$
5. Integrale de tipul $\int \frac{\mathrm{dx}}{(x-a)^n \sqrt{x^2+bx+c}}$. Se foloseşte $t = \frac{1}{x-a}$.
6. Integrale de tipul $\int R(x, \sqrt{x^2 + a^2}) \, \mathrm{dx}$. Se poate folosi $x = a \operatorname{tg} t$ sau $x = a \operatorname{sh} t$.
7. Integrale de tipul $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) \, \mathrm{dx}$. Se poate folosi $x = \frac{a}{\sin t}$ sau $x = a \operatorname{ch} t$.
8. Integrale de tipul $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) \, \mathrm{dx}$. Se poate folosi $x = a \sin t$ sau $x = a \operatorname{th} t$.

Exerciţii

1. Calculaţi:
   a) $\int (2 + 3x - 5x^3) \, \mathrm{dx}$
   b) $\int (\frac{2}{x} + 2\sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2}) \, \mathrm{dx}$
   c) $\int (x^{\sqrt{2}} - \frac{3}{x^3} + \frac{2}{x}) \, \mathrm{dx}$
   d) $\int (2^x + 3^{x+1}) \, \mathrm{dx}$
   e) $\int (3e^{2x} + e^{-x}) \, \mathrm{dx}$
   f) $\int \frac{\mathrm{dx}}{x^2+4}$
   g) $\int \frac{\mathrm{dx}}{16x^2-9}$
   h) $\int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{x^2-4}}$

i) $\int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{2x^2+3}}$

j) $\int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{1-9x^2}}$

k) $\int (2\sin(2x) + \frac{3}{\cos^2 x})\,\mathrm{dx}$

l) $\int (\mathrm{tg}^2\, x + \frac{1}{\mathrm{tg}\, x})\,\mathrm{dx}$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

2. Fie $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \leq 0 \\ a \cdot 2^x, & x > 0 \end{cases}$. $a =$? a.î. f să admită primitive? Calculaţi $\int f(x)\,\mathrm{dx}$.

3. Fie $F(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ şi $g(x) = \begin{cases} \cos(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$.

   a) Calculaţi $f(x) := F'(x)$

   b) Arătaţi că f nu e continuă

   c) Arătaţi că g are proprietatea lui Darboux dar nu admite primitive.

4. Folosind metoda de integrare prin părţi, calculaţi:

   a) $\int \ln x\,\mathrm{dx}$

   b) $\int x^2 \ln x\,\mathrm{dx}$

   c) $\int x \ln^2 x\,\mathrm{dx}$

   d) $\int \ln(x^2+1)\,\mathrm{dx}$

   e) $\int xe^x\,\mathrm{dx}$

   f) $\int x^2 e^x\,\mathrm{dx}$

   g) $\int x\cos x\,\mathrm{dx}$

   h) $\int x^2 \sin x\,\mathrm{dx}$

   i) $\int \arcsin x\,\mathrm{dx}$

   j) $\int \arccos x\,\mathrm{dx}$

   k) $\int \mathrm{arctg}\, x\,\mathrm{dx}$

   l) $\int x^2\, \mathrm{arcctg}\, x\,\mathrm{dx}$

   m) $\int \sin^2 x\,\mathrm{dx}$

   n) $\int \cos^2 x\,\mathrm{dx}$

   o) $\int \frac{x}{\sin^2 x}\,\mathrm{dx}$

   p) $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{dx}$

5. Calculaţi integralele:
   a) $\int (x^2 - x + 1)e^{2x}\,\mathrm{dx}$
   b) $\int (x^2 + 1)\cos x\,\mathrm{dx}$
   c) $\int (2x + 1)\sin 2x\,\mathrm{dx}$
   d) $\int e^{ax}\cos bx$ şi $\int e^{ax}\sin bx,\ a, b \neq 0$
   e) $\int xe^{2x}\cos 3x\,\mathrm{dx}$

6. Calculaţi integralele:
   a) $\int \sqrt{x^2 - 4}\,\mathrm{dx}$
   b) $\int \sqrt{4x^2 + 9}\,\mathrm{dx}$
   c) $\int \sqrt{4 - x^2}\,\mathrm{dx}$
   d) $\int x^2\sqrt{x^2 + 2}\,\mathrm{dx}$

7. Calculaţi I_0, I_1, I_2 şi determinaţi relaţii de recurenţă pentru:
   a) $I_n = \int x^n e^x\,\mathrm{dx}$
   b) $I_n = \int x^n \cos x\,\mathrm{dx}$
   c) $I_n = \int x^n \sin x\,\mathrm{dx}$
   d) $I_n = \int \ln^n x\,\mathrm{dx}$
   e) $I_n = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,\mathrm{dx}$
   f) $I_n = \int \frac{x^{2n}}{x^2+a^2}\,\mathrm{dx}$
   g) $I_n = \int \frac{\mathrm{dx}}{\sin^n x}$
   h) $I_n = \int \mathrm{tg}^n x\,\mathrm{dx}$

8. Folosind prima metodă de schimbare de variabilă, calculaţi:
   a) $\int (2x + 3)^4\,\mathrm{dx},\ u = 2x + 3$
   b) $\int x(x^2 + 4)^6\,\mathrm{dx},\ u = x^2 + 4$
   c) $\int \frac{2x+3}{(x^2+3x+1)}\,\mathrm{dx},\ u = x^2 + 3x + 1$
   d) $\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{dx},\ u = \cos x$
   e) $\int \frac{x}{x^4+1}\,\mathrm{dx},\ u = x^2$
   f) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}\,\mathrm{dx},\ u = e^x$
   g) $\int \frac{\mathrm{dx}}{\frac{1}{x}\sqrt{1+\ln x}},\ u = \ln x$
   h) $\int \frac{\ln x}{x},\ u = \ln x$
   i) $\int x\,\mathrm{tg}(x^2)\,\mathrm{dx},\ u = x^2$

j) $\int \frac{\operatorname{sh}(\ln x)}{x}$, $u = \ln x$

k) $\int \frac{\sqrt{\sin x}}{\cos x}\,\mathrm{dx}$, $u = \sqrt{\sin x}$

l) $\int \frac{\mathrm{dx}}{\cos^6 x}$

m) $\int \frac{\mathrm{dx}}{\sin^6 x}$

n) $\int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+\arcsin^2 x}}\,\mathrm{dx}$

o) $\int (x+1)\sqrt[3]{(x^2+2x+3)^2}\,\mathrm{dx}$

p) $\int \frac{\mathrm{dx}}{e^x(3+e^{-x})}$

q) $\int \frac{\mathrm{dx}}{(1+x^2)(\operatorname{arcctg} x+3)}$

r) $\int x^5\sqrt{x^2-4}\,\mathrm{dx}$

s) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{dx}$

t) $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}+x\ln(x^2+1)}{x^2+1}\,\mathrm{dx}$

9. Folosind prima metodă de schimbare de variabilă, calculaţi: a) $\int \frac{\sqrt{x}}{x+2}\,\mathrm{dx}$, $x = t^2$

   b) $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{dx}$, $x = t^2$

   c) $\int e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{dx}$, $x = t^2$

   d) $\int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$, $x = t^6$

   e) $\int \cos^2\sqrt{x}\,\mathrm{dx}$, $x = t^2$

   f) $\int \frac{\mathrm{dx}}{x\sqrt{x^2-1}}$, $x = \frac{1}{t}$

   g) $\int \frac{\mathrm{dx}}{1+e^x}$, $x = -\ln t$

   h) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{dx}$, $x = 2\sin t$

10. Calculaţi integralele următoarelor funcţii raţionale:

    a) $\int (x^3 + \frac{1}{(x-2)^3} + \frac{2}{x+3})\,\mathrm{dx}$

    b) $\int \frac{x}{x^2+2x+4}\,\mathrm{dx}$

    c) $\int \frac{\mathrm{dx}}{x^2+bx+c}$, $b^2-4c<0$

    d) $\int \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^3}\,\mathrm{dx}$

    e) $\int \frac{1}{(x^2+4)^2}\,\mathrm{dx}$

    f) $\int \frac{2x+1}{(x-1)^2(x+2)}\,\mathrm{dx}$

    g) $\int \frac{x^2-3x+2}{x(x+2)^2}\,\mathrm{dx}$

h) $\int \frac{\mathrm{dx}}{x^3+x^2}$

i) $\int \frac{x^3+1}{x^3-2x+1}\,\mathrm{dx}$

j) $\int \frac{x^6}{x^3-1}\,\mathrm{dx}$

k) $\int \frac{x^2}{x^6+1}\,\mathrm{dx}$

l) $\int \frac{\mathrm{dx}}{(x^2+1)(x^2+a^2)}\,\mathrm{dx}$, $a \in \mathbb{R}$

m) $\int \frac{\mathrm{dx}}{x^4-2x-1}$

n) $\int \frac{\mathrm{dx}}{(x^2-2x+3)^2}$

p) $\int \frac{x}{(x+1)(x^2+5x+6)}\,\mathrm{dx}$

q) $\int \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)^2}\,\mathrm{dx}$

r) $\int \frac{x^6}{x^5+x^4+2x^3+2x^2+x+1}\,\mathrm{dx}$

11. Calculaţi: $I = \int \frac{x}{x^8+6x^4+1}\,\mathrm{dx}$ şi $J = \int \frac{x^5}{x^8+6x^4+1}\,\mathrm{dx}$.

    Indicaţie: $I + J = \dots$, $t = x^2 - \frac{1}{x^2}$, $I - J = \dots$, $t = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

12. Calculaţi următoarele integrale de forma $\int R(u(x))\,\mathrm{dx}$:

    a) $\int \frac{e^{2x}}{1+2e^x}\,\mathrm{dx}$, $t = e^x$

    b) $\int \frac{e^{2x}-1}{e^{3x}+1}\,\mathrm{dx}$

    c) $\int \frac{\mathrm{tg}^2\,x+1}{\mathrm{tg}^2\,x-1}\,\mathrm{dx}$, $t = \mathrm{tg}\,x$

    d) $\int \frac{\mathrm{tg}(2x)}{1+\mathrm{tg}(2x)}$

    e) $\int \sqrt{\frac{2x+1}{x+3}}\,\mathrm{dx}$, $t = \sqrt{\frac{2x+1}{x+3}}$

    f) $\int \sqrt[3]{\frac{2x-1}{x+2}}$.

13. Calculaţi integralele de forma $\int R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{dx}$ cu schimbarea de variabilă $t = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$:

    a) $\int \frac{\mathrm{dx}}{\sin x+\cos x+1}$

    b) $\int \frac{\mathrm{dx}}{5-3\cos x}$

    c) $\int \frac{\mathrm{dx}}{2\sin x-\cos x+5}$

    d) $\int \frac{\mathrm{dx}}{5+4\sin x}$

14. Calculaţi integralele de forma $R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x)$ cu schimbarea de variabilă $t = \mathrm{tg}\,x$:

a) $\int \frac{\mathrm{dx}}{\sin x \cos x+2}$

b) $\int \frac{\mathrm{dx}}{\sin^4 x \cos^4 x}$

c) $\int \frac{\mathrm{dx}}{a^2 \cos^2 x+b^2 \sin^2 x}$, $a, b \neq 0$

d) $\int \frac{\mathrm{dx}}{\sin^4 x+\cos^4 x}$.

15. Calculaţi integralele de forma $R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x)$ cu schimbarea de variabilă $t = \sin x$:

a) $\int \frac{\mathrm{dx}}{\cos x}$

b) $\int \cos^3 x \sin^4 x \,\mathrm{dx}$

c) $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^4 x} \,\mathrm{dx}$

d) $\int \frac{\mathrm{dx}}{\sin^2 x \cos^3 x}$

16. Calculaţi integralele de forma $R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x)$ cu schimbarea de variabilă $t = \cos x$:

a) $\int \frac{\mathrm{dx}}{\sin x}$

b) $\int \cos^4 x \sin^5 x \,\mathrm{dx}$

c) $\int \frac{\mathrm{dx}}{\sin x \cos(2x)} \,\mathrm{dx}$

d) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} \,\mathrm{dx}$

17. Calculaţi integralele de forma $\int R(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x) \,\mathrm{dx}$:

a) $\int \frac{\mathrm{dx}}{2 \operatorname{sh} x+3 \operatorname{ch} x}$, $t = \operatorname{th} \frac{x}{2}$.

b) $\int \frac{\mathrm{dx}}{\operatorname{ch}^4 x}$, $t = \operatorname{th} x$

c) $\int \frac{\mathrm{dx}}{\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch} x}$, $t = \operatorname{sh} x$

d) $\int \frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh} x} \,\mathrm{dx}$, $t = \operatorname{ch} x$

18. Calculaţi integralele de forma $\int (R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}) \,\mathrm{dx}$, $ad - bc \neq 0$:

a) $\int \frac{\mathrm{dx}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$

b) $\int \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}+1} \,\mathrm{dx}$

c) $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \,\mathrm{dx}$

d) $\int \frac{x+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}} \,\mathrm{dx}$.

19. Calculaţi integralele Euler: $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) \,\mathrm{dx}$, $a \neq 0$, $\Delta \neq 0$:

a) $\int \frac{\mathrm{dx}}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$, $(a > 0)$

b) $\int \frac{\mathrm{dx}}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$, $(a > 0)$

c) $\int \frac{\mathrm{dx}}{x\sqrt{-x^2+x+1}}$, $(a < 0, c > 0)$

d) $\int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{-x^2+x+2}}$, $(a < 0, c > 0$

e) $\int \frac{\mathrm{dx}}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}$, $(a < 0, c \leq 0)$

f) $\int x\sqrt{3x - x^2 - 2}\,\mathrm{dx}$, $(a < 0, c \leq 0)$

20. Calculaţi integralele binome $\int x^\alpha(ax^\beta + b)^\gamma\,\mathrm{dx}$:

a) $\int \sqrt{x}(\sqrt[3]{x^2} + 1)^2\,\mathrm{dx}$, $(\gamma \in \mathbb{Z})$

b) $\int \sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x^2} + 1)^4\,\mathrm{dx}$, $(\gamma \in \mathbb{Z})$

c) $\int x\sqrt[3]{x^2 + 1}\,\mathrm{dx}$, $(\frac{\alpha+1}{\beta} \in \mathbb{Z})$

d) $\int \frac{\sqrt{x^3+1}}{x^4}\,\mathrm{dx}$, $(\frac{\alpha+1}{\beta} \in \mathbb{Z})$

e) $\int x\sqrt[3]{x^3 + 1}\,\mathrm{dx}$, $(\frac{\alpha+1}{\beta} + \gamma \in \mathbb{Z})$

f) $\int x^5\sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}\,\mathrm{dx}$, $(\frac{\alpha+1}{\beta} + \gamma \in \mathbb{Z})$

21. Folosind $\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{dx} = Q(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $\mathrm{grad}(Q) = \mathrm{grad}(P) - 1$, calculaţi:

a) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{dx}$

b) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+x-1}}\,\mathrm{dx}$.

22. Calculaţi integralele de forma $\int \frac{\mathrm{dx}}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $t = \frac{1}{x-\alpha}$:

a) $\int \frac{\mathrm{dx}}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}$

b) $\int \frac{\mathrm{dx}}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}$

23. Calculaţi integrale de forma $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$, prin schimbarea de variabila $t = x + \frac{b}{2a}$:

a) $\int \sqrt{3 - 2x - x^2}\,\mathrm{dx}$

b) $\int \frac{\mathrm{dx}}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

c) $\int \sqrt{x^2 - 2x + 2}\,\mathrm{dx}$,

d) $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{dx}$.

e) $\int \sqrt{x^2 + x}\,\mathrm{dx}$,

f) $\int \frac{\mathrm{dx}}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}}$.

2.2 Integrale definite.

Definiţia 2.2.1. *Fie $a < b \in \mathbb{R}$. Se numeşte* diviziune *a intervalului $I = [a, b]$, un sistem de puncte $\Delta = (a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b)$. Notăm $\mathcal{D}_{[a,b]}$ mulţimea diviziunilor lui $[a, b]$.*

Dacă $\Delta \in \mathcal{D}_{[a,b]}$, norma lui Δ este numărul $||\Delta|| = \max_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})$.

O diviziune Δ se numeşte echidistantă, *dacă $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}, (\forall)i$.*

Fie $\xi = (\xi_i)_i$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $1 \leq i \leq n$ un sistem de puncte intermediare pentru $\Delta \in \mathcal{D}_{[a,b]}$. Suma Riemann *asociată funcţiei f, diviziunii Δ şi lui ξ este*

$$\sigma_\Delta(f, \xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Observaţia 2.2.2. Fie $f : [a, b] \to [0, \infty)$ continuă. Subgraficul lui f este

$$\Gamma_f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], 0 \leq f(x) \leq y\}.$$

Numărul $f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ reprezintă aria unui dreptunghi cu baza de lungime $x_i - x_{i-1}$ si înălţimea $f(\xi_i)$. Prin urmare, $\sigma_\Delta(f, \xi)$ aproximează aria lui Γ_f prin suma ariilor unor dreptunghiuri.

Definiţia 2.2.3. *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Spunem că f este* integrabilă Riemann *pe $[a, b]$ şi are integrala $I := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}$, dacă se verifică una din condiţiile echivalente:*

1. *$(\forall)\epsilon > 0$, $(\exists)\delta_\epsilon > 0$ astfel încât, $(\forall)\Delta \in \mathcal{D}_{[a,b]}$ cu $||\Delta|| < \delta_\epsilon$ şi $(\forall)\xi$ sistem de puncte intermediare pentru Δ, avem $|\sigma_\Delta(f, \xi) - I| < \epsilon$.*

2. *$(\forall)\Delta_n \in \mathcal{D}_{[a,b]}$ cu $\lim_n ||\Delta_n|| = 0$, $(\forall)\xi^n$ sistem de puncte intermediare pentru Δ_n, rezultă că $\lim_n \sigma_{\Delta_n}(f, \xi^n) = I$.*

3. *$(\forall)n \geq 1$, $\Delta_n = (a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b), x_i = x_0 + \frac{(b-a)i}{n}$ diviziune echidistantă, $(\forall)\xi^n$ sistem de puncte intermediare pentru Δ_n, rezultă că $\lim_n \sigma_{\Delta_n}(f, \xi^n) = I$.*

Propoziţia 2.2.4. *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Atunci:*

1. *f integrabilă $\Rightarrow$ f mărginită.*

2. *f continuă $\Rightarrow$ f integrabilă.*

3. *f monotonă $\Rightarrow$ f integrabilă.*

Definiţia 2.2.5. *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mărginită şi*

$$\Delta = (a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b) \in \mathcal{D}_{[a,b]}.$$

Notăm $m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$ *şi* $M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$. *Numerele*

$$s_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}),\ S_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

se numesc suma Darboux inferioară*, respectiv* superioară*, asociate lui* f *şi* Δ.

Observaţia 2.2.6. Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mărginită şi $\Delta \in \mathcal{D}_{[a,b]}$. Pentru orice ξ sistem de puncte intermediare pentru Δ, avem $s_\Delta(f) \le \sigma_\Delta(f,\xi) \le S_\Delta(f)$.

Definiţia 2.2.7. *Fie* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *mărginită.*

1. $\underline{I}(f) = \sup_{\Delta\in\mathcal{D}_{[a,b]}} s_\Delta(f)$ *se numeşte* integrala Darboux inferioară *a lui* f.

2. $\overline{I}(f) = \inf_{\Delta\in\mathcal{D}_{[a,b]}} S_\Delta(f)$ *se numeşte* integrala Darboux superioară *a lui* f.

Teoremă 2.2.8. *(Criteriul Darboux)* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *e integrabilă Riemann* $\Leftrightarrow \underline{I}(f) = \overline{I}(f)$.

În acest caz, $\underline{I}(f) = \overline{I}(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$.

Definiţia 2.2.9. *Dacă* $I \subset \mathbb{R}$ *este un interval cu capetele* $a \le b$, lungimea *lui* I *este numărul* $\ell(I) = b - a$. *O mulţime* $A \subset \mathbb{R}$ *se numeşte* neglijabilă *(sau de măsură Lebesgue nulă), dacă* $(\forall)\epsilon > 0$, $(\exists)(I_n)_n$ *un şir de intervale deschise cu* $A \subset \bigcup_{n\ge1} I_n$ *şi* $\sum_{n\ge1} \ell(I_n) = \lim_n(\ell(I_1) + \cdots + \ell(I_n)) < \epsilon$.

Exemplul 2.2.10. (1) Dacă A este cel mult numărabilă atunci A este neglijabilă.

(2) Pentru un interval $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$, definim $f(I) := [a, \frac{b+2a}{3}] \cup [\frac{2b+a}{3}, b]$. Cu alte cuvinte $f(I)$ se obţine împărţind intervalui I în 3 intervale egale şi eliminând intervalul deschis din mijloc. Fie $C_0 = [0,1], C_{n+1} = f(C_n), n \ge 0$.

Mulţimea lui Cantor este $C = \bigcap_{n\ge0} C_n$. Fiecare C_n este o reuniune disjunctă de intervale închise cu suma lungimilor $\left(\frac{2}{3}\right)^n$. Cum $\lim_n \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ rezultă că mulţimea C este neglijabilă. Pe de altă parte, orice număr real $x \in C$ are o scriere în baza 3 de forma $x = 0, x_1x_2x_3\ldots$, cu $x_i \in \{0,2\}$. Asta arată că mulţimea C e nenumărabilă.

Teoremă 2.2.11. *(Criteriul Lebesgue) Fie* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. *Atunci* f *este integrabilă Riemann* $\Leftrightarrow f$ *e mărginită şi mulţimea punctelor de discontinuitate a lui* f *este neglijabilă.*

Corolarul 2.2.12. *Fie* $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. *Dacă* f *e integrabilă şi mulţimea* $\{x \in [a,b] \mid f(x) \ne g(x)\}$ *este finită, atunci* g *e integrabilă şi* $\int_a^b g(x)\,\mathrm{dx} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$.

2. *Dacă f, g sunt integrabile, atunci $f + g$, fg sunt integrabile.*

3. *Dacă f e integrabilă, atunci αf e integrabilă.*

4. *Dacă f e integrabilă, atunci $|f|$ e integrabilă (reciproca e falsă!).*

5. *Dacă f, g sunt integrabile, atunci $\max\{f, g\}, \min\{f, g\}$ sunt integrabile.*

6. *Dacă f, g sunt integrabile, $f(x) > 0$ pe $[a, b]$, atunci f^g e integrabilă.*

7. *Dacă f e integrabilă pe $[a, b]$ şi $[a', b'] \subset [a, b]$, atunci f e integrabilă pe $[a', b']$.*

8. *Dacă $c \in [a, b]$ şi f e integrabilă pe $[a, c]$ şi pe $[c, b]$, atunci f e integrabilă pe $[a, b]$.*

Propoziţia 2.2.13. *Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile, $\alpha \in \mathbb{R}$, $c \in [a, b]$. Atunci:*

1. $\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{dx} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} + \int_a^b g(x)\,\mathrm{dx}$.

2. $\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{dx} = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$.

3. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \int_a^c f(x)\,\mathrm{dx} + \int_c^b f(x)\,\mathrm{dx}$.

4. *Notăm* $\int_b^a f(x)\,\mathrm{dx} = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$. *Avem* $\int_a^a f(x)\,\mathrm{dx} = 0$.

5. *Dacă $f(x) \geq 0, (\forall)x \in [a, b]$, atunci $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} \geq 0$.*

6. *Dacă $f(x) \geq 0, (\forall)x \in [a, b]$ şi există $x_0 \in [a, b]$ în care f e continuă şi $f(x_0) > 0$, atunci $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} > 0$.*

7. *Dacă $f(x) \leq g(x), (\forall)x \in [a, b]$, atunci $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{dx}$.*

8. $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{dx}$.

Propoziţia 2.2.14.

1. *Dacă $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ este impară, atunci $\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{dx} = 0$.*

2. *Dacă $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ este pară, atunci $\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{dx} = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{dx}$.*

Teoremă 2.2.15. *(Formula Leibniz-Newton) Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă şi care admite primitive. Fie F o primitivă pentru f. Atunci:*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

Observaţia 2.2.16. (1) Orice funcţie continuă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ admite primitive şi este integrabilă. Reciproca nu este adevărată. $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ are primitiva $F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Pe de altă parte, f e integrabilă, deoarece e mărginită şi singurul punct de discontinuitate este 0 (f nu are limită în 0).

(2) Există funcţii care sunt integrabile dar nu admit primitive. De exemplu $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [-1,0) \\ x+1, & x \in [0,1] \end{cases}$ e monotonă (deci integrabilă) dar nu are proprietatea lui Darboux pe $[-1,1]$ (deci nu admite primitive).

(3) Există funcţii care admit primitive dar nu sunt integrabile. De exemplu $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x}, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ are primitiva $F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x^2}, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Pe de altă parte, f nu e mărginită, deci nu e integrabilă.

(4) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ pentru $x \in \mathbb{Q}$ şi $f(x) = 0$ pentru $x \notin \mathbb{Q}$, e discontinuă în orice punct din $[0,1]$, deci nu e integrabilă. De asemenea, f nu admite primitive.

Propoziţia 2.2.17. *(Formula de integrare prin părţi) Dacă $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sunt de clasă C^1, atunci*

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{dx} = f(x)g(x)\big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{dx}\,.$$

Propoziţia 2.2.18. *(Prima schimbare de variabilă) Fie $f : I \to \mathbb{R}$ continuă , $u : [a,b] \to I$, $u = u(x)$, de clasă C^1.*

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)\,\mathrm{dx} = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,\mathrm{du}\,.$$

Propoziţia 2.2.19. *(A doua schimbare de variabilă) Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuă,*
$\varphi : [c,d] \to [a,b]$, $x = \varphi(t)$ bijectivă, derivabilă şi cu derivata continuă şi nenulă. Atunci:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{dt}\,.$$

Teoremă 2.2.20. *(de medie) Dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este continuă, atunci există $c \in [a,b]$ astfel încât*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = (b-a)f(c).$$

Numărul $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$ *se numeşte* valoarea medie *a lui* f *pe* $[a,b]$.

Teoremă 2.2.21. *(de medie-variantă) Dacă* $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ *sunt continue,* $g(x)\geq 0, (\forall)x\in[a,b]$*, atunci există* $c\in[a,b]$ *astfel încât*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{dx} = f(c)\int_a^b g(x)\,\mathrm{dx}\,.$$

Teoremă 2.2.22. *Dacă* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *e continuă, atunci* $F:[a,b]\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{dt}$*, este primitiva lui* f *cu proprietatea că* $F(a)=0$.

Aplicaţii ale integralelor definite

1. **Calculul limitelor unor şiruri definite prin sume Riemann**:
   Dacă există $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continuă, atunci $\frac{1}{n}\lim_n\sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n}) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{dx}$.
   De exemplu, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^n \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{dx} = \ln 2$.

2. **Lungimea graficului unei funcţii**: Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ de clasă C^1. Atunci lungimea graficului lui f este

$$\ell(G_f) = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathrm{dx}\,.$$

3. **Aria subgraficului unei funcţii**: Fie $f:[a,b]\to[0,\infty)$ continuă. *Subgraficul* lui f este $\Gamma_f=\{(x,y)\mid x\in[a,b], y\in[0,f(x)]\}$. Atunci

$$\text{Aria}(\Gamma_f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}\,.$$

   Γ_f este domeniul cuprins între graficul lui f, axa OX şi dreptele $x=a$, $x=b$. Pentru $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $Aria(\Gamma_f)=\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{dx}$.

4. **Aria domeniului dintre două grafice**: Fie $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue astfel încât $f(x)\leq g(x), (\forall)x\in[a,b]$. Fie $\Gamma_{f,g}=\{(x,y)\mid x\in[a,b], y\in[f(x),g(x)]\}$. Atunci

$$\text{Aria}(\Gamma_{f,g}) = \int_a^b (g(x)-f(x))\,\mathrm{dx}\,.$$

   Dacă nu cerem $f(x)\leq g(x)$, atunci $\text{Aria}(\Gamma_{f,g})=\int_a^b |g(x)-f(x)|\,\mathrm{dx}$.

5. **Centrul de greutate pentru o placă omogenă**: Fie $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue cu $f(x)\leq g(x), (\forall)x\in[a,b]$. Considerăm placa omogenă $D=\Gamma_{f,g}$. Atunci coordonatele centrului de greutate al plăcii D sunt:

$$x_G = \frac{\int_a^b x(g(x)-f(x))\,\mathrm{dx}}{\text{Aria}(D)},\ y_G = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b (g(x)^2-f(x)^2)\,\mathrm{dx}}{\text{Aria}(D)}.$$

6. **Aria suprafeţei de rotaţie**: Fie $f : [a, b] \to [0, \infty)$ de clasă C^1. *Suprafaţa de rotaţie* obţinută prin rotirea graficului funcţiei în jurul axei OX este

$$S_f = \{(x, y, z) \mid y^2 + z^2 = f(x)^2, x \in [a, b]\}.\text{ Atunci}$$

$$\text{Aria}(S_f) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{dx}\,.$$

7. **Volumul corpului de rotaţie**: Fie $f : [a, b] \to [0, \infty)$ continuă. *Corpul de rotaţie* obţinut prin rotirea subgraficului funcţiei în jurul axei OX este

$$C_f = \{(x, y, z) \mid y^2 + z^2 \le f(x)^2, x \in [a, b]\}.\text{ Atunci}$$

$$\text{Volum}(C_f) = \pi \int_a^b f(x)^2\,\mathrm{dx}\,.$$

8. **Lucrul mecanic pentru mişcarea rectilinie**: Considerăm un punct material de masă m care se deplasează rectiliniu conform legii $x = x(t)$ sub acţiunea unei forţe $F(x)$. Atunci lucrul mecanic efectuat între $x_1 = x(t_1)$ şi $x_2 = x(t_2)$ este

$$L_{12} = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,\mathrm{dx} = \int_{t_1}^{t_2} F(x(t))v(t)\,\mathrm{dt} = \left.\frac{mv(t)^2}{2}\right|_{t_1}^{t_2} = \frac{m(v_1^2 - v_2^2)}{2},$$

$v(t) = x'(t)$ este viteza, $v_1 = v(t_1)$, $v_2 = v(t_2)$.

9. **Lucrul mecanic în termodinamică**: $L_{12} = \int_{V_1}^{V_2} P(V)dV$, unde V_1 este volumul iniţial, V_2 volumul final, $P(V)$ = presiunea privită ca funcţie de volum. Ţinând cont de legea gazului ideal $PV = \nu RT$, unde R e constanta universală a gazului ideal, T e temperatura şi ν este numărul de moli, putem calcula lucrul mecanic în cazul unor transformări termodinamice speciale:

   - Transformarea izocoră (V = constant): $L_{12} = 0$ (deoarece $V_1 = V_2$)
   - Transformarea izobară (P = constantă): $L_{12} = P(V_2 - V_1)$.
   - Transformarea izotermă (T = constantă): $L_{12} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\nu RT}{V} dV = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}$.
   - Transformarea adiabată ($PV^\gamma = k$ constant): $L_{12} = \frac{k}{1-\gamma}(V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma})$. Observaţie: $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ este exponentul adiabatic, i numărul gradelor de libertate ale gazului ($i = 3$ monoatomic, $i = 5$ moleculă biatomică etc.), $C_V = \frac{iR}{2}$ capacitatea termică la volum constant, $C_P = C_V + R$ capacitatea termică la presiune constantă.

10. **Lucrul mecanic pentru deplasarea pe o curbă în spaţiu**: Presupunem că avem un punct material care se deplasează pe o curbă parametrizată prin $\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ sub acţiunea unei forţe $\overrightarrow{F} = (F_x, F_y, F_z)$. Atunci lucrul mecanic efectuat în intervalul de timp $[t_1, t_2]$ este

$$L_{12} = \int_{t_1}^{t_2} (F_x(\overrightarrow{r}(t))x'(t) + F_y(\overrightarrow{r}(t))y'(t) + F_x(\overrightarrow{r}(t))z'(t))\,\mathrm{dt}\,.$$

Calculul aproximativ al integralelor definite

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuă. Vrem să aproximăm valoarea $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$.

1. **Metoda dreptunghiurilor**: Alegem $\Delta_n = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$ diviziunea echidistantă cu $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$ şi $\xi_i = x_i$ pentru $1 \leq i \leq n$. Atunci, pentru $n \gg 0$ (adică n suficient de mare), avem:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} \approx \sigma_{\Delta_n}(f, \xi) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}).$$

2. **Metoda trapezelor**: Alege Δ_n şi ξ ca mai sus. Fie $\xi_i' = x_{i-1}$ cu $1 \leq i \leq n$. Atunci:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} \approx \frac{1}{2}(\sigma_{\Delta_n}(f, \xi) + \sigma_{\Delta_n}(f, \xi')).$$

3. **Metoda de interpolare Lagrange**: Dacă f este de clasă C^{n+1} şi $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ distincte, atunci $(\exists)P_n \in \mathbb{R}[X]$, $\operatorname{grad} P = d$ cu $P_d(x_i) = f(x_i)$, $(\forall)0 \leq i \leq n$, care se numeşte polinomul de interpolare Lagrange de ordin n. Avem:

$$P_n(X) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(X),\ L_i(x) = \prod_{j\neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}.$$

Mai mult, $|f(x) - P_n(x)| \leq \sup_{t\in[a,b]} \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}|(x - x_0)\cdots(x - x_n)|$. Atunci

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} \approx \int_a^b P_n(x)\,\mathrm{dx},$$

iar eroarea poate fi estimată din relaţia anterioară.

Exerciţii

1. Calculaţi:
   a) $\int_1^2 (x^2 - \frac{2}{x^3} + 2\sqrt[3]{x^2})\,\mathrm{dx}$
   b) $\int_{-3}^{-1} (\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} - 3^x)\,\mathrm{dx}$
   c) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos(2x) + \frac{1}{\cos^2 x})\,\mathrm{dx}$
   d) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} (\cos^2 x + \sin x \cos x)\,\mathrm{dx}$
   e) $\int_0^2 \frac{\mathrm{dx}}{x^2+4}$
   f) $\int_1^2 \frac{\mathrm{dx}}{9x^2-4}$
   g) $\int_0^1 \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{x^2+3}}$
   h) $\int_0^1 \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{4-x^2}}$
   i) $\int_2^3 \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{x^2-1}}$
   j) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\mathrm{tg}\, x + \mathrm{ctg}\, x)\,\mathrm{dx}$
2. Folosind metoda de integrare prin părţi, calculaţi:
   a) $\int_1^2 x \ln^2 x\,\mathrm{dx}$
   b) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} x^2 \cos x\,\mathrm{dx}$
   c) $\int_0^1 (x^2 + x - 1)e^{2x}\,\mathrm{dx}$
   d) $\int_0^{\sqrt{3}} x^2 \,\mathrm{arctg}\, x\,\mathrm{dx}$
   e) $\int_0^{\frac{1}{2}} x \arcsin x\,\mathrm{dx}$
   f) $\int_0^1 \sqrt{x^2+4}\,\mathrm{dx}$
   g) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{dx}$
   h) $\int_1^2 \sqrt{4x^2-3}\,\mathrm{dx}$
3. Folosind schimbări de variabilă, calculaţi:
   a) $\int_1^3 (2x+3)^5\,\mathrm{dx}$
   b) $\int_0^2 (2x+1)(x^2+x-1)^5\,\mathrm{dx}$
   c) $\int_1^2 \frac{x}{x^2-9}\,\mathrm{dx}$
   d) $\int_0^1 \frac{x}{x^2+2x+3}\,\mathrm{dx}$
   e) $\int_0^1 \frac{x}{x^4+1}\,\mathrm{dx}$

f) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{dx}$

g) $\int_1^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,\mathrm{dx}$

h) $\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{4\ln^2 x+1}}\,\mathrm{dx}$

i) $\int_0^2 \frac{\sqrt{x}}{x+4}\,\mathrm{dx}$

4. Calculaţi integralele raţionale şi care se reduc la integrale raţionale:

a) $\int_0^1 \frac{x}{x^2+x+1}\,\mathrm{dx}$

b) $\int_{-1}^0 \frac{\mathrm{dx}}{x^3+8}$

c) $\int_0^1 \frac{\mathrm{dx}}{(x^2+2)^2}$

d) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{dx}}{1+2\cos x}$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{dx}}{1+\sin x\cos x}$

f) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} \sin^3 x\cos^4 x\,\mathrm{dx}$

g) $\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin x\sqrt{1+\cos x}\,\mathrm{dx}$

h) $\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{x+2}}{1+x+\sqrt{x+2}}\,\mathrm{dx}$

i) $\int_1^2 x\sqrt[3]{x^3+1}\,\mathrm{dx}$

j) $\int_1^2 \sqrt{\frac{2x-1}{2x+1}}\,\mathrm{dx}$

k) $\int_0^2 \frac{\mathrm{dx}}{x+\sqrt{x^2+4}}$

l) $\int_1^2 \frac{\mathrm{dx}}{(2x+3)\sqrt{4+x-x^2}}$

m) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\cos x}\,\mathrm{dx}$

5. Fie $I_n = \int_1^2 \frac{\ln^n x}{x(1+\ln^2 x)}\,\mathrm{dx}$. Calculaţi I_0, I_1. Arătaţi că $\lim_n I_n = 0$.

6. Fie $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}\,\mathrm{dx}$. Calculaţi I_0, I_1, I_2, I_3. Arătaţi că $\lim_n I_n = 0$.

7. Calculaţi limitele şirurilor, folosind sume Riemann:

a) $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$

b) $a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n e^{\frac{k}{n}}$

c) $a_n = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^n \sin\frac{k\pi}{n}$

d) $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2}$

e) $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{n^2-k^2}}{n^2}$

f) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{n^4+k^4}}$

g) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{(n+k)^2}$

8. Calculaţi lungimile curbelor:

   a) $y = x^2 + x + 1$, $x \in [0, 1]$

   b) $y = \operatorname{ch} x$, $x \in [0, 1]$

   c) $y = x\sqrt{x}$, $x \in [0, 2]$

   d) $y = \ln \cos x$, $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$

   e) $\mathcal{C}(O, r)$ = cercul de rază r şi cu centrul în origine O.

9. Calculaţi următoarele arii:

   a) Aria interiorului elipsei $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (Pentru $a = b$ se obţine aria discului de rază a)

   b) Aria domeniului mărginit de $y = x$, $y = \frac{1}{x^2}$ şi $x = 2$.

   c) Aria domeniului mărginit de $y = x$ şi $y = \frac{x^2+3x-2}{4}$

   d) Aria domeniului mărginit de $y = \ln x$ şi $y = \ln^2 x$

   e) Aria domeniului mărginit de $y = \sqrt{x}$ şi $y = \sqrt{1-x^2}$.

10. Calculaţi aria suprafeţei de rotaţie a funcţiei:

    a) $f(x) = \frac{x^3}{3}$, $x \in [0, 1]$

    b) $f(x) = \operatorname{ch} x$, $x \in [-1, 1]$

    c) $f(x) = \cos 2x$, $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$

11. Calculaţi aria laterală a unui trunchi de con

12. Calculaţi aria unei sfere de rază r.

13. Calculaţi volumul corpului de rotaţie al funcţiei:

    a) $f(x) = \sin x$, $x \in [0, \pi]$

    b) $f(x) = x\sqrt{1-x}$, $x \in [0, 1]$

    c) $f(x) = e^{-x}$, $x \in [-1, 2]$

    f) $f(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, $x \in [-a, a]$.

14. Calculaţi volumul unui trunchi de con

15. Calculaţi volumul unei bile de rază R.

16. Determinaţi centrul de greutate al unei plăci omogene cuprinsă între graficele funcţiilor continue $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$:

    a) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$

    b) $f(x) = x$, $g(x) = e^x$, $x \in [0, 2]$

    c) $f(x) = 2 - x$, $g(x) = x^2$, $x \in [0, 1]$

17. Determinaţi centrul de greutate pentru sfertul de disc $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2,\ x, y \geq 0\}$.

18. Care este lucrul mecanic efectuat în 10 secunde de un mobil de masă $m = 2$ care se deplasează rectiliniu cu acceleraţia $a(t) = 2t + 1$, pornind din repaos?

19. Care este lucrul mecanic efectuat în transformările:

    a) izocoră: $V_1 = V_2 = 10$ litri.

    b) izobară: $P_1 = P_2 = 10$ bari, $V_1 = 1m^3$ şi $V_2 = 2m^3$.

    c) izotermă: $T_1 = T_2 = 300K$, $V_1 = 1m^3$, $V_2 = 2m^3$, $P_1 = 10$ bari.

    d) adiabativă: $P_1 = 5$ bari, $V_1 = 1m^3$, $P_2 = 10$ bari, cu exponentul adiabatic $\gamma = \frac{3}{2}$.

20. Folosind metoda dreptunghiurilor şi metoda trapezelor, estimaţi integralele:

    a) $\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{dx}$, cu $n = 2, 3, 4, 5$.

    b) $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{dx}$, $n = 2, 3, 4, 5$.

21. Determinaţi polinomul de interpolare P de grad 4 pentru $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ şi punctele $x_0 = 0$, $x_1 = 0,3$, $x_2 = 0,6$ şi $x_3 = 1$. Aproximaţi $\frac{\pi}{4}$, folosind P.

2.3 Integrale improprii

Am văzut în secţiunea anterioară, că dacă $f : I := [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă, atunci f este integrabilă Riemann. Ce se poate spune însă dacă $I \subset R$ este un interval necompact cu capetele $a < b$ din $\overline{\mathbb{R}}$? Are sens să vorbim de integrala $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$?

Definiţia 2.3.1. *Fie* $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ *continuă, spunem că* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$ *este convergentă, dacă există*

$$\lim_{u\nearrow b} \int_a^u f(x)\,\mathrm{dx} = \ell \in \mathbb{R}.$$

În caz contrar, spunem că $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$ *este divergentă. Dacă există*

$$\lim_{u\nearrow b} \int_a^u f(x)\,\mathrm{dx} = \ell \in \overline{\mathbb{R}},$$

spunem că $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \ell$.

Definiţia 2.3.2. *Fie* $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ *continuă, spunem că* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$ *este convergentă, dacă există*

$$\lim_{u\searrow a} \int_u^b f(x)\,\mathrm{dx} = \ell \in \mathbb{R}.$$

În caz contrar, spunem că $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$ *este divergentă. Dacă există*

$$\lim_{u\searrow a} \int_u^b f(x)\,\mathrm{dx} = \ell \in \overline{\mathbb{R}},$$

spunem că $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \ell$.

Definiţia 2.3.3. *Fie* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *continuă, spunem că* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$ *este convergentă, dacă există* $c \in (a, b)$, *astfel încât* $\int_a^c f(x)\,\mathrm{dx}$ *şi* $\int_c^b f(x)\,\mathrm{dx}$ *sunt convergente. În caz contrar, spunem că* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$ *este divergentă.*

Dacă $\int_a^c f(x)\,\mathrm{dx} = \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ *şi* $\int_c^b f(x)\,\mathrm{dx} = \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, *definim*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \int_a^c f(x)\,\mathrm{dx} + \int_c^b f(x)\,\mathrm{dx} = \ell_1 + \ell_2,$$

excepţie făcând cazurile de nedeterminare $\infty - \infty$.

Exemplul 2.3.4. (1) Fie $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Atunci:

$$\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{dx} = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{dx} = \lim_{u\to\infty} \int_1^u \frac{1}{x^2}\,\mathrm{dx} = \lim_{u\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^u = \lim_{u\to\infty} \left(1 - \frac{1}{u}\right) = 1,$$

deci integrala este convergentă.

(2) Fie $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Atunci:

$$\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{dx} = \int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{dx} = \lim_{u\to\infty} \int_1^u \frac{1}{x}\,\mathrm{dx} = \lim_{u\to\infty} \ln x|_1^u = \lim_{u\to\infty} (\ln u - \ln 1) = \infty,$$

deci integrala este divergentă.

(3) Fie $f : (1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$. Atunci:

$$\int_1^2 f(x)\,\mathrm{dx} = \int_1^2 \frac{\mathrm{dx}}{(x-1)^2} = \lim_{u\searrow 1} \int_u^2 \frac{\mathrm{dx}}{(x-1)^2} = \lim_{u\searrow 1} \left(-\frac{1}{x-1}\right)\Big|_u^2 = \lim_{u\searrow 1} \left(-1 + \frac{1}{u-1}\right) = \infty,$$

deci integrala este divergentă.

(4) Fie $f : [1, 2) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}}$. Atunci:

$$\int_1^2 f(x)\,\mathrm{dx} = \int_1^2 \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{2-x}} = \lim_{u\nearrow 2} \int_1^u \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{2-x}} = \lim_{u\nearrow 2} (-2\sqrt{2-x})|_1^u = \lim_{u\nearrow 2} (-2\sqrt{2-u}+2) = 2,$$

deci integrala este convergentă.

Observaţia 2.3.5. Dacă $f : I \to [0, \infty)$ este o funcţie continuă, unde I este un interval cu capetele $a < b \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} \in \mathbb{R}$ (dacă este convergentă) sau $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \infty$ (dacă este divergentă).

Propoziţia 2.3.6. *Fie $a < b \in \mathbb{R}$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$. Avem:*

(1) Dacă $a > 0$, atunci $\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{dx}$ este convergentă pentru $\alpha > 1$ şi divergentă pentru $\alpha \leq 1$.

(2) $\int_a^b \frac{\mathrm{dx}}{(x-a)^\alpha}$ este convergentă pentru $\alpha < 1$ şi divergentă pentru $\alpha \geq 1$.

(3) $\int_a^b \frac{\mathrm{dx}}{(b-x)^\alpha}$ este convergentă pentru $\alpha < 1$ şi divergentă pentru $\alpha \geq 1$.

Demonstraţie. Exerciţiu! □

Propoziţia 2.3.7. *Fie $f, g : I \to [0, \infty)$ două funcţii continue, unde I e un interval cu capetele $a < b \in \overline{\mathbb{R}}$. Presupunem că $f(x) \leq g(x)$, $(\forall)x \in I$. Atunci:*

(1) $\int_a^b g(x)\,\mathrm{dx}$ convergentă $\Longrightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$ convergentă.

(1) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$ divergentă $\Longrightarrow \int_a^b g(x)\,\mathrm{dx}$ divergentă.

Propoziţia 2.3.8. *Fie $f, g : [a, b) \to [0, \infty)$ două funcţii continue. Presupunem că există $\lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in [0, \infty]$. Atunci:*

(1) Dacă $\ell \in (0, \infty)$, integralele $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$ şi $\int_a^b g(x)\,\mathrm{dx}$ au aceeaşi natură.

(2) Dacă $\ell = 0$ şi $\int_a^b g(x)\,\mathrm{dx}$ e convergentă, atunci $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$ e convergentă.

(3) Dacă $\ell = \infty$ şi $\int_a^b g(x)\,\mathrm{dx}$ e divergentă, atunci $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$ e divergentă.

În propoziţia anterioară, $a \in \mathbb{R}$, dar $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Propoziţia 2.3.9. *Fie $f, g : (a, b] \to [0, \infty)$ două funcţii continue. Presupunem că există $\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in [0, \infty]$. Atunci:*

(1) Dacă $\ell \in (0, \infty)$, integralele $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$ şi $\int_a^b g(x)\,\mathrm{dx}$ au aceeaşi natură.

(2) Dacă $\ell = 0$ şi $\int_a^b g(x)\,\mathrm{dx}$ e convergentă, atunci $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$ e convergentă.

(3) Dacă $\ell = \infty$ şi $\int_a^b g(x)\,\mathrm{dx}$ e divergentă, atunci $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$ e divergentă.

În propoziţia anterioară, $b \in \mathbb{R}$, dar $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Corolarul 2.3.10. *Fie $f : [a, \infty) \to [0, \infty)$ continuă. Atunci:*

(1) Dacă există $\alpha > 1$ astfel încât $\lim_{x \to \infty} x^\alpha f(x) < \infty$, $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{dx}$ e convergentă.

(2) Dacă există $\alpha \leq 1$ astfel încât $\lim_{x \to \infty} x^\alpha f(x) > 0$, atunci $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{dx}$ e divergentă.

Demonstraţie. Se aplică Propoziţia 2.3.8 pentru f şi $g : [a, \infty) \to [0, \infty)$, $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. □

Corolarul 2.3.11. *Fie $a < b \in \mathbb{R}$ şi $f : [a, b) \to [0, \infty)$ continuă. Atunci:*

(1) Dacă există $\alpha < 1$ astfel încât $\lim_{x \nearrow b} (b-x)^\alpha f(x) < \infty$, atunci $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$ e convergentă.

(2) Dacă există $\alpha \geq 1$ astfel încât $\lim_{x \nearrow b} (b-x)^\alpha f(x) > 0$, atunci $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$ e divergentă.

Demonstraţie. Se aplică Propoziţia 2.3.8 pentru f şi $g : [a, b) \to [0, \infty)$, $g(x) = \frac{1}{(b-x)^\alpha}$. □

Corolarul 2.3.12. *Fie $a < b \in \mathbb{R}$ şi $f : (a, b] \to [0, \infty)$ continuă. Atunci:*

(1) *Dacă există* $\alpha < 1$ *astfel încât* $\lim_{x \searrow a}(x-a)^\alpha f(x) < \infty$, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$ *e convergentă.*

(2) *Dacă există* $\alpha \geq 1$ *astfel încât* $\lim_{x \searrow a}(x-a)^\alpha f(x) > 0$, *atunci* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$ *e divergentă.*

Demonstraţie. Se aplică Propoziţia 2.3.9 pentru f şi $g : (a,b] \to [0,\infty)$, $g(x) = \frac{1}{(x-a)^\alpha}$. □

Teoremă 2.3.13. *(Dirichlet) Fie* $a \in \mathbb{R}$ *şi* $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *cu* $a < b$. *Fie* $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ *continuă astfel încât există* $M > 0$ *pentru care*

$$\left| \int_a^u f(x)\,\mathrm{dx} \right| < M, \ (\forall) u \in [a,b).$$

Fie $g : [a,b) \to [0,\infty)$ *continuă astfel încât* $\lim_{x \searrow b} g(x) = 0$.

Atunci $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{dx}$ *este convergentă.*

Un enunţ similar se poate da pentru $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ *şi* $g : (a,b] \to [0,\infty)$.

Exemplul 2.3.14. Fie $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Deoarece $\lim_{x \searrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, din Corolarul 2.3.12 rezultă că $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{dx}$ e convergentă (1).

Pe de altă parte, pentru orice $u > \frac{\pi}{2}$, avem

$$\left| \int_{\frac{\pi}{2}}^u \sin x\,\mathrm{dx} \right| = \left| \cos x|_{\frac{\pi}{2}}^u \right| = |\cos u| \leq 1.$$

Pe de altă parte, $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$. Din criteriul Dirichlet, rezultă că $\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{dx}$ este convergentă (2). Din (1) şi (2) rezultă că $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{dx}$ este convergentă. Vom demonstra în secţiunea următoare că $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{dx} = \frac{\pi}{2}$.

Teoremă 2.3.15. *(Criteriul integral Cauchy) Fie* $f : [1,\infty) \to [0,\infty)$ *o funcţie continuă, descrescătoare şi cu* $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$.

Atunci seria $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ *şi integrala* $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{dx}$ *au aceeaşi natură.*

Exerciţii

1. Studiaţi convergenţa integralelor:

   a) $I = \int_0^2 \frac{\mathrm{dx}}{(x-2)^2}$

   b) $I = \int_1^2 \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{x-1}}$

   c) $I = \int_0^\infty \frac{\mathrm{dx}}{(x+1)^2}$

   d) $I_n = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,\mathrm{dx}$, $n \geq 0$

e) $I_a = \int_0^\infty \frac{1}{x(\ln x)^a}\,\mathrm{dx}$

f) $I = \int_0^\infty \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{x^2+1}}$

g) $I = \int_0^\infty \frac{\mathrm{arctg}(x)}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{dx}$

h) $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+x^2-x-1}}\,\mathrm{dx}$

i) $I = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^3-5x^2+8x-4}}\,\mathrm{dx}$

j) $I = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}$

k) $I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{dx}$

2. Calculaţi:

a) $I = \int_0^\infty e^{-ax}\cos(bx)\,\mathrm{dx},\ a > 0, b \in \mathbb{R}$

b) $I = \int_0^\infty e^{-ax}\sin(bx)\,\mathrm{dx},\ a > 0$

c) $I = \int_0^\infty \frac{xdx}{1+x^4}$

d) $I = \int_1^\infty \frac{\mathrm{arctg}(x)}{x^2+1}\,\mathrm{dx}$

e) $I = \int_1^\infty \frac{\mathrm{arctg}(x)}{x^2}\,\mathrm{dx}$

2.4 Integrale cu parametri

Definiţia 2.4.1. *Fie $A \subset \mathbb{R}$ şi $[a,b]$ un interval compact. Fie $f : [a,b]\times A \to \mathbb{R}$ o funcţie, cu proprietatea că pentru orice $y \in A$, funcţia $f_y : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f_y(x) = f(x,y)$, este integrabilă Riemann. Funcţia*

$$F : A \to \mathbb{R},\ F(y) := \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{dx},$$

se numeşte integrală cu parametru.

Propoziţia 2.4.2. *Dacă $f : [a,b] \times A \to \mathbb{R}$ este continuă, atunci integrala cu parametru $F : A \to \mathbb{R}$, $F(y) = \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{dx}$, este o funcţie continuă.*

Propoziţia 2.4.3. *(Derivarea integralei cu parametru - cu capete fixe)*

Fie $f : [a,b] \times (c,d) \to \mathbb{R}$ continuă, astfel încât există derivata parţială $\frac{\partial f}{\partial y}$ şi aceasta este continuă. Fie $F : (c,d) \to \mathbb{R}$, $F(y) = \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{dx}$. Atunci F e derivabilă şi

$$F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{dx},\ (\forall)y \in (c,d).$$

Propoziţia 2.4.4. *(Derivarea integralei cu parametru - cu capete mobile)*

Fie $f : [a,b] \times (c,d) \to \mathbb{R}$ continuă, astfel încât există derivata parţială $\frac{\partial f}{\partial y}$ şi aceasta este continuă. Fie $\varphi, \psi : (c,d) \to [a,b]$ două funcţii de clasă C^1. Fie $G : (c,d) \to \mathbb{R}$, $G(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,\mathrm{dx}$. Atunci G e derivabilă şi

$$G'(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{dx} + f(\psi(y),y)\psi'(y) - f(\varphi(y),y)\varphi'(y),\ (\forall)y \in (c,d).$$

Propoziţia 2.4.5. *Fie $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ continuă, atunci*

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{dy}\right)\mathrm{dx} = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{dx}\right)\mathrm{dy}\,.$$

Definiţia 2.4.6. *(Integrala cu parametru improprie) Fie $A \neq \emptyset$ şi $f : [a,b) \times A \to \mathbb{R}$ (sau $f : (a,b] \times A \to \mathbb{R}$) continuă, astfel încât $\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{dx}$ este convergentă, pentru orice $y \in A$. Funcţia*

$$F : A \to \mathbb{R},\ F(y) = \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{dx},$$

se numeşte integrală improprie cu parametru.

Dacă $f : [a,b) \times A \to \mathbb{R}$ ca mai sus, integrala $\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{dx}$ se numeşte uniform convergentă în raport cu y, pe A, dacă

$$(\forall)\varepsilon > 0,\ (\exists)b_\varepsilon \in (a,b) \text{ astfel încât } \left|\int_t^{b_\varepsilon} f(x,y)\right| < \varepsilon,\ (\forall)t \in (b_\varepsilon, b),\ y \in A.$$

Dacă $f : (a,b] \times A \to \mathbb{R}$ *ca mai sus, integrala* $\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{dx}$ *se numeşte uniform convergentă în raport cu y, pe A, dacă*

$$(\forall)\varepsilon > 0,\ (\exists)a_\varepsilon \in (a,b) \text{ astfel încât } \left|\int_a^t f(x,y)\right| < \varepsilon,\ (\forall)t \in (a, a_\varepsilon),\ y \in A.$$

Propoziţia 2.4.7. *Fie* $f : [a,b) \times A \to \mathbb{R}$ *(sau* $f : (a,b] \times A \to \mathbb{R}$*) continuă, astfel încât* $\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{dx}$ *este uniform convergentă pe A. Atunci* $F : A \to \mathbb{R}$, $F(y) = \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{dx}$, *este contină pe A.*

Propoziţia 2.4.8. *Fie* $f : [a,b) \times (c,d) \to \mathbb{R}$ *(sau* $f : (a,b] \times (c,d) \to \mathbb{R}$*) continuă astfel încât* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *există şi este continuă, integrala* $\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{dx}$ *este convergentă pentru orice* $y \in (c,d)$ *şi* $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{dx}$ *este uniform convergentă pe* (c,d).

Atunci integrala cu parametru $F(y) = \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{dx}$ *este derivabilă şi*

$$F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{dx},\ (\forall)y \in (c,d).$$

Propoziţia 2.4.9. *(Criteriu de uniform convergenţă)*

Fie $f : [a,b) \times (c,d) \to \mathbb{R}$ *continuă. Presupunem că există* $g : [a,b) \to [0,\infty)$ *astfel încât*

$$|f(x,y)| \le g(x),\ (\forall)x \in [a,b),\ y \in (c,d),$$

şi $\int_a^b g(x)\,\mathrm{dx}$ *este convergentă.*

Atunci $\int_a^b |f(x,y)|\,\mathrm{dx}$ *este uniform convergentă şi, în particular, de aici rezultă că* $\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{dx}$ *este uniform convergentă. Mai mult, avem:*

$$\left|\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{dx}\right| \le \int_a^b |f(x,y)|\,\mathrm{dx} \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{dx}\,.$$

Teoremă 2.4.10. *(Formula lui Froullani) Fie* $0 < a < b$ *şi* $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă şi mărginită, astfel încât integrala* $\int_1^\infty \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{dx}$ *este convergentă. Atunci:*

$$\int_0^\infty \frac{f(bx) - f(ax)}{x}\,\mathrm{dx} = f(0)\ln\frac{a}{b}.$$

Funcţiile Γ şi B

Definiţia 2.4.11. *Fie* $a > 0$. $\Gamma(a) := \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,\mathrm{dx}$ *se numeşte funcţia (integrala)* Γ *(Gamma), a lui Euler.*

Proprietăţile funcţiei Γ:

1. $\Gamma(a)$ este convergentă, $(\forall)a > 0$.
2. $\Gamma(1) = 1$.
3. $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$, $(\forall)a > 0$.
4. $\Gamma(n+1) = n!$, $(\forall)n \in \mathbb{N}$.
5. $\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}$, $(\forall)a \in (0,1)$.
6. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Definiţia 2.4.12. *Fie $a, b > 0$. $B(a,b) := \int_0^1 x^{a-1}(1-a)^{b-1}\,\mathrm{dx}$ se numeşte funcţia (integrala) B (Beta), a lui Euler.*

Proprietăţile funcţiei B:

1. $B(a,b)$ este convergentă, $(\forall)a, b > 0$.
2. $B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$, $(\forall)a, b > 0$.
3. $B(a,b) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2a-1} x \cos^{2b-1} x\,\mathrm{dx}$, $(\forall)a, b > 0$.
4. $B(a,b) = \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}\,\mathrm{dx}$, $(\forall)a, b > 0$.

Exerciţii

1. Calculaţi $F(y) = \int_0^{\infty} e^{-yx}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{dx}$, $y \geq 0$. Arătaţi că $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{dx} = \frac{\pi}{2}$.
2. Calculaţi $F(y) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{arctg}(y\,\mathrm{tg}\,x)}{\mathrm{tg}\,x}\,\mathrm{dx}$, $y \geq 0$. Calculaţi $\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\mathrm{tg}\,x}\,\mathrm{dx}$.
3. Calculaţi $F(y) = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{arctg}(xy)}{x(1+x^2)}\,\mathrm{dx}$, $y \geq 0$.
4. Calculaţi $F(y) = \int_0^{1} \frac{\mathrm{arctg}(xy)}{x\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{dx}$, $y \in \mathbb{R}$.
5. Calculaţi $F(y) = \int_0^{\infty} e^{-x^2-\frac{y^2}{x^2}}\,\mathrm{dx}$, $y \geq 0$, folosind $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{dx} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
6. Calculaţi $F(y) = \int_0^{\infty} \frac{ln(1+x^2y^2)}{x^2(1+x^2)}\,\mathrm{dx}$, $y \geq 0$.
7. Calculaţi: $\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,\mathrm{dx}$ şi $\int_0^{\infty} \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x^2}\,\mathrm{dx}$, unde $a, b > 0$.

8. Calculaţi $I(a,b) = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\sqrt{-\ln x}}\,\mathrm{dx}$ şi $I(a,b) = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\cos(\ln x)\,\mathrm{dx}$, unde $a, b > 0$.

9. Fie $F(t) = \int_t^{t^2} \frac{\sin(tx)}{x}\,\mathrm{dx}$. Calculaţi $F'(t)$.

10. Fie $F(t) = \int_t^{t^2} \ln(t^2 + x^2)\,\mathrm{dx}$. Calculaţi $F'(t)$.

11. Folosind funcţia Gamma, calculaţi:
    a) $I = \int_0^\infty x^4 e^{-x}\,\mathrm{dx}$,
    b) $I = \int_0^\infty x^2 e^{-x^2}\,\mathrm{dx}$,
    c) $I = \int_0^\infty e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{dx}$,
    d) $I = \int_0^\infty x^2 e^{\frac{-x^2}{2}}\,\mathrm{dx}$,
    e) $I = \int_0^\infty x^m e^{-\frac{x}{k}}\,\mathrm{dx}$, $m \in \mathbb{N}$, $k > 0$,
    f) $I = \int_0^1 (\ln x)^4\,\mathrm{dx}$,

12. Folosind funcţia Beta, calculaţi:
    a) $I = \int_0^1 x^4\sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{dx}$,
    b) $I = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}}\,\mathrm{dx}$,
    c) $I = \int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}\,\mathrm{dx}$,
    d) $I = \int_{-1/2}^1 \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt[3]{2x^3 - 3x^2 + 1}}$,
    e) $I = \int_0^{\pi/2} \sin^6 t\,\mathrm{dt}$,
    f) $I = \int_0^{\pi/2} \cos^4 t\,\mathrm{dt}$,
    g) $I = \int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos^5 t\,\mathrm{dt}$,
    h) $I = \int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4}\,\mathrm{dx}$,
    i) $I = \int_0^\infty \frac{x^4}{(1+x)^6}\,\mathrm{dx}$.
    j) $I = \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{dx}$.

2.5 Integrale curbilinii

Drumuri parametrizate

Definiţia 2.5.1. *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval. Se numeşte drum parametrizat pe I, o funcţie continuă $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$. Notăm $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$, $t \in I$.*

În cazul $n = 2$, notăm $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$.

În cazul $n = 3$, notăm $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in I$.

În mecanică, variabila t are semnificaţia de timp, iar $\gamma(t)$ este poziţia unui punct material la momentul t. Prin urmare, un drum parametrizat descrie mişcarea unui punct material într-un interval de timp I.

Definiţia 2.5.2. *Fie $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ un interval compact şi $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ un drum parametrizat.*

1. *$\gamma(a)$ şi $\gamma(b)$ se numesc capetele drumului γ.*
2. *γ se numeşte închis dacă $\gamma(a) = \gamma(b)$.*
3. *γ se numeşte simplu, dacă nu are autointersecţii.*
   Echivalent, dacă $t_1 < t_2$ şi $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ atunci $t_1 = a$ şi $t_2 = b$.
4. *$\gamma^- : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma^-(t) = \gamma(a + b - t)$, se numeşte opusul drumului γ.*

Exemplul 2.5.3. (1) Fie $A, B \in \mathbb{R}^2$ două puncte distincte. Ecuaţiile parametrice ale dreptei AB sunt

$$x(t) = x_A + (x_B - x_A)t,\ y(t) = y_A + (y_B - y_A)t,\ t \in \mathbb{R}.$$

Prin urmare, segmentul $[AB]$, parcurs de la A spre B, se parametrizează prin

$$\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(t) = (x(t), y(t)),\ \text{unde} \begin{cases} x(t) = x_A + (x_B - x_A)t \\ y(t) = y_A + (y_B - y_A)t \end{cases}.$$

Evident, $\mathrm{Im}(\gamma) = [A, B]$. În mod similar, dacă $A, B \in \mathbb{R}^3$, segmentul $[AB]$ se parametrizează prin

$$\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)),\ \text{unde} \begin{cases} x(t) = x_A + (x_B - x_A)t \\ y(t) = y_A + (y_B - y_A)t \\ z(t) = z_A + (z_B - z_A)t \end{cases}.$$

(2) Fie $A \in \mathbb{R}^2$, $r > 0$ şi $\mathcal{C}(A, r) =$ cercul de rază r cu centru în A. Cercul $\mathcal{C}(A, r)$ este parcurs de un drum parametrizat simplu închis

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(t) = (x_A + r\cos t, y_A + r\sin t).$$

Evident, $\mathrm{Im}(\gamma) = \mathcal{C}(A, r)$. În cazul particular $A = O(0, 0)$, avem parametrizarea:

$$\mathcal{C}(O, r) : \begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}, \ t \in [0, 2\pi].$$

Definiţia 2.5.4. *Fie $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ şi $\gamma_2 : [b, c] \to \mathbb{R}^n$ două drumuri parametrizate, cu proprietatea că $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$. Drumul concatenat $\gamma_1 \cup \gamma_2 : [a, c] \to \mathbb{R}^n$, este definit prin*

$$(\gamma_1 \cup \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a, b] \\ \gamma_2(t), & t \in (b, c] \end{cases}, \ (\forall) t \in [a, c].$$

Definiţia 2.5.5. *Fie $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ un interval compact. Un drum parametrizat $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ se numeşte* neted, *dacă γ este o funcţie de clasă C^1 pe (a, b) şi $\gamma'(t) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, $(\forall) t \in (a, b)$.*

Drumul γ se numeşte orientat pozitiv, dacă $\gamma'(t) > 0$, $(\forall) t \in (a, b)$.

Drumul γ se numeşte orientat negativ, dacă $\gamma'(t) < 0$, $(\forall) t \in (a, b)$.

Un drum $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ se numeşte neted pe porţiuni, *dacă γ se obţine prin concatenarea unui număr finit de drumuri netede.*

Definiţia 2.5.6. *Fie $\gamma_1 : I = [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma_2 : J = [c, d] \to \mathbb{R}^n$ două drumuri netede. Spunem că γ_1 este echivalent cu γ_2, şi notăm $\gamma_1 \sim \gamma_2$, dacă există $\varphi : I \to J$ o funcţie bijectivă, strict crescătoare, continuă, de clasă C^1 pe (a, b), astfel încât $\varphi^{-1} : J \to I$ este continuă, de clasă C^1 pe (c, d), şi $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$.*

Propoziţia 2.5.7. *Fie $\gamma_1 : I = [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma_2 : J = [c, d] \to \mathbb{R}^n$ două drumuri netede.*

1. *Dacă $\gamma_1 \sim \gamma_2$, atunci $\mathrm{Im}(\gamma_1) = \mathrm{Im}(\gamma_2)$.*
2. *Presupunem că $\mathrm{Im}(\gamma_1) = \mathrm{Im}(\gamma_2)$.*
   a) Dacă $\gamma_1(a) = \gamma_2(c)$, $\gamma_1(b) = \gamma_2(d)$ şi $\gamma_1(a) \neq \gamma_2(c)$, atunci $\gamma_1 \sim \gamma_2$.
   b) Dacă $\gamma_1(a) = \gamma_2(d)$, $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$ şi $\gamma_1(a) \neq \gamma_2(c)$, atunci $\gamma_1 \sim \gamma_2^-$.
   c) Dacă $\gamma_1(a) = \gamma_2(c) = \gamma_1(b) = \gamma_2(d)$, atunci $\gamma_1 \sim \gamma_2$ sau $\gamma_1 \sim \gamma_2^-$.

Definiţia 2.5.8. *Fie $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ un drum neted. Lungimea lui γ este prin definiţie*

$$\ell(\gamma) := \int_a^b ||\gamma'(t)||\,\mathrm{dt}\,.$$

Dacă $n = 2$ şi $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$, atunci

$$\ell(\gamma) := \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{dt}\,.$$

Dacă $n = 3$ *şi* $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$, *atunci*

$$\ell(\gamma) := \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, \mathrm{dt}\,.$$

Integrale curbilinii de prima speţă

Definiţia 2.5.9. *Fie* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *un drum neted,* $D \subset \mathbb{R}^n$ *un domeniu deschis cu* $\mathrm{Im}(\gamma) \subset D$ *şi* $f : D \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă. Integrala curbilinie de prima speţă a funcţiei* f *pe drumul* γ *este*

$$\int_\gamma f\, \mathrm{ds} = \int_\gamma f(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{ds} := \int_a^b f(\gamma(t))||\gamma'(t)||\, \mathrm{dt}\,.$$

Dacă $n = 2$ *şi* $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$, *atunci*

$$\int_\gamma f(x, y)\, \mathrm{ds} := \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, \mathrm{dt}\,.$$

Dacă $n = 3$ *şi* $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$, *atunci*

$$\int_\gamma f(x, y, z)\, \mathrm{ds} := \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, \mathrm{dt}\,.$$

Propoziţia 2.5.10. *Dacă* $\gamma_1 \sim \gamma_2$ *sau* $\gamma_1 \sim \gamma_2^-$, *atunci* $\int_{\gamma_1} f\, \mathrm{ds} = \int_{\gamma_2} f\, \mathrm{ds}$.

În particular, integrala curbilinie $\int_\gamma f\, \mathrm{ds}$ *depinde doar de curba geometrică* $\mathrm{Im}(\gamma)$, *indiferent de drumul simplu* γ *şi de orientarea acestuia!*

Definiţia 2.5.11. *Fie* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *un drum neted pe porţiuni. Presupunem că* $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \cdots \cup \gamma_r$, *unde* γ_j *sunt drumuri netede. Fie* $D \subset \mathbb{R}^n$ *un domeniu deschis cu* $\mathrm{Im}(\gamma) \subset D$ *şi* $f : D \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă. Integrala curbilinie de prima speţă a funcţiei* f *pe drumul* γ *este*

$$\int_\gamma f\, \mathrm{ds} = \int_{\gamma_1} f\, \mathrm{ds} + \int_{\gamma_2} f\, \mathrm{ds} + \cdots + \int_{\gamma_r} f\, \mathrm{ds}\,.$$

Propoziţia 2.5.12. *(O interpretare a integralei curbilinii de prima speţă în mecanică)*

Dacă $C = \mathrm{Im}(\gamma) \subset \mathbb{R}^3$ *este un fir material cu densitatea* $f(x, y, z)$, *atunci masa sa este* $M(C) = \int_\gamma f(x, y, z)\, \mathrm{ds}$. *Mai mult, coordonatele centrului de greutate al lui* C *sunt*

$$x_G = \frac{\int_\gamma x f(x, y, z)\, \mathrm{ds}}{M(C)},\ y_G = \frac{\int_\gamma y f(x, y, z)\, \mathrm{ds}}{M(C)},\ z_G = \frac{\int_\gamma z f(x, y, z)}{M(C)}\, \mathrm{ds}\,.$$

1-forme diferenţiale

Definiţia 2.5.13. *Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ un deschis şi $P_1, \dots, P_n : D \to \mathbb{R}$ de clasă C^k, unde $k \geq 0$.*

$$\omega := P_1 \, \mathrm{dx}_1 + P_2 \, \mathrm{dx}_2 + \cdots + P_n \, \mathrm{dx}_n$$

se numeşte 1-formă diferenţială de clasă C^k pe D.

De observat că pentru fiecare $a \in D$, $\omega(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, este o formă liniară.

Forma ω se numeşte exactă, *dacă există $f : D \to \mathbb{R}$ de clasă C^{k+1}, astfel încât $\omega = df$.*

Forma ω se numeşte închisă, *dacă $\frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}$, $(\forall) i \neq j$. (Am presupus $k \geq 1$)*

Propoziţia 2.5.14. *Dacă ω este o 1-formă exactă de clasă C^1, atunci ω este închisă.*

Demonstraţie. Presupunem $\omega = df = \frac{\partial f}{\mathrm{dx}_1} \mathrm{dx}_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\mathrm{dx}_n} \mathrm{dx}_n$, unde $f : D \to \mathbb{R}$ e de clasă C^2. Prin urmare $P_i = \frac{\partial f}{\mathrm{dx}_i}$, în notaţiile definiţiei anterioare.

Fie $i \neq j$. Din Teorema lui Schwarz, rezultă că

$$\frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}.$$

□

Reciproca este în general falsă. Totuşi, în anumite condiţii speciale, reciproca are loc.

Definiţia 2.5.15. *Un domeniu (o submulţime) $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, se numeşte stelat, dacă există un punct $A \in D$, astfel încât, pentru orice $B \in D$, segmentul $[AB]$ este inclus în D.*

Un domeniu $D \subset \mathbb{R}^n$ se numeşte simplu conex, dacă pentru orice $A \in D$ şi orice $\gamma : [a, b] \to D$, drum simplu închis cu $\gamma(a) = \gamma(b) = A$, există o funcţie continuă

$$F : [a, b] \times [0, 1] \to D, \text{ cu } F(t, 0) = \gamma(t), (\forall) t \in [a, b], \text{ şi } F(t, 1) = A, (\forall) t \in [a, b].$$

Cu alte cuvinte, curba $\mathrm{Im}(\gamma)$ se poate deforma în mod continuu la un punct, trecând doar prin puncte din D.

Orice domeniu stelat este simplu conex, reciproca însă nu e valabilă.

Exemplul 2.5.16. (1) $D = \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, este stelat.

(2) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ este stelat.

(3) $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ nu este simplu conex; un drum simplu închis γ care "ocoleşte" punctul $(0, 0)$ nu se poate deforma la un punct.

(4) $D = \mathbb{R}^n \setminus \{A\}$, $n \geq 3$, unde $A \in \mathbb{R}^n$, este simplu conex, dar nu este stelat, pentru că segmentul $[BA]$ nu e inclus în D, oricare ar fi $B \neq A$.

Teoremă 2.5.17. *Dacă $D \subset \mathbb{R}^n$ este un domeniu simplu conex si ω este o 1-formă închisă de clasă C^1 pe D, atunci ω este exactă.*

Observaţia 2.5.18. (1) Fie $\omega = P\,\mathrm{dx} + Q\,\mathrm{dy}$ o 1-formă diferenţială de clasă C^1 pe $D \subset \mathbb{R}^2$. ω este închisă dacă şi numai dacă $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. Pe de altă parte, ω este exactă dacă şi numai dacă există o funcţie $f : D \to \mathbb{R}$, de clasă C^1, astfel încât $P = \frac{\partial f}{\partial x}$ şi $Q = \frac{\partial f}{\partial y}$. Conform teoremei anterioare, dacă ω e închisă şi D e simplu conex, atunci ω este exactă.

(2) Fie $\omega = P\,\mathrm{dx} + Q\,\mathrm{dy} + R\,\mathrm{dz}$ o 1-formă diferenţială de clasă C^1 pe $D \subset \mathbb{R}^3$. ω este închisă dacă şi numai dacă $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$ şi $\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$. Pe de altă parte, ω este exactă dacă şi numai dacă există o funcţie $f : D \to \mathbb{R}$, de clasă C^1, astfel încât $P = \frac{\partial f}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial f}{\partial y}$ şi $R = \frac{\partial f}{\partial z}$. Conform teoremei anterioare, dacă ω e închisă şi D e simplu conex, atunci ω este exactă.

Integrale curbilinii de a doua speţă

Definiţia 2.5.19. *Fie $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ un drum neted, $\gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, şi $D \subset \mathbb{R}^n$ un domeniu deschis cu $\mathrm{Im}(\gamma) \subset D$.*

Fie $\omega = P_1\,\mathrm{dx}_1 + \cdots + P_n\,\mathrm{dx}_n$ o 1-formă diferenţiabilă pe D, de clasă C^0.

Integrala curbilinie (de speţa a doua) a formei diferenţiale ω, de-a lungul lui γ, este:

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma P_1\,\mathrm{dx}_1 + \cdots + P_n\,\mathrm{dx}_n = \int_a^b P_1(\gamma(t))x_1'(t) + \cdots + P_n(\gamma(t))x_n'(t)\,\mathrm{dt},$$

Fie $\overrightarrow{V} = (P_1, \ldots, P_n) : D \to \mathbb{R}^n$, câmpul vectorial asociat formei diferenţiale ω. Circulaţia lui $\overrightarrow{V}$ de-a lungul lui γ este $\int_\gamma \overrightarrow{V} \cdot d\overrightarrow{r} := \int_\gamma \omega$, unde $d\overrightarrow{r} = (\mathrm{dx}_1, \ldots, \mathrm{dx}_n)$.

În cazul $n = 2$, dacă $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$, $\omega = P\,\mathrm{dx} + Q\,\mathrm{dy}$ este o 1-formă diferenţială pe D şi $\overrightarrow{V} = (P, Q)$, atunci

$$\int_\gamma \overrightarrow{V} d\overrightarrow{r} = \int_\gamma \omega = \int_\gamma P\,\mathrm{dx} + Q\,\mathrm{dy} = \int_a^b [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]\,\mathrm{dt}\,.$$

În cazul $n = 3$, dacă $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$, $\omega = P\,\mathrm{dx} + Q\,\mathrm{dy} + R\,\mathrm{dz}$ este o 1-formă diferenţială pe D şi $\overrightarrow{V} = (P, Q, R)$, atunci

$$\int_\gamma \overrightarrow{V} d\overrightarrow{r} = \int_\gamma \omega = \int_\gamma P\,\mathrm{dx} + Q\,\mathrm{dy} + R\,\mathrm{dz} =$$
$$= \int_a^b [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)]\,\mathrm{dt}\,.$$

Dacă $\overrightarrow{F} = (P, Q, R)$ este forţa care acţionează asupra unui punct material care se deplasează pe un drum $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, atunci lucrul mecanic efectuat este $L = \int_\gamma \overrightarrow{F} d\overrightarrow{r}$.

Propoziţia 2.5.20. *(1) Fie $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ şi $\gamma_2 : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ două drumuri netede echivalente. Fie ω o 1-formă diferenţială continuă pe D, cu $\mathrm{Im}(\gamma_1) = \mathrm{Im}(\gamma_2) \subset D$. Atunci $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$.*

(2) Fie $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ şi ω o 1-formă diferenţială continuă pe D, cu $\mathrm{Im}(\gamma) \subset D$. Atunci $\int_{\gamma^-} \omega = -\int_\gamma \omega$.

Definiţia 2.5.21. *Fie $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ un drum neted pe porţiuni. Presupunem că $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \cdots \cup \gamma_r$, unde γ_j sunt drumuri netede. Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ un domeniu deschis cu $\mathrm{Im}(\gamma) \subset D$ şi ω o 1-formă diferenţiabilă continuă pe D. Integrala curbilinie de a doua speţă a formei ω pe drumul γ este*

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega + \cdots + \int_{\gamma_r} \omega.$$

Propoziţia 2.5.22. *Fie $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ un drum neted, $D \subset \mathbb{R}^n$ un deschis cu $\mathrm{Im}(\gamma) \subset D$ şi ω o 1-formă exactă contină pe D. Presupunem că $\omega = df$, unde $f : D \to \mathbb{R}$ este o funcţie de clasă C^1. Atunci*

$$\int_\gamma \omega = f(\gamma(t))|_a^b = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)),$$

deci nu depinde de drumul γ din D, ci doar de capetele sale.

În particular, dacă γ e un drum închis, i.e. $\gamma(a) = \gamma(b)$, atunci $\int_\gamma \omega = 0$.

Observaţia 2.5.23. (1) Dacă ω este o 1-formă diferenţială închisă pe un domeniu simplu conex D, atunci este şi exactă, şi putem aplica rezultatul anterior.

(2) 1-forma diferenţială $\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}\,\mathrm{dx} + \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{dy}$ pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ este închisă, dar nu este exactă. Un mod indirect de a arăta că ω nu e exactă, este următorul. Considerăm $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, un drum care parametrizează cercul de rază 1, cu centrul în origine. Atunci

$$\begin{aligned}\int_\gamma \omega &= \int_\gamma \frac{-y}{x^2+y^2}\,\mathrm{dx} + \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{dy} = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t + \sin^2 t} + \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t + \sin^2 t}\,\mathrm{dt} = \int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{dt} = 2\pi \neq 0.\end{aligned}$$

Deci ω nu e exactă, altfel s-ar contrazice propoziţia anterioară.

Exerciţii

1. Fie $A(0,1)$, $B(1,1)$ şi $C(1,0)$. Calculaţi $\int_{\Delta ABC}(x+2y)\,\mathrm{ds}$.

2. Fie $A(1,0)$, $B(0,1)$ şi $O(0,0)$. Calculaţi $\int_\gamma (x+2y)\,\mathrm{ds}$, unde γ e reuninea segmentului OA, arcului de cerc AB şi segmentului BO. Determinaţi coordonatele centrului de greutate a lui γ, precum şi momentele sale de inerţie în raport cu axele şi cu originea.

3. Calculaţi lungimea arcului de parabolă $y^2 = 2x$ cu capetele $O(0,0)$ şi $A(2,2)$.

4. Calculaţi $\int_\gamma \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{ds}$, unde γ este cercul $x^2-2x+y^2=0$.

5. Calculaţi $\int_\gamma (xy-z)\,\mathrm{ds}$, unde γ are parametrizarea $x=t$, $y=t^2$, $z=\frac{2}{3}t^3$, $t\in[0,1]$.

6. Determinaţi coordonatele centrului de greutate al curbei γ cu parametrizarea $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$, $t\in[0,2\pi]$.

7. Calculaţi $\int_\gamma \frac{\mathrm{ds}}{x^2+y^2+z^2}$, unde γ are parametrizarea $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=t$, $t\in[0,2\pi]$.

8. Calculaţi $\int_\gamma xyz\,\mathrm{ds}$, unde γ are parametrizarea $x=t$, $y=t^2$, $z=\frac{2}{3}t^3$.

9. Fie $A(0,1)$, $B(1,0)$ şi $C(1,1)$. Calculaţi $\int_{\Delta ABC}(x-y)\,\mathrm{dx}+y\,\mathrm{dy}$.

10. Fie $A(1,0)$, $B(0,1)$ şi $O(0,0)$. Calculaţi $\int_\gamma \mathrm{dx}+xy\,\mathrm{dy}$, unde γ e reuninea segmentului OA, arcului de cerc AB şi segmentului BO.

11. Calculaţi $\int_{\mathcal{C}(O,2)} y^2dx+xdy$, unde $\mathcal{C}(O,2)$ este cercul de rază 2 cu centrul în origine.

12. Calculaţi $\int_{\mathcal{C}(O,r)} \frac{x-y}{x^2+y^2}\,\mathrm{dx}+\frac{x+y}{x^2+y^2}\,\mathrm{dy}$, unde $\mathcal{C}(O,r)$ este cercul de rază r cu centrul în origine.

13. Fie $\overrightarrow{V}=(x^2,xy)$. Calculaţi $\int_\gamma \overrightarrow{V}\cdot d\vec{r}$, unde $\mathrm{dr}=(\mathrm{dx},\mathrm{dy})$ şi $\gamma : x^2-2x+y^2=0$.

14. Fie $A(1,0,1)$ şi $B(0,1,2)$. Calculaţi $\int_{AB} x\,\mathrm{dx}+y\,\mathrm{dy}+z\,\mathrm{dz}$.

15. Calculaţi $\int_\gamma xy\,\mathrm{dx}+z\,\mathrm{dy}-x^2\,\mathrm{dz}$, unde γ are parametrizarea $x=t$, $y=t^2$, $z=\frac{2}{3}t^3$, $t\in[0,1]$.

16. Calculaţi $\int_\gamma y^2\,\mathrm{dx}+z^2\,\mathrm{dy}+x^2\,\mathrm{dz}$, unde γ e definită de ecuaţiile $x^2+y^2+z^2=2$, $z=1$.

2.6 Integrale duble

Definiţia 2.6.1. *Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ o mulţime compactă, astfel încât ∂D este o reuniune finită de drumuri netede (adică a imaginilor lor). Presupunem că $D \subset [a,b] \times [c,d]$. Fie δ_x, δ_y diviziunile*

$$\delta_x : \ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \ \delta_y : \ c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d.$$

Mulţimea

$$\Delta := \{B = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \mid i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}, \ B \cap D \neq \emptyset\}$$

se numeşte acoperire cu dreptunghiuri *a lui D. Notăm $\mathcal{D}_D$, mulţimea acoperirilor lui D.*

Dacă $B = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, notăm $||B|| := \max\{x_i - x_{i-1}, y_j - y_{j-1}\}$. Norma lui Δ este $||\tilde{\Delta}|| = \max\{||B|| \mid B \in \tilde{\Delta}\}$. Pentru fiecare dreptunghi $B \in \tilde{\Delta}$, fie $\xi_B \in B \cap D$. Mulţimea $\xi := \{\xi_B \ : \ B \in \tilde{\Delta}\}$ se numeşte sistem de puncte asociat acoperirii Δ.

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie. Suma Riemman *asociată lui f, acoperirii Δ şi sistemului de puncte intermediare ξ este:*

$$S_{\Delta,\xi}(f) = \sum_{B \in \Delta} f(\xi_B)\,\mathrm{Aria}(B).$$

Spunem că f este integrabilă Riemann *pe D şi are integrala $I := \iint_D f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} \in \mathbb{R}$, dacă: $(\forall)\varepsilon > 0$, $(\exists)\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât, oricare ar fi $\Delta \in \mathcal{D}_D$ cu $||\Delta|| < \delta_\varepsilon$ şi oricare ar fi sistemul de puncte ξ asociat lui Δ, avem $||S_{\Delta,xi}(f) - I|| < \varepsilon$.*

În această secţiune, vom presupune implicit că orice domeniu compact D are frontiera ∂D ca în definiţia anterioară.

Teoremă 2.6.2. *Fie $D = [a,b] \times [c,d]$ şi $f : D \to \mathbb{R}$ integrabilă, astfel încât funcţia $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{dy}$, este integrabilă pe $[a,b]$. Atunci:*

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{dy} \right) \mathrm{dx} \stackrel{(not)}{=} \int_a^b \mathrm{dx} \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{dy}\,.$$

Similar, dacă $G : [c,d] \to \mathbb{R}$, $G(y) = \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{dx}$, este integrabilă pe $[c,d]$, atunci:

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{dx} \right) \mathrm{dy} \stackrel{(not)}{=} \int_c^d \mathrm{dy} \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{dx}\,.$$

Corolarul 2.6.3. *Fie $D = [a,b] \times [c,d]$ şi $f : D \to \mathbb{R}$ continuă. Atunci:*

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_a^b \mathrm{dx} \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{dy} = \int_c^d \mathrm{dy} \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{dx}\,.$$

În acest caz, integrala dublă este un produs de doă integrale simple. În general, acest lucru nu e valabil!

Corolarul 2.6.4. *Fie $D = [a,b] \times [c,d]$ şi $f : D \to \mathbb{R}$, astfel încât $f(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$, unde $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ şi $\psi : [c,d] \to \mathbb{R}$ sunt funcţii integrabile. Atunci f e integrabilă şi:*

$$\int_D f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_D \varphi(x)\psi(y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{dx} \cdot \int_c^d \psi(y)\,\mathrm{dy}\,.$$

Exemplul 2.6.5. Fie $D = [0,1] \times [1,2]$ şi $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xe^{xy}$. Avem:

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_0^1 \mathrm{dx} \int_1^2 xe^{xy}\,\mathrm{dy} = \int_0^1 e^{xy}|_1^2\,\mathrm{dx} =$$
$$= \int_0^1 (e^{2x} - e^x)\,\mathrm{dx} = \left.\frac{e^{2x} - 2e^x}{2}\right|_0^1 = \frac{(e-1)^2}{2}.$$

Pe de altă parte, putem calcula integrala dublă şi astfel:

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_1^2 \mathrm{dy} \int_0^1 xe^{xy}\,\mathrm{dx} = \int_1^2 \left.\frac{(xy-1)e^{xy}}{y^2}\right|_0^1 \mathrm{dy} = \int_1^2 \frac{(y-1)e^y + 1}{y^2}\,\mathrm{dy} =$$
$$= \int_1^2 \left(\frac{e^y - 1}{y}\right)'\mathrm{dy} = \left.\frac{e^y - 1}{y}\right|_1^2 = \frac{e^2 - 1}{2} - (e-1) = \frac{(e-1)^2}{2}.$$

Definiţia 2.6.6. *O mulţime $A \subset \mathbb{R}^2$ se numeşte de măsură Lebesgue zero (sau neglijabilă), dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există o mulţime numărabilă de bile deschise $(B_n)_n$ cu proprietatea că $A \subset \bigcup_n B_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Aria}(B_n) < \varepsilon$.*

Teoremă 2.6.7. *Fie $D = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$ şi $f : D \to \mathbb{R}$. Atunci f este integrabilă, dacă şi numai dacă f e mărginită şi mulţimea punctelor de discontinuitate ale lui f este neglijabilă.*

Corolarul 2.6.8. *Fie D un domeniu compact. Dacă $\gamma : [a,b] \subset D$ este un drum neted (sau neted pe porţiuni) şi $f : D \to \mathbb{R}$ este mărginită şi contină pe $D \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$, atunci f este integrabilă pe D.*

Definiţia 2.6.9. *Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu compact. Spunem că D este simplu în raport cu x, dacă există un interval $[a,b] \subset \mathbb{R}$ şi două funcţii continue $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$, de clasă C^1 pe (a,b), astfel încât $\varphi(x) \le \psi(x)$, $(\forall)x \in [a,b]$, şi*

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b],\ y \in [\varphi(x), \psi(x)]\}.$$

Spunem că D este simplu în raport cu y, dacă există un interval $[c,d] \subset \mathbb{R}$ şi două funcţii continue $\alpha, \beta : [c,d] \to \mathbb{R}$, de clasă C^1 pe (c,d), astfel încât $\alpha(y) \leq \beta(y)$, $(\forall) y \in [c,d]$, şi

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [c,d],\ x \in [\alpha(y), \beta(y)]\}.$$

Spunem că D este simplu, dacă este simplu în raport cu x şi cu y.

Teoremă 2.6.10. *Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu simplu în raport cu x, ca în definiţia anterioară. Atunci*

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_a^b \mathrm{dx} \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{dy}\,.$$

Similar, dacă D este simplu în raport cu x, atunci:

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_a^b \mathrm{dx} \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{dy}\,.$$

Demonstraţie. (Schiţă) Fie $c = \min_{x\in[a,b]} \varphi(x)$ şi $d = \max_{x\in[a,b]} \psi(x)$. Atunci $D \subset [a,b] \times [c,d]$. Considerăm funcţia

$$\tilde{f} : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R},\ \tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D. \end{cases}.$$

Funcţia f e contină pe un compact D, deci este mărginită. Prin urmare, $\tilde{f}$ este mărginită. Din Corolarul 2.6.8, rezultă că $\tilde{f}$ este integrabilă şi, mai mult, avem

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \iint_{[a,b]\times[c,d]} \tilde{f}(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_a^b \mathrm{dx} \int_c^d \tilde{f}(x,y)\,\mathrm{dy} = \int_a^b \mathrm{dx} \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{dy}$$

□

Exemplul 2.6.11. Fie $O(0,0)$, $A(2,0)$, $B(0,1)$ şi $D :=$ triunghiul plin OAB. Ecuaţia dreptei AB este $y = 1 - \frac{1}{2}x$. Prin urmare

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,2],\ y \in [0, 1 - \frac{x}{2}]\}$$

este un domeniu simplu în raport cu x. D este simplu în raport cu y, având scrierea

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [0,1],\ x \in [0, 2-2y]\}.$$

Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = y$. Atunci, folosind schimbarea de variabilă $t = 2-x$, avem:

$$\iint_D y\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_0^2 \mathrm{dx} \int_0^{1-\frac{x}{2}} y\,\mathrm{dy} = \int_0^2 \frac{y^2}{2}\Big|_0^{1-\frac{x}{2}} \mathrm{dx} = \frac{1}{8}\int_0^2 (2-x)^2\,\mathrm{dx} = \frac{1}{8}\int_0^2 t^2\,\mathrm{dt} = \frac{1}{3}.$$

În mod similar, putem calcula:

$$\iint_D y \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_0^1 \mathrm{dy} \int_0^{2-2y} y \,\mathrm{dx} = 2\int_0^1 y(1-y)\,\mathrm{dy} = 2\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1 = 2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

Propoziţia 2.6.12. *Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu compact. Atunci aria lui D este:*

$$\mathrm{Aria}(D) = \iint_D \mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,.$$

Propoziţia 2.6.13. *Fie $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^2$ două domenii compacte, astfel încât $D_1 \cap D_2$ este neglijabilă. Fie $D = D_1 \cup D_2$ şi $f : D \to \mathbb{R}$ integrabilă pe D. Atunci*

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} + \iint_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,.$$

Propoziţia 2.6.14. *Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu compact şi $f, g : D \to \mathbb{R}^2$ două funcţii integrabile. Fie $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci $f+g$ şi αf sunt integrabile şi*

$$\iint_D (f+g)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \iint_D f\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} + \iint_D g\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy},\ \iint_D \alpha f\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \alpha \iint_D f\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,.$$

Teoremă 2.6.15. *(Schimbarea de variabilă în integrala dublă)*

Fie $D, D' \subset \mathbb{R}^2$ două domenii compacte. Presupunem că există o aplicaţie

$$\Phi : D' \to D,\ \Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v)),\ (\forall)(u,v) \in D',$$

de clasă C^1 pe $D' \setminus A$, unde $A \subset D$ este neglijabilă, $D \setminus \Phi(D' \setminus A)$ e neglijabilă şi

$$\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} > 0,\ (\forall)(u,v) \in D' \setminus A.$$

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ continuă. Atunci $f \circ \Phi : D' \to \mathbb{R}$ este integrabilă pe D' şi

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \iint_{D'} f(\Phi(u,v)) \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| \mathrm{du}\,\mathrm{dv}\,.$$

Coordonate polare

Fie $D = D(O,R) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le R^2\}$, discul închis de rază R, cu centrul în $O(0,0)$. Fie $D' := [0,R] \times [0,2\pi]$. Considerăm

$$\Phi : D' \to D, \Phi(\rho,\theta) = (x(\rho,\theta), y(\rho,\theta)),\ \text{unde } x(\rho,\theta) = \rho\cos\theta \text{ şi } y(\rho,\theta) = \rho\sin\theta,$$

pentru $\rho \in [0,R]$, $\theta \in [0,2\pi]$.

Fie $A = (\{0\} \times [0, 2\pi]) \cup ([0, R] \times \{2\pi\})$. $D' \setminus A = (0, R] \times [0, 2\pi)$ şi $\Phi(D' \setminus A) = D \setminus \{(0, 0)\}$. De asemenea, pentru orice $(\rho, \theta) \in D' \setminus A$ avem:

$$\left|\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)}\right| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho > 0.$$

Prin urmare, dacă $f : D \to \mathbb{R}$ este continuă, atunci:

$$\iint_D f(x, y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho \cdot f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\mathrm{d}\,\rho.$$

Exemplul 2.6.16. Fie $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ şi $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = y^2$. Atunci:

$$\mathrm{Aria}(D) = \iint_D \mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho d\rho = 2\pi \left.\frac{\rho^2}{2}\right|_0^R = \pi R^2.$$

$$\iint_D f(x, y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho^3 \sin^2\theta d\rho = \int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta \int_0^R \rho^3 d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta \cdot \left|.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^R = \left.\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2\theta)}{4}\right)\right|_0^{2\pi} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{4}.$$

Coordonate polare generalizate

Fie $\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ o elipsă plină. Fie $D' = [0, 1] \times [0, 2\pi]$ şi

$\Phi : D' \to \mathcal{E}, \Phi(\rho, \theta) = (x(\rho, \theta), y(\rho, \theta))$, unde $x(\rho, \theta) = a\rho\cos\theta$ şi $y(\rho, \theta) = b\rho\sin\theta$,

pentru $\rho \in [0, 1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Similar cu cazul coordonatelor polare, dacă $f : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ este contină, atunci:

$$\iint_{\mathcal{E}} f(x, y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 ab\rho \cdot f(a\rho\cos\theta, b\rho\sin\theta) d\rho.$$

Exemplul 2.6.17. Aria elipsei pline $\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ este:

$$\mathrm{Aria}(\mathcal{E}) = \iint_{\mathcal{E}} \mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 ab\rho d\rho = 2\pi ab \int_0^1 \rho d\rho = 2\pi ab \left.\frac{\rho^2}{2}\right|_0^1 = \pi ab.$$

Aplicaţii ale integralelor duble în mecanică

Fie D un domeniu compactă. Dacă privim D ca fiind o placă realizată dintr-un material omogen cu densitatea constantă k, atunci:

1. Masa lui D este $m = k\,\mathrm{Aria}(D) = k \iint_D \mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$.

2. Centrul de greutate al plăcii D are coordonatele:

$$x_G = \frac{\iint_D x \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}}{\mathrm{Aria}(D)},\ y_G = \frac{\iint_D y \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}}{\mathrm{Aria}(D)}.$$

3. Momentele de inerţie ale lui D în raport cu axele Ox, Oy şi cu originea O sunt:

$$I_{Ox} = k \iint_D y^2 \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy},\ I_{Oy} = k \iint_D x^2 \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy},\ I_O = I_{Ox} + I_{Oy}.$$

Dacă privim D ca fiind o placă neomogenă cu densitatea dată de o funcţie continuă $\rho : D \to [0, \infty)$, atunci:

1. Masa lui D este $m = \iint_D \rho(x, y) \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$.

2. Centrul de greutate al plăcii D are coordonatele:

$$x_G = \frac{\iint_D x\rho(x, y) \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dx}}{m},\ y_G = \frac{\iint_D \rho(x, y) y \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}}{m}.$$

3. Momentele de inerţie ale lui D în raport cu axele Ox, Oy şi cu originea O sunt:

$$I_{Ox} = \iint_D \rho(x, y) y^2 \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy},\ I_{Oy} = \iint_D \rho(x, y) x^2 \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy},\ I_O = I_{Ox} + I_{Oy}.$$

Integrale duble improprii

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ o mulţime necompactă şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie contină. Vom presupune că există un şir $(D_n)_{n\geq 1}$ de mulţime compacte, astfel încât:

$$D_n \subset D_{n+1},\ (\forall) n \geq 1,\ \bigcup_{n\geq 1} D_n = D.$$

Considerăm şirul de integrale $I_n := \int_{D_n} f(x, y) \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$, $n \geq 1$. Dacă şirul $(I_n)_n$ este convergent, spunem că integrala improprie $\iint_D f(x, y) \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$ este convergentă şi definim

$$\iint_D f(x, y) \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} := \lim_n I_n.$$

Exemplul 2.6.18. (1) Fie $D = [0, \infty) \times [0, \infty)$ şi $a > 0$. Considerăm funcţia continuă

$$f : D \to \mathbb{R},\ f(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Fie $D_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le n^2, x, y \ge 0\}$. Evident, $D_n \subset D_{n+1}$ şi $\bigcup_n D_n = D$. Folosind coordonate polare, obţinem

$$I_n := \iint_{D_n} f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^n \frac{\rho}{(\rho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} d\rho = -\frac{\pi}{2}\left.\frac{1}{\sqrt{\rho^2+a^2}}\right|_0^n = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{n^2+a^2}}\right).$$

Şirul $(I_n)_n$ este convergent şi avem

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \lim_n I_n = \frac{\pi}{2a}.$$

De observat că

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^\infty \frac{\rho}{(\rho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} d\rho,$$

unde $\int_0^\infty \frac{\rho}{(\rho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} d\rho$ este o integrală improprie convergentă. Această identitate se obţine formal prin transformarea în coordonate polare:

$$\Phi : [0, \frac{\pi}{2}] \times [0,\infty) \to [0,\infty) \times [0,\infty),\ \Phi(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta).$$

Totuşi, dorim să evităm complicaţiile unei teorii a schimbărilor de variabile în integrale duble improprii.

(2) Fie $D = [0,\infty) \times [0,\infty)$ şi $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$. Folosind coordonate polare, obţinem:

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^\infty e^{-\rho^2} \rho d\rho = -\left.\frac{\pi}{4} e^{-\rho^2}\right|_0^\infty = \frac{\pi}{4}.$$

Pe de altă parte, $\iint_D e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{dx} \int_0^\infty e^{-y^2}\,\mathrm{dx} = \left(\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{dx}\right)^2$, deci $\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{dx} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

(3) Fie $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2+y^2 \le 1\ , x, y \ge 0\}$ şi $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{4}}}$. Pentru $n \ge 2$, fie $D_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{n^2} < x^2 + y^2 \le 1\ , x, y \ge 0\}$. Avem $D_n \subset D_{n+1}$ şi $D = \bigcup_n D_n$. Considerând $I_n = \iint_n f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$, $n \ge 2$, este uşor de văzt că $(I_n)_n$ este convergent. Vom da însă o metodă mai directă de calcul. Folosind coordonate polare, putem scrie:

$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{4}}}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{1}{\rho^{\frac{3}{2}}} \rho d\rho = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\rho}} d\rho = 4\pi\sqrt{\rho}|_0^1 = 4\pi.$$

De observat că $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\rho}} d\rho$ este o integrală improprie convergentă.

Exerciţii

1. Fie $D = [0,1] \times [0,2]$. Calculaţi $\iint_D xe^{xy}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$.
2. Fie $D = \{(x,y)|\ x^2+y^2 \leq 4, y \geq 0\}$. Calculaţi $\iint_D y\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$.
3. Fie D := triunghiul plin AOB, $A(2,0)$, $B(0,1)$, $O(0,0)$. Calculaţi $\iint_D xy\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$.
4. Calculaţi aria domeniului D, mărginit de $y = x$ şi de parabola $y = \frac{1}{4}(x^2+2x-3)$.
5. Calculaţi aria domeniului D din interiorul $x^2+y^2 = 16$, mărginit de parabola $y^2 = 6x$.
6. Calculaţi aria domeniului D mărginit de dreaptele $x = 2$, $y = 1$ şi de parabola $xy = 1$.
7. Determinaţi centrul de greutate şi momentele de inerţie ale plăcii omogene $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq R^2,\ x,y \geq 0\}$.
8. Calculaţi $\iint_D e^{x^2+y^2}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$, unde $D = \{(x,y)|x^2+y^2 \leq 1\}$.
9. Calculaţi $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$, unde

   a) $D = \{(x,y)|\ x^2+y^2 \leq 2x\}$, b) $D = \{(x,y)|\ x^2+y^2 \leq 4,\ x \geq 0\}$.
10. Calculaţi $\iint_D x\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$, unde

    a) $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 2,\ x \leq y\}$, b) $D = \{(x,y)|\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 9\}$
11. Calculaţi $\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$, unde $D = \{(x,y) \mid 1 \leq x^2+y^2 \leq 4,\ y \geq 0\}$.
12. Calculaţi $\iint_D e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$, unde $D = [0,\infty)^2$. Deduceţi că $\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{dx} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

2.7 Integrale de suprafaţă

Suprafeţe parametrizate

Definiţia 2.7.1. *Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu deschis (sau compact cu ∂D un drum neted). O suprafaţă parametrizată este o funcţie continuă*

$$\Psi : D \to \mathbb{R}^3,\ \Psi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)),\ (\forall)(u,v) \in D,$$

de clasă C^1 pe $\mathring{D}$, cu proprietatea că $\operatorname{rang}(J_\Psi(u,v)) = 2$ pentru orice $(u,v) \in \mathring{D}$. $S := \operatorname{Im}(\Psi)$ este o suprafaţă deschisă (sau compactă) în $\mathbb{R}^3$.

În cele ce urmează vom presupune implicit că orice domeniu compact D are frontiera ∂D ca în definiţia anterioară.

Definiţia 2.7.2. *Fie $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^2$ două domenii deschise (sau compacte) şi $\Psi_1 : D_1 \to \mathbb{R}^3$, $\Psi_2 : D_2 \to \mathbb{R}^3$ două suprafeţe parametrizate. Spunem că Ψ_1 şi Ψ_2 sunt parametrizări echivalente dacă există $\Phi : D_1 \to D_2$ un difeomorfism (o funcţie bijectivă de clasă C^1 cu inversa de clasă C^1) astfel încât $\Psi_1 = \Psi_2 \circ \Phi$ pe $\mathring{D}_1$. Dacă Ψ_1 şi Ψ_2 sunt echivalente, atunci se observă că $S = \operatorname{Im}(\Psi_1) = \operatorname{Im}(\Psi_2)$.*

Spunem că două parametrizări Ψ_1 şi Ψ_2 echivalente au aceeaşi orientare, dacă difeomorfismul Φ are $\det(J_\Phi) > 0$ pe D_1.

Spunem că două parametrizări Ψ_1 şi Ψ_2 echivalente au orientare opusă, dacă difeomorfismul Φ are $\det(J_\Phi) < 0$ pe D_1.

O suprafaţă compactă S se numeşte orientabilă dacă admite două parametrizări echivalente cu orientări opuse. De observat că o suprafaţă orientabilă are două orientări.

În cele ce urmează, vom presupune că toate suprafeţele S sunt orientabile.

Definiţia 2.7.3. *Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu deschis (sau compact) şi $\Psi : D \to \mathbb{R}^3$ o suprafaţă parametrizată. Spunem că Ψ (respectiv $S = \operatorname{Im}(\Psi)$) este nesingulară, dacă pentru orice punct $(u,v) \in D$, vectorii $\frac{\partial \Psi}{\partial u}(u,v)$ şi $\frac{\partial \Psi}{\partial v}(u,v)$ sunt liniar independenţi.*

În acest caz, planul determinat de vectorii $\frac{\partial \Psi}{\partial u}(u,v)$ şi $\frac{\partial \Psi}{\partial v}(u,v)$, care trece prin punctul $\Psi(u,v)$, se numeşte planul tangent la $S = \operatorname{Im}(\Psi)$ în (u,v). Un vectorul normal la acest plan este $\overrightarrow{N}(u,v) = \frac{\partial \Psi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \Psi}{\partial v}(u,v)$.

De remarcat că dacă Ψ_1 şi Ψ_2 sunt două parametrizări echivalente cu aceeaşi orientare ale unei suprafeţe nesingulare, atunci vectorii normali corespunzători $\overrightarrow{N}_1(u,v) = \frac{\partial \Psi_1}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \Psi_1}{\partial v}(u,v)$ şi $\overrightarrow{N}_2(u,v) = \frac{\partial \Psi_2}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \Psi_2}{\partial v}(u,v)$ au aceeaşi direcţie şi acelaşi sens. În particular, versorul normalei $\overrightarrow{n}(u,v) = \frac{N_1(u,v)}{||N_1(u,v)||} = \frac{N_2(u,v)}{||N_2(u,v)||}$ nu depinde decât de orientarea suprafeţei S.

Fie $\Psi : D \to \mathbb{R}^3$ o suprafaţă parametrizată, $\Psi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. În cele ce urmează, pentru a uşura scrierea, vom folosi notaţiile $\Psi_u := \frac{\partial \Psi}{\partial u}$, $\Psi_v := \frac{\partial \Psi}{\partial v}$, $x_u = \frac{\partial x}{\partial u}$ etc.

Exemplul 2.7.4. Fie $S = S(O, R) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$, sfera cu centrul în origine $O(0, 0, 0)$ şi raza $R > 0$. S admite parametrizarea:

$$\Psi : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3,\ \Psi(\theta, \varphi) = (R \sin\theta \cos\varphi,\ R \sin\theta \sin\varphi,\ R \cos\theta).$$

În limbaj geografic, θ este "latitudinea" şi φ este "longitutinea". "Polul Nord", adică punctul $(0, 0, R)$, corespunde lui $\theta = 0$, "ecuatorul" corespunde lui $\theta = \frac{\pi}{2}$ iar "polul sud", adică punctul $(0, 0, -R)$, corespunde lui $\theta = \pi$. Avem că:

$$\Psi_\theta \times \Psi_\varphi = R^2 \sin\theta \cdot \overrightarrow{n}(\theta, \varphi),\ \text{unde } \overrightarrow{n}(\theta, \varphi) = (\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta),$$

este un versor normal la S în punctul $\Psi(\theta, \varphi)$, orientat spre exteriorul sferei S.

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu deschis (sau compact) şi $\varphi : D \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^1. Considerăm suprafaţa

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x, y) \in D,\ z = \varphi(x, y)\}$$

Atunci S admite parametrizarea, numită carteziană,

$$\Psi : D \to \mathbb{R}^3,\ \Psi(x, y) = (x, y, \varphi(x, y)).$$

Se observă că

$$\Psi_x(x, y) = (1, 0, p(x, y)),\ \Psi_y(x, y) = (0, 1, q(x, y)),\ \ \text{unde } p = \frac{\partial \varphi}{\partial x},\ q = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Prin urmare,

$$\overrightarrow{N}(x, y) = \Psi_x(x, y) \times \Psi_y(x, y) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & p(x, y) \\ 0 & 1 & q(x, y) \end{vmatrix} = (-p(x, y), -q(x, y), 1)$$

este un vector normal la S în punctul $(x, y, \varphi(x, y))$. Versorul asociat este

$$\overrightarrow{n}(x, y) = \frac{\overrightarrow{N}(x, y)}{||\overrightarrow{N}(x, y)||} = \frac{\overrightarrow{N}(x, y)}{\sqrt{1 + p(x, y)^2 + q(x, y)^2}}.$$

Exemplul 2.7.5. (1) Fie $\pi : ax + by + cz + d = 0$ un plan cu vectorul normal $\overrightarrow{N} = (a, b, c)$ cu $c \neq 0$. Atunci planul π are parametrizarea (nesingulară)

$$\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \Psi(x, y) = \left(x, y, -\frac{ax + by + d}{c} \right).$$

Observăm că

$$\Psi_x(x,y)=\left(1,0,\frac{a}{c}\right),\ \Psi_y(x,y)=\left(0,1,\frac{b}{c}\right),\ \Psi_x(x,y)\times\Psi_y(x,y)=\left(\frac{a}{c},\frac{b}{c},1\right)=\frac{1}{c}\overrightarrow{N}$$

(2) Fie $S=S^+(O,R)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=R^2,\ z\geq 0\}$, semisfera superioară cu centrul în origine $O(0,0,0)$ şi raza $R>0$. Din relaţia $x^2+y^2+z^2=R^2$ şi $z\geq 0$, rezultă că $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$. Fie $D=D(O,R)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq R^2\}$, discul cu centrul în origine $O(0,0)$ şi raza R. Considerăm funcţia

$$\varphi: D\to\mathbb{R},\ \varphi(x,y)=\sqrt{R^2-x^2-y^2}.$$

Funcţia φ e continuă pe D şi de clasă C^1 pe discul deschis $\mathring{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<R^2\}$. De asemenea

$$p=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \text{ şi } q=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \text{ pe } \mathring{D}.$$

Definiţia 2.7.6. *Fie $D\subset\mathbb{R}$ un domeniu compact şi $\Psi: D\to\mathbb{R}^3$ o parametrizare a suprafeţei $S=\mathrm{Im}(\Psi)$. Atunci, aria suprafeţei compacte S este prin definiţie:*

$$\mathrm{Aria}(S)\overset{(not)}{=}\int_S d\sigma:=\iint_D ||\overrightarrow{N}(u,v)||\,\mathrm{du}\,\mathrm{dv}\,.$$

Expresia $d\sigma:=||\overrightarrow{N}(u,v)||\,\mathrm{du}\,\mathrm{dv}$ se numeşte element de arie. Definiţia este corectă, în sensul că nu depinde de parametrizarea aleasă a suprafeţei S. De asemenea, în cazul când $\overrightarrow{N}(u,v)$ nu este definit pe frontiera lui D, datorită faptului că Ψ este continuă, integrala dublă nedefinită $\iint_D ||\overrightarrow{N}(u,v)||\,\mathrm{du}\,\mathrm{dv}$ este convergentă.

Definiţia anterioară este justificată de următoarea observaţie: Este cunoscut faptul că aria paralelogramului $ABCD$ este $\mathrm{Aria}(ABCD)=||\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD}||$. Pentru a calcula "aria" unei suprafeţe S, ideea este de a aproxima cu suma ariilor unor paralelograme cu vârfurile $\Psi(u_0,v_0)$, $\Psi(u_0,v)$, $\Psi(u,v_0)$, $\Psi(u_0,v)+\Psi(u,v_0)-2\Psi(u_0,v_0)$, unde $(u_0,v_0),(u,v)\in D$. Atunci când $u\to u_0$ şi $v\to v_0$, putem aproxima $\Psi(u,v_0)-\Psi(u_0,v_0)$ prin $\Psi_u(u_0,v_0)(u-u_0)$ şi $\Psi(u_0,v)-\Psi(u_0,v_0)$ prin $\Psi_v(u_0,v_0)(v-v_0)$. Prin urmare, aria paralelogramului anterior se aproximează prin $||(u-u_0)(v-v_0)\overrightarrow{N}(u_0,v_0)||$.

Definiţia 2.7.7. *Fie $D\subset\mathbb{R}$ un domeniu compact şi $\Psi: D\to\mathbb{R}^3$ o parametrizare a suprafeţei $S=\mathrm{Im}(\Psi)$, i.e. $\Psi(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$. Considerăm funcţiile continue $E,F,G:\mathring{D}\to\mathbb{R}$, definite prin*

$$E=||\Psi_u||^2=x_u^2+y_u^2+z_u^2, F=\langle\Psi_u,\Psi_v\rangle=x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v, G=||\Psi_v||^2=x_v^2+y_v^2+z_v^2.$$

Funcţia $EG-F^2$ *se numeşte prima formă fundamentală a suprafeţei* S*. Avem că:*

$$d\sigma = ||\Psi_u \times \Psi_v|| = \sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{du}\,\mathrm{dv}\,.$$

Propoziţia 2.7.8. *Fie* $D \subset \mathbb{R}^2$ *un domeniu compact şi* $\varphi : D \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă pe* D *şi de clasă* C^1 *pe* $\mathring{D}$*. Considerăm suprafaţa* $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x,y) \in D,\ z = \varphi(x,y)\}$*. Atunci, aria lui* S *este:*

$$\mathrm{Aria}(S) = \int_S d\sigma = \int_D \sqrt{1+p^2+q^2}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy},$$

Elementul de arie al suprafeţei S *este* $d\sigma = \sqrt{1+p^2+q^2}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$*.*

Exemplul 2.7.9. Fie $S = S^+(O,R)$ semisfera superioară cu centrul în origine O şi raza $R > 0$. Fie $D = D(O,R)$ discul cu centrul în O şi raza R. Considerăm parametrizarea carteziană a semisferei S, dată prin:

$$S = \{(x,y,z) \mid z = \sqrt{R^2-x^2-z^2},\ (x,y) \in D = D(O,R)\}.$$

Elementul de arie este $d\sigma = \sqrt{1+p^2+q^2}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$. Conform Exemplului 2.7.5, $p = -\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$ şi $q = -\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$. Prin urmare

$$d\sigma = \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2-x^2-y^2} + \frac{y^2}{R^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,.$$

Rezultă că aria lui S este

$$\mathrm{Aria}(S) = \int_S d\sigma = \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,.$$

Folosind coordonatele polare $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$, unde $\rho \in [0,R]$ şi $\theta \in [0,2\pi]$, rezultă că

$$\mathrm{Aria}(S) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{\rho R}{\sqrt{R^2-\rho^2}} d\rho = 2\pi R(-\sqrt{R^2-\rho^2})|_0^R = 2\pi R^2.$$

Prin urmare, aria unei sfere de rază $R > 0$ este $\mathrm{Aria}(S(0,R)) = 2\,\mathrm{Aria}(S) = 4\pi R^2$.

Integrale de suprafaţă

Definiţia 2.7.10. *Fie* $S \subset \mathbb{R}^3$ *o suprafaţă compactă, cu parametrizarea* $\Psi : D \to \mathbb{R}^3$*. Fie* $f : U = \mathring{U} \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă pe* S*. Integrala de suprafaţă de prima speţă a lui* f *pe* S*, este:*

$$\int_S f(x,y,z)d\sigma := \iint_D f(\Psi(u,v))||\overrightarrow{N}(u,v)||\,\mathrm{du}\,\mathrm{dv}\,.$$

Dacă S este parametrizată cartezian, i.e. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D, z = z(x, y)\}$, unde $D \subset \mathbb{R}^2$ este un domeniu compact, atunci:

$$\int_S f(x, y, z)d\sigma = \iint_D f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + p^2 + q^2}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy},$$

unde $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ şi $q = \frac{\partial z}{\partial y}$. (În cele mai multe exerciţii, se vor folosi parametrizări carteziene!)

Observaţia 2.7.11. Folosind proprietăţile integralelor duble, se pot enunţa proprietăţi similare pentru integralele de suprafaţă. De exemplu, pentru $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $f, g : U \to \mathbb{R}$ continue pe S, avem:

$$\int_S (f + g)d\sigma = \int_S f d\sigma + \int_S g d\sigma, \ \int_S \alpha f d\sigma = \alpha \int_S f d\sigma.$$

Definiţia 2.7.12. *Fie $S \subset \mathbb{R}^3$ o suprafaţă compactă şi orientată şi fie $\overrightarrow{n}$ un câmp vectorial unitar la S. Fie $\overrightarrow{V} : S \to \mathbb{R}^3$ un câmp vectorial de clasă C^1. Fluxul lui $\overrightarrow{V}$ prin S este:*

$$\mathrm{Flux}_S(\overrightarrow{V}) := \int_S \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{n} d\sigma.$$

Aplicaţii ale integralelor de suprafaţă în mecanică

Fie S o suprafaţă compactă. Dacă privim S ca fiind o placă omogenă cu densitatea constantă k, atunci:

- Masa lui S este $m = k\,\mathrm{Aria}(S)$.
- Centrul de greutate G al lui S are coordonatele

$$x_G = \frac{1}{\mathrm{Aria}\,S}\int_S x d\sigma, \ y_G = \frac{1}{\mathrm{Aria}\,S}\int_S y d\sigma \text{ şi } z_G = \frac{1}{\mathrm{Aria}\,S}\int_S z d\sigma.$$

- Momentele de inerţie ale lui S în raport cu planele xOy, xOz, yOz sunt

$$I_{xOy} = k\int_S z^2 d\sigma, \ I_{xOz} = k\int_S y^2 d\sigma, \ I_{xOy} = k\int_S z^2 d\sigma.$$

- Momentele de inerţie ale lui S în raport cu axele Ox, Oy, Oz şi cu originea O sunt

$$I_{Ox} = I_{xOy} + I_{xOz}, \ I_{Oy} = I_{xOy} + I_{yOz}, \ I_{Oz} = I_{xOz} + I_{yOz}, I_O = I_{xOy} + I_{xOz} + I_{yOz}.$$

Dacă privim S ca fiind o placă neomogenă cu densitatea dată printr-o funcţie $\rho(x, y, z)$, atunci:

- Masa lui S este $m = \int_S \rho(x,y,z)d\sigma$.
- Centrul de greutate G al lui S are coordonatele

$$x_G = \frac{1}{m}\int_S x\rho(x,y,z)d\sigma,\ y_G = \frac{1}{m}\int_S y\rho(x,y,z)d\sigma, z_G = \frac{1}{m}\int_S z\rho(x,y,z)d\sigma.$$

- Momentele de inerţie ale lui S în raport cu planele xOy, xOz, yOz sunt

$$I_{xOy} = \int_S \rho(x,y,z)z^2 d\sigma,\ I_{zOz} = \int_S \rho(x,y,z)y^2 d\sigma,\ I_{xOy} = \int_S \rho(x,y,z)z^2 d\sigma.$$

- Momentele de inerţie ale lui S în raport cu axele Ox, Oy, Oz şi cu originea O sunt

$$I_{Ox} = I_{xOy}+I_{xOz},\ I_{Oy} = I_{xOy}+I_{yOz},\ I_{Oz} = I_{xOz}+I_{yOz}, I_O = I_{xOy}+I_{xOz}+I_{yOz}.$$

Exerciţii

1. Fie $S = \{(x,y,z) \mid x+y+z = 3,\ x,y,z \geq 0\}$. Calculaţi $\int_S \frac{d\sigma}{x+y+z}$.
2. Fie $S = \{x^2+y^2+z^2 = a^2,\ z \geq 0\}$. Calculaţi $\int_S (x+y+z)d\sigma$.
3. Calculaţi aria suprafeţei $S = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 = 2z,\ z \in [0,2]\}$.
4. Calculaţi aria suprafeţei $S = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 = z^2,\ z \in [1,2]\}$.
5. Calculaţi aria suprafeţei $S = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = R^2,\ x^2+y^2 \leq yR, z \geq 0\}$.
6. Calculaţi fluxul lui $\overrightarrow{V}$ prin S, unde:
   a) $S = \{(x,y,z) | x+y+z = 3,\ x,y,z \geq 0\}$ şi $\overrightarrow{V} = (2z-x, y+x, 3z)$.
   b) $S = \{x^2+y^2+z^2 = R^2,\ z \geq 0\}$ şi $\overrightarrow{V} = (x,y,z)$.
   c) $S = \{x^2+y^2+z^2 = 4,\ z \geq 0\}$ şi $\overrightarrow{V} = (x^2, -2xy, z)$.
   d) $S = \{x^2+y^2 = z,\ z \in [0,1]\}$ şi $\overrightarrow{V} = (x^2, y^2, z^2)$.
   e) $S = \{x^2+y^2 = z^2,\ z \in [1,2]\}$ şi $\overrightarrow{V} = (y-z, z-x, x-y)$.
   f) $S = \{x^2+y^2 = a^2,\ z \in [-1,1]\}$ şi $\overrightarrow{V} = (x, z-x, x-y)$.

2.8 Integrale triple

Integralele triple se definesc în mod similar cu cele duble. (Desigur, aceste noţiuni se pot generaliza în oricâte dimensiuni.)

Definiţia 2.8.1. *Fie $K \subset \mathbb{R}^3$ o mulţime compactă, astfel încât ∂K este o reuniune finită de suprafeţe compacte. Presupunem că $K \subset [a,b]\times[c,d]\times[e,g]$. Fie δ_x, δ_y, δ_z diviziunile:*

$$\begin{aligned}
\delta_x &: \ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,\\
\delta_y &: \ c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d,\\
\delta_z &: \ e = z_0 < z_1 < \cdots < z_p = g.
\end{aligned}$$

Mulţimea

$$\Delta := \{B = [x_{i-1}, x_i]\times[y_{j-1}, y_j]\times[z_{k-1}, z_k] \mid i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}, k = \overline{1,p}\ B \cap D \neq \emptyset\}$$

se numeşte acoperire cu paralelipipede dreptunghice *a lui D. Notăm $\mathcal{D}_D$, mulţimea acoperirilor lui D. Dacă $B = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, notăm $||B|| :=$* $\max\{x_i - x_{i-1}, y_j - y_{j-1}\}$. *Norma lui Δ este $||\Delta|| = \max\{||B|| \mid B \in \tilde{\Delta}\}$. Pentru fiecare paralelipiped dreptunghic $B \in \Delta$, fie $\xi_B \in B \cap D$. Mulţimea $\xi := \{\xi_B \ : \ B \in \Delta\}$ se numeşte sistem de puncte asociat acoperirii Δ.*

Fie $f : K \to \mathbb{R}$ o funcţie. Suma Riemman *asociată lui f, acoperirii Δ şi sistemului de puncte intermediare ξ este:*

$$S_{\Delta,\xi}(f) = \sum_{B\in\Delta} f(\xi_B)\,\mathrm{Vol}(B),$$

unde $\mathrm{Vol}(B)$ *este volumul lui B. Spunem că f este* integrabilă Riemann *pe D şi are integrala $I := \iiint_K f(x, y, z)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz} \in \mathbb{R}$, dacă:* $(\forall)\varepsilon > 0$, $(\exists)\delta_\varepsilon > 0$ *astfel încât, oricare ar fi $\Delta \in \mathcal{D}_D$ cu $||\Delta|| < \delta_\varepsilon$ şi oricare ar fi sistemul de puncte ξ asociat lui Δ, avem $||S_{\Delta,xi}(f) - I|| < \varepsilon$.*

O mulţime $A \subset \mathbb{R}^3$ se numeşte neglijabilă (de măsură Lebesgue zero), dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există o acoperire numărabilă cu bile deschise $(B_n)_n$, i.e. $A \subset \bigcup_n B_n$, cu proprietatea că $\sum_n \mathrm{Vol}(B_n) < \varepsilon$. O suprafaţă compactă $S \subset \mathbb{R}^3$ este o mulţime neglijabilă.

La fel ca în cazul integralelor duble, avem următorul rezultat:

Teoremă 2.8.2. *Fie K un domeniu compact (ca în definţia anterioară) şi $f : K \to \mathbb{R}$ o funcţie. Atunci f este integrabilă dacă şi numai dacă f este mărginită şi mulţimea punctelor de discontinuitate ale lui f este neglijabilă (are măsura Lebesgue zero).*

Teoremă 2.8.3. *Fie $K = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ un paralelipiped dreptunghic. Fie $f : K \to \mathbb{R}$ integrabilă. Presupunem că:*

(a) Pentru orice $(x,y) \in [a,b]\times[c,d]$*, există integrala* $F(x,y) := \int_e^g f(x,y,z)\,\mathrm{dz}$.

(b) Funcţia $F : D \to \mathbb{R}$*, definită la punctul (a), este integrabilă pe* D*.*

Atunci avem:

$$\iiint_K f(x,y,z)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz} = \iint_D \left(\int_e^g f(x,y)\,\mathrm{dz}\right)\mathrm{dx}\,\mathrm{dz} \overset{(not)}{=} \iint_D \mathrm{dx}\,\mathrm{dy} \int_e^g f(x,y)\,\mathrm{dz}\,.$$

Proprietăţi similare se pot obţine, permutând rolul variabilelor x, y, z.

Teoremă 2.8.4. *Fie* $f : K = [a,b] \times [c,d] \times [e,f] \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă. Atunci*

$$\iiint_K f(x,y,z)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz} = \int_a^b \mathrm{dx} \int_c^d \mathrm{dy} \int_e^f f(x,y,z)\,\mathrm{dz} =$$
$$= \int_c^d \mathrm{dy} \int_a^b \mathrm{dx} \int_e^f f(x,y,z)\,\mathrm{dz} = \cdots .$$

Cu alte cuvinte, integrala triplă se calculeză prin trei integrale simple iterate, în oricare din cele $3! = 6$ *ordini posibile.*

Observaţia 2.8.5. Dacă $u : [a,b] \to \mathbb{R}$, $v : [c,d] \to \mathbb{R}$, $w : [e,g] \to \mathbb{R}$ sunt trei funcţii continue şi $f : K = [a,b]\times[c,d]\times[e,f] \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = u(x)v(y)w(z)$, atunci:

$$\iiint_K f(x,y,z)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz} = \int_a^b u(x)\,\mathrm{dx} \cdot \int_c^d v(y)\,\mathrm{dy} \cdot \int_e^g w(z)\,\mathrm{dz}$$

Exemplul 2.8.6. Fie $K = [0,1] \times [0,2] \times [0,3]$ şi $f : K \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = xy^2e^z$. Atunci:

$$\iiint_K f(x,y,z)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz} = \int_0^3 \mathrm{dz} \int_0^2 \mathrm{dy} \int_0^1 xy^2e^z\,\mathrm{dx} =$$
$$= \int_0^3 e^z\,\mathrm{dz} \cdot \int_0^2 y^2\,\mathrm{dy} \cdot \int_0^1 x\,\mathrm{dx} = e^z\Big|_0^3 \cdot \frac{y^3}{3}\Big|_0^2 \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = (e^3-1)\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{4(e^3-1)}{3}.$$

Teoremă 2.8.7. *Fie* $D \subset \mathbb{R}^2$ *un domeniu compact cu frontiera* $\partial D =$ *reuniune finită de curbe netede. Fie* $\varphi, \psi : D \to \mathbb{R}$ *două funcţii continue pe* D *şi de clasă* C^1 *pe* $\mathring{D}$*, cu* $\varphi(x,y) \le \psi(x,y)$, $(\forall)(x,y) \in D$*. Considerăm domeniul (compact):*

$$K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D,\ z \in [\varphi(x,y), \psi(x,y)]\}.$$

Fie $f : K \to \mathbb{R}$ *o funcţie integrabilă, astfel încât funcţia*

$$F : D \to \mathbb{R},\ F(x,y) = \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{dz},$$

este integrabilă pe D (aceste condiţii se verifică dacă f e continuă). Atunci:

$$\iiint_K f(x,y,z)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz} = \iint_D F(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,.$$

În particular, volumul lui K este:

$$\mathrm{Vol}(K) = \iiint_K \mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz}\,.$$

Exemplul 2.8.8. Determinaţi volumul corpului K, mărginit de (semi)conul $z^2 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$, şi paraboloidul $2 - z = x^2 + y^2$. Pentru a determina intersecţia celor două suprafeţe, rezolvăm sistemul:

$$z^2 = x^2 + y^2,\ z \geq 0,\ 2 - z = x^2 + y^2.$$

Din relaţiile de mai sus, rezultă $z^2 = 2 - z$, deci $z^2 + z - 2 = 0$. Ecuaţia are soluţiile $z_1 = -2$ şi $z_2 = 1$, dar cum $z \geq 0$, rezultă că $z = 1$. Prin urmare, interesecţia dintre con şi paraboloid este cercul de ecuaţii: $x^2+y^2 = 1,\ z = 1$. Pe de altă parte, dacă $x^2 + y^2 = z^2$ şi $z \geq 0$, atunci $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. De asemenea, din $2 - z = x^2 + y^2$, rezultă $z = 2 - x^2 - y^2$.

Fie $D = D(O, 1) = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ discul de rază 1 cu centrul în origine. Din observaţiile de mai sus, rezultă:

$$K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D,\ z \in [\sqrt{x^2+y^2}, 2 - x^2 - y^2]\}.$$

Prin urmare, volumul lui K este:

$$\mathrm{Vol}(K) = \iint_K \mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz} = \iint_D \mathrm{dx}\,\mathrm{dy} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2-x^2-y^2} \mathrm{dz} = \iint_D (2-x^2-y^2-\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,.$$

Trecând la coordonate polare $x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta,\ \rho \in [0,1],\ \theta \in [0, 2\pi]$, obţinem:

$$\mathrm{Vol}(K) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (2-\rho^2-\rho)\cdot\rho d\rho = 2\pi \int_0^1 (2\rho-\rho^3-\rho^2) d\rho = 2\pi\left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) = \frac{5\pi}{6}.$$

Teoremă 2.8.9. *(Schimbarea de variabilă în integrala triplă)*

Fie $K, K' \subset \mathbb{R}^3$ două domenii compacte. Presupunem că există o aplicaţie

$$\Phi : K' \to K,\ \Phi(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w)),\ (\forall)(u,v,w) \in K',$$

de clasă C^1 pe $K' \setminus A$, unde $A \subset K'$ este neglijabilă, $K \setminus \Phi(K' \setminus A)$ e neglijabilă şi

$$\left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} > 0,\ (\forall)(u,v,w) \in K' \setminus A.$$

Fie $f : K \to \mathbb{R}$ continuă. Atunci $f \circ \Phi : K' \to \mathbb{R}$ este integrabilă pe K' şi

$$\iiint_K f(x,y,z)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz} = \iint_{K'} f(\Phi(u,v,w)) \left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right| \mathrm{du}\,\mathrm{dv}\,.$$

Coordonate cilindrice

Fie $\Phi : [0, \infty) \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(\rho, \theta, t) := (x(\rho, \theta, t), y(\rho, \theta, t), z(\rho, \theta, t))$, unde:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = t \end{cases}. \text{ Atunci } \left| \frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, t)} \right| = \rho.$$

Exemplul 2.8.10. Calculaţi volumul trunchiului de con:

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = x^2 + y^2,\ z \in [1, 2]\}.$$

Folosind coordonatele cilindrice, observăm că $\rho^2 = x^2 + y^2 = z^2 = t^2$, deci $\rho \in [0, t]$. Pe de altă parte $z = t \in [1, 2]$. De asemenea, $\theta \in [0, 2\pi]$. Atunci:

$$\mathrm{Vol}(K) = \iiint_K \mathrm{dx\,dy\,dz} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 \mathrm{dt} \int_0^t \rho d\rho = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 \frac{t^2}{2}\,\mathrm{dt} = 2\pi\, \frac{t^3}{6}\Big|_1^2 = \frac{7\pi}{3}.$$

Coordonate sferice

Fie $\Phi : [0, \infty) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(\rho, \theta, \varphi) := (x(\rho, \theta, \varphi), y(\rho, \theta, \varphi), z(\rho, \theta, \varphi))$, unde:

$$\begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \varphi \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \theta \end{cases}. \text{ Atunci } \left| \frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \varphi)} \right| = \rho^2 \sin \theta.$$

Exemplul 2.8.11. Calculaţi volumul bilei cu centrul în origine şi raza $R > 0$,

$$B(O, R) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le R^2\}.$$

Folosind coordonatele sferice, observăm că $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$, deci $\rho \in [0, R]$. Pe de altă parte,$\theta \in [0, \pi]$ şi $\varphi \in [0, 2\pi]$. Atunci:

$$\mathrm{Vol}(B(O, R)) = \iiint_{B(O,R)} \mathrm{dx\,dy\,dz} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^R \rho^2 \sin \theta d\rho =$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} \sin \theta \int_0^R \rho^2 d\rho = 2\pi\, (-\cos \theta)|_0^{\pi}\, \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^R = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Coordonate sferice generalizate

Fie $\Phi : [0, \infty) \times [0, \pi] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(\rho, \theta, \varphi) := (x(\rho, \theta, \varphi), y(\rho, \theta, \varphi), z(\rho, \theta, \varphi))$ şi $a, b, c > 0$, unde:

$$\begin{cases} x = a\rho \sin \theta \cos \varphi \\ y = b\rho \sin \theta \sin \varphi \\ z = c\rho \cos \theta \end{cases}. \text{ Atunci } \left| \frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \varphi)} \right| = abc\rho^2 \sin \theta.$$

Exemplul 2.8.12. Calculaţi volumul elipsoidului plin,

$$\mathcal{E} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}.$$

Folosind coordonatele sferice generalizate, obţinem:

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{E}) = \iiint_{\mathcal{E}} \mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 abc\rho^2 \sin\theta d\rho = \cdots = \frac{4\pi abc}{3}.$$

Observaţia 2.8.13. La fel ca în cazul integralelor duble, se pot enunţa proprietăţi similare pentru integralele de suprafaţă. De exemplu, pentru $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $f, g : K \to \mathbb{R}$ continue, avem:

$$\iiint_K (f + g)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz} = \int_K f\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz} + \int_K g\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz},$$
$$\int_K \alpha f\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz} = \alpha \int_K f\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz}\,.$$

Aplicaţii ale integralelor triple în mecanică

Fie K un domeniu compactă. Considerând K un obiect solid realizată dintr-un material omogen cu densitatea constantă k, atunci:

1. Masa lui K este $m = k\,\mathrm{Vol}(K) = k \iiint_K \mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz}$.

2. Centrul de greutate al lui K are coordonatele:

$$x_G = \frac{\iiint_K x\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz}}{\mathrm{Vol}(K)},\ y_G = \frac{\iiint_K y\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz}}{\mathrm{Vol}(K)},\ z_G = \frac{\iiint_K z\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz}}{\mathrm{Vol}(K)}.$$

3. Momentele de inerţie ale lui K în raport cu planele xOy, xOz, yOz sunt

$$I_{xOy} = k \iiint_K z^2\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz},\ I_{xOz} = k \iiint_K y^2\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz},\ I_{yOz} = k \iiint_K x^2\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz}\,.$$

4. Momentele de inerţie ale lui K în raport cu axele Ox, Oy, Oz şi cu originea O sunt

$$I_{Ox} = I_{xOy} + I_{xOz}, I_{Oy} = I_{xOy} + I_{yOz},\ I_{Oz} = I_{xOz} + I_{yOz}, I_O = I_{xOy} + I_{xOz} + I_{yOz}.$$

Considerând K un obiect solid neomogen cu densitatea dată de o funcţie continuă $\rho : K \to [0, \infty)$, atunci:

1. Masa lui K este $m = \iiint_K \rho(x, y, z)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz}$.

2. Centrul de greutate al lui K are coordonatele:

$$x_G = \frac{\iiint_K \rho(x,y,z)x \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz}}{m}, y_G = \frac{\iiint_K \rho(x,y,z)y \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz}}{m},$$
$$z_G = \frac{\iiint_K \rho(x,y,z)z \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz}}{m}.$$

3. Momentele de inerţie ale lui K în raport cu planele xOy, xOz, yOz sunt

$$I_{xOy} = \iiint_K \rho(x,y,z)z^2 \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz}, I_{xOz} = \iiint_K \rho(x,y,z)y^2 \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz},$$
$$I_{yOz} = \iiint_K \rho(x,y,z)x^2 \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz}\,.$$

4. Momentele de inerţie ale lui K în raport cu axele Ox, Oy, Oz şi cu originea O sunt

$$I_{Ox} = I_{xOy}+I_{xOz},\ I_{Oy} = I_{xOy}+I_{yOz}, I_{Oz} = I_{xOz}+I_{yOz}, I_O = I_{xOy}+I_{xOz}+I_{yOz}.$$

Integrale triple improprii

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ o mulţime necompactă şi $f : \Omega \to \mathbb{R}$ o funcţie contină. Vom presupune că există un şir $(K_n)_{n\geq 1}$ de mulţime compacte, astfel încât:

$$K_n \subset K_{n+1},\ (\forall)n \geq 1,\ \bigcup_{n\geq 1} K_n = \Omega.$$

Considerăm şirul de integrale $I_n := \iiint_{K_n} f(x,y,z) \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz}$, $n \geq 1$. Dacă şirul $(I_n)_n$ este convergent, spunem că integrala improprie $\iiint_\Omega f(x,y,z) \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz}$ este convergentă şi definim:

$$\iiint_\Omega f(x,y,z) \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz} := \lim_n I_n.$$

Exemplul 2.8.14. (1) Fie $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 > 1\}$ = exteriorul sferei $S(O,R)$. Fie $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}$. Definind compacţii

$$K_n := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 + \frac{1}{n} \leq x^2+y^2+z^2 \leq n\},\ n \geq 1,$$

avem $K_n \subset K_{n+1}$ şi $\bigcup_{n\geq 1} K_n = \Omega$. Dacă $I_n = \iiint_{K_n} f(x,y,z) \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz}$, atunci se poate arăta că şirul $(I_n)_n$ este convergent şi deci $I = \iiint_\Omega f(x,y,z) \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz}$ este convergentă. Vom calcula însă I, într-un mod mai direct, folosind coordonate sferice:

$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi,\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi,\ z = \rho \cos\theta.$$

Dacă $(x, y, z) \in \Omega$, atunci $\rho^2 = x^2+y^2+z^2 > 1$, deci $\rho \in (1, \infty)$. De asemenea, $\theta \in [0, \pi]$ şi $\varphi \in [0, 2\pi]$. Atunci:

$$I = \iiint_\Omega \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_1^{\infty} \frac{\rho^2 \sin\theta}{\rho^4} d\rho =$$
$$= 2\pi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_1^{\infty} \frac{1}{\rho^2} d\rho = 2\pi(-\cos\theta)|_0^{\pi} \left(-\frac{1}{\rho}\right)\Big|_1^{\infty} = 4\pi.$$

(2) Fie $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ şi $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Atunci, folosind coordonatele sferice, avem:

$$\iiint_\Omega \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{1} \frac{\rho^2 \sin\theta}{\rho} d\rho = \cdots = 2\pi.$$

Exerciţii

1. Fie $K = [0, 1] \times [0, 2] \times [0, 3]$. Calculaţi $\iiint_K xyze^{xz}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz}$.

2. Fie $K = \{(x, y, z) \mid x + y + z \leq 3,\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$. Calculaţi $\iiint_K z\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz}$.

3. Calculaţi volumul corpului K mărginit de $x^2+y^2 = 3z$ şi $x^2+y^2 = 4-z$.

4. Calculaţi volumul lui $K = \{(x, y, z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq 4,\ x^2+y^2 \leq 3z\}$.

5. Calculaţi volumul lui $K = \{(x, y, z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ x^2+y^2 \leq z^2,\ z \geq 0\}$.

6. Fie $K = \{x^2+y^2 \leq 4,\ 0 \leq z \leq 1\}$. Calculaţi $\iiint_K (z^2+1)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz}$.

7. Fie $K = \{x^2+y^2 \leq z^2 \mid 0 \leq z \leq 2\}$. Calculaţi $\iiint_K (x^2+y^2)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz}$.

8. Determinaţi centrul de greutate al corpului omogen $K = \{x^2+y^2+z^2 \leq a^2,\ z \geq 0\}$.

2.9 Elemente de teoria câmpurilor. Formule integrale

Definiţia 2.9.1. *Fie $U \subset \mathbb{R}^3$ o mulţime deschisă.*

(1) Un câmp vectorial de clasă C^1 este o aplicaţie $\overrightarrow{V} : U \to \mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{V} = (P, Q, R)$, unde $P, Q, R : U \to \mathbb{R}$ sunt funcţii de clasă C^1.

(2) Un câmp scalar de clasă C^1 este o funcţie $f : U \to \mathbb{R}$ de clasă C^1.

(3) Gradientul lui f este câmpul vectorial

$$\nabla f = \mathrm{grad}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right), \ \textit{unde}\ \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right).$$

(4) Divergenţa lui $\overrightarrow{V}$ este câmpul scalar

$$\nabla \cdot \overrightarrow{V} = \mathrm{div}(\overrightarrow{V}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

(5) Laplacianul lui f este $\Delta f = \mathrm{div}(\mathrm{grad}(f)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

(6) Rotorul lui $\overrightarrow{V}$ este câmpul vectorial

$$\nabla \times \overrightarrow{V} = \mathrm{rot}(\overrightarrow{V}) = \mathrm{curl}(\overrightarrow{V}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Observaţia 2.9.2. (1) Dacă suprafaţa S este definită de o ecuaţie $F(x, y, z) = 0$, gradientul lui F, $\mathrm{grad}(F)$ este un câmp vectorial normal la S.

(2) Divergenţa unui câmp vectorial $\overrightarrow{V}$ într-un punct dat măsoară cantitatea, ca sursă în punctul P, a lui $\overrightarrow{V}$.

(3) Rotorul unui câmp vectorial, măsoară direţia şi viteza în care un câmp vectorial se roteşte.

Teoremă 2.9.3. *(Jordan) Fie $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ un drum parametrizat simplu şi închis. Atunci mulţimea $\mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$ are două componente conexe:*

1. $\mathrm{Int}(\gamma) =$ *interiorul lui γ (care e mărginită).*

2. $\mathrm{Ext}(\gamma) =$ *exteriorul lui γ (care e nemărginită).*

Deşi, intuitiv, enunţul pare evident, demonstraţia acestei teoreme nu este deloc uşoară!

Propoziţia 2.9.4. *O mulţime $D \subset \mathbb{R}^2$ este simplu conexă dacă şi numai dacă D este conexă şi pentru orice drum simplu închis γ în D, avem* $\mathrm{Int}(\gamma) \subset D$.

Definiţia 2.9.5. *Fie $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ un drum simplu închis. γ se numeşte orientat pozitiv, dacă pe măsură ce γ e parcurs, interiorul lui γ este spre stânga şi exteriorul spre dreapta. (Gândiţi-vă la un cerc parcurs în sens pozitiv). Drumul γ se numeşte orientat negativ, dacă drumul opus γ^- este orientat pozitiv.*

Teoremă 2.9.6. *(Formula Riemann-Green) Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ o mulţime deschisă simplu conexă şi γ un drum simplu închis în D, orientat pozitiv, de clasă C^1 pe porţiuni. Fie $P, Q : D \to \mathbb{R}$ două funcţii de clasă C^1. Fie compactul $K := \overline{\mathrm{Int}(\gamma)}$. Atunci:*

$$\int_\gamma P \,\mathrm{dx} + Q \,\mathrm{dy} = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,.$$

De observat că integrala din stânga depinde doar de $C = \mathrm{Im}(\gamma)$, nu de drumul γ ales. Prin urmare, se poate folosi notaţia $\int_C P \,\mathrm{dx} + Q \,\mathrm{dy}$. De asemenea, este evident că $C = \partial K$. Prin urmare, formula Riemann-Green se poate rescrie ca:

$$\int_{\partial K} P \,\mathrm{dx} + Q \,\mathrm{dy} = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,.$$

Exemplul 2.9.7. Fie $\mathcal{C}(O,R)$ cercul de rază R cu centrul în origine $O(0,0)$. Fie $D(O,R)$ discul de rază R cu centrul în O. Evident, $\mathcal{C}(O,R) = \partial D(O,R)$. Fie $P, Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $P(x,y) = y^2$ şi $Q(x,y) = 2xy - x$. Atunci:

$$\int_{\mathcal{C}(O,R)} y^2 \,\mathrm{dx} + (2xy - x) \,\mathrm{dy} = \iint_{D(O,R)} (2y - 1 - 2y) \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \mathrm{Aria}(D(O,R)) = \pi R^2.$$

Reamintim următoarea definiţie:

Definiţia 2.9.8. *Fie $S \subset \mathbb{R}^3$ o suprafaţă compactă şi orientată şi fie $\overrightarrow{n}$ un câmp vectorial unitar la S. Fie $\overrightarrow{V} : S \to \mathbb{R}^3$ un câmp vectorial de clasă C^1. Fluxul lui $\overrightarrow{V}$ prin S este:*

$$\mathrm{Flux}_S(\overrightarrow{V}) := \int_S \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{n} d\sigma.$$

Teoremă 2.9.9. *(Gauss-Ostrogradski) Fie $K \subset \mathbb{R}^3$ un compact, $S = \partial K$ şi $\overrightarrow{n}$ un câmp vectorial unitar normal la S orientat spre exteriorul lui S în raport cu K. Fie $\overrightarrow{V} : K \to \mathbb{R}^3$ un câmp vectorial de clasă C^1. Atunci:*

$$\mathrm{Flux}_S(\overrightarrow{V}) = \int_S \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{n} d\sigma = \iiint_K \mathrm{div}(\overrightarrow{V}) \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz}\,.$$

Teoremă 2.9.10. *(Stokes) Fie $S \subset \mathbb{R}^3$ o suprafaţă compactă, astfel încât $\gamma = \partial S$ e o curbă închisă. Considerăm două orientări compatibile pe S şi γ (adică respectă "regula mâinii drepte"). Fie $\overrightarrow{V} : S \to \mathbb{R}^3$ un câmp vectorial de clasă C^1. Atunci*

$$\int_\gamma \overrightarrow{V} d\overrightarrow{r} = \int_S \mathrm{rot}(\overrightarrow{V}) \cdot \overrightarrow{n} d\sigma.$$

Definiţia 2.9.11. *Fie $U \subset \mathbb{R}^3$ deschis şi $\overrightarrow{V} : U \to \mathbb{R}^3$ de clasă C^1.*

(1) $\overrightarrow{V}$ *se numeşte* irotaţional *dacă* $\mathrm{rot}(\overrightarrow{V}) = \overrightarrow{0}$.

(2) $\overrightarrow{V}$ *se numeşte* conservativ*, dacă există $f : U \to \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{V} = \mathrm{grad}(f)$. f se numeşte câmp potenţial scalar al lui $\overrightarrow{V}$.*

(3) $\overrightarrow{V}$ *se numeşte* solenoidal*, if* $\mathrm{div}(\overrightarrow{V}) = 0$.

Teoremă 2.9.12. *Fie $U \subset \mathbb{R}^3$ deschis stelat şi $\overrightarrow{V} : U \to \mathbb{R}^3$ de clasă C^1. U.A.S.E.:*

(1) $\overrightarrow{V}$ este irotaţional.

(2) $\overrightarrow{V}$ este conservativ.

(3) Pentru orice drum închis $\gamma \subset U$, $\int_\gamma \overrightarrow{V} d\overrightarrow{r} = 0$.

Teoremă 2.9.13. *Fie $U \subset \mathbb{R}^3$ deschis stelat şi $\overrightarrow{V} : U \to \mathbb{R}^3$ de clasă C^1. U.A.S.E.:*

(1) $\overrightarrow{V}$ is solenoidal.

(2) Există un câmp vectorial $\overrightarrow{W} : U \to \mathbb{R}^3$, astfel încât $\overrightarrow{V} = \mathrm{rot}(\overrightarrow{W})$. $\overrightarrow{W}$ se numeşte câmp potenţial vectorial al lui $\overrightarrow{V}$.

(3) Pentru orice suprafaţă închisă $S \subset U$, $\mathrm{Flux}_S(\overrightarrow{V}) = 0$.

Exerciţii

1. Fie $\overrightarrow{V} = (x, xy, xyz)$. Calculaţi $\mathrm{div}(\overrightarrow{V})$ şi $\mathrm{rot}(\overrightarrow{V})$.
2. Fie $f(x,y,z) = \frac{1}{||\overrightarrow{r}||} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Calculaţi $\mathrm{grad}(f)$ şi $\Delta(f)$.
3. Arătaţi că câmpul gravitaţional $\overrightarrow{V} = -\frac{G\overrightarrow{r}}{r^3}$, unde $\overrightarrow{r} = (x,y,z)$, $r = ||\overrightarrow{r}||$, este irotaţional şi solenoidal.
4. Fie $\overrightarrow{V} = (2xy, x^2 + z, y)$. Arătaţi că $\overrightarrow{V}$ este irotaţional şi găsiţi un câmp potenţial scalar f.
5. Fie $\overrightarrow{V} = (2xy, -y^2, 1)$. Arătaţi că $\overrightarrow{V}$ este solenoidal şi găsiţi un câmp potenţial vectorial $\overrightarrow{W}$.

6. Calculaţi direct şi cu Riemann-Green: $\int_\gamma (x+y)\,\mathrm{dx} - (x-y)\,\mathrm{dy}$ şi $\int_\gamma y^2\,\mathrm{dx} + x\,\mathrm{dy}$, unde γ este frontiera domeniului $D = \{x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0\}$.

7. Fie $A(-1,0), B(1,1)$ şi $C(1,-1)$. Fie D triunghiul plin ABC şi $\gamma = \partial D$. Calculaţi $\int_\gamma xdy - ydx$, direct şi cu Riemann-Green.

8. Fie $\mathcal{C}(0,r)$ = cercul cu raza $r > 0$ şi centrul în origine. Fie $P = \frac{x-y}{x^2+y^2}$ şi $Q = \frac{x+y}{x^2+y^2}$.

   a) Arătaţi că $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

   b) Calculaţi $\int_{C(0,r)} P\,\mathrm{dx} + Q\,\mathrm{dy}$.

   c) Fie γ o curbă cu $O \notin \gamma$. Calculaţi $\int_\gamma P\,\mathrm{dx} + Q\,\mathrm{dy}$.

9. Fie $K = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$ şi $S = \partial K = \{x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$. Calculaţi $\mathrm{Flux}_S(\overrightarrow{V}_1)$ şi $\mathrm{Flux}_S(\overrightarrow{V}_2)$, unde $\overrightarrow{V}_1 = (x^2, y^2, z^2)$ şi $\overrightarrow{V}_2 = (x^2, -2xy, z^3)$, folosind formula Gauss-Ostrogradksi.

10. Fie $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0\}$. Fie $\overrightarrow{V} = (x^2, -2xy, z^2)$. Calculaţi fluxul lui $\overrightarrow{V}$ prin S.

11. Fie $K = \{x^2 + y^2 \leq z,\ z \in [0,1]\}$, $S = \partial K = \{x^2 + y^2 \leq z,\ z \in [0,1]\} \cup \{x^2 + y^2 \leq 1,\ z = 0\}$ şi $\overrightarrow{V} = (x^2, y^2, z^2)$. Calculaţi $\mathrm{Flux}_S(\overrightarrow{V})$.

12. Fie $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ z \geq 0\}$, $\overrightarrow{r} = (x, y, z)$ şi $\overrightarrow{V} = (y, -x, z)$. Calculaţi $\mathrm{Flux}_S(\overrightarrow{r})$ şi $\mathrm{Flux}_S(\overrightarrow{V})$.

13. Calculaţi fluxul lui $\overrightarrow{V} = (2xy, -y^2, 3z)$ prin $S(0,R)$.

14. Fie $\vec{r} = (x, y, z)$, $r = ||\vec{r}||$, $\overrightarrow{E} = \frac{q}{4\pi}\frac{\vec{r}}{r^3}$.

    a) Calculaţi fluxul lui $\overrightarrow{E}$ prin $S(0,R)$.

    b) Fluxul lui $\overrightarrow{E}$ prin Σ, unde $\Sigma = \partial K$, K e un domeniu compact şi $0 \notin \Sigma$.

15. Fie $S = \{x^2+y^2 \leq 1\} \cap \{x+z = 1\}$, $C = \partial S = \{x^2+y^2 = 1\} \cap \{x+z = 1\}$. Calculaţi $\int_C (y-z)\,\mathrm{dx} + (z-x)\,\mathrm{dy} + (x-y)\,\mathrm{dz}$, direct şi cu formula Stokes.

16. Fie $\gamma : \{x^2 + y^2 + z^2 = 2, z = 1$ şi $\overrightarrow{V} = (y - z, z - x, x - y)$. Calculaţi $\int_\gamma \overrightarrow{V} d\bar{r}$, direct şi cu formula Stokes.

17. Fie $C = \{x^2+y^2+z^2 = a^2\} \cap \{x+y+z = a\}$. Calculaţi $\int_C ydx + zdy + xdz$, direct şi cu formula Stokes.

18. Fie $\overrightarrow{V} = (-y, x, z^2)$. Calculaţi $\int_\gamma \overrightarrow{V} d\overrightarrow{r}$, $\gamma : \{x^2 + y^2 + z^2 = 2,\ z = 1$.

2.10 Exerciţii recapitulative

1. Studiaţi convergenţa integralelor improprii:

   a) $\int_1^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x^3-1}}\,\mathrm{dx}$.

   b) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x-x^2}\,\mathrm{dx}$.

   c) $\int_1^\infty \frac{x-1}{x^a-1}\,\mathrm{dx}$, $a \geq 1$.

   d) $\int_0^\infty \frac{\mathrm{arctg}(x)}{x^a}$, $a \geq 0$.

2. Calculaţi $\int_0^\infty \frac{\sin(ax)\cos(bx)}{x}\,\mathrm{dx}$, unde $a, b > 0$, folosind $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{dx} = \frac{\pi}{2}$.

3. Calculaţi, cu ajutorul funcţiilor Γ şi B, integralele:

   a) $\int_0^\infty x^2 e^{-x^2}\,\mathrm{dx}$.

   b) $\int_0^\infty x^3 e^{-2x^2}\,\mathrm{dx}$.

   c) $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{dx}$.

   d) $\int_0^\infty e^{-x^p}\,\mathrm{dx}$, $p > 0$.

   e) $\int_0^1 \ln^p\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{dx}$, $p > -1$.

   f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cos^q x\,\mathrm{dx}$, $p, q > -1$ astfel încât $p + q = 2k$ cu $k \in \mathbb{N}$.

   g) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[n]{1-x^n}}\,\mathrm{dx}$, $n \geq 2$.

   h) $\int_0^\infty \frac{\mathrm{dx}}{x^3+1}$.

   i) $\int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^4)^2}\,\mathrm{dx}$,

   j) $\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{dx}$.

4. Calculaţi $\int_0^\infty e^{-x^2}\cos x\,\mathrm{dx}$, folosind $\cos x = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$.

5. Arătaţi că $F(y) = \int_0^\infty \frac{\sin(xy)}{1+x^2}\,\mathrm{dx}$ este continuă pe $\mathbb{R}$.

6. Studiaţi continuitatea funcţiei $F(y) = \int_0^\infty y e^{-xy}\,\mathrm{dx}$, $y \in [0, \infty)$.

7. Calculaţi integralele cu parametru:

   a) $F(y) = \int_0^\infty e^{-2xy}\frac{\sin(2x)}{x}dx$, $y > 0$.

   b) $F(y) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{arctg}(xy)}{x(1+x^2)}\,\mathrm{dx}$, $|y| < 1$.

   c) $F(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos^2 x + y^2 \sin^2 x)\,\mathrm{dx}$, $y > 0$.

   d) $F(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1+y\cos x}{1-y\cos y}\right) \cdot \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{dx}$, $|y| < 1$.

e) $F(y) = \int_0^1 \frac{\ln(1-x^2y^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{dx}$, $|y| < 1$.

f) $F(a,b) = \int_0^\infty \frac{\ln(a^2+x^2)}{b^2+x^2}\,\mathrm{dx}$, $a, b > 0$ şi $a \neq b$.

8. Calculaţi $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{dx}$, folosind integrala $F(y) = \int_0^y \frac{\ln(1+xy)}{1+x^2}\,\mathrm{dx}$, $y > 0$.

9. Calculaţi $J = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{lnx}\cos(\ln x)\,\mathrm{dx}$. (Indicaţie: $\int_a^b x^y\,\mathrm{dy} = \frac{x^b-x^a}{\ln x}$)

10. Calculaţi $\int_0^1 x^x\,\mathrm{dx}$ cu o eroare $\varepsilon < 10^{-3}$. (Indicaţie: $x^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x\ln x)^n}{n!}$)

11. Calculaţi lungimea curbelor:

    a) $\gamma:\ \{x = t^2, y = \frac{2}{3}t^3, t \in [0,1]$.

    b) $\gamma:\ \{x = t^2, y = \frac{2}{3}t^3,\ t \in [-1,1]$,

    c) $\gamma:\ \{x = \cos^3 t, y = \sin^3 t,\ t \in [-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$.

    d) $\gamma:\ \{x = 3t^2, y = 2t^3,\ t \in [-1,1]$.

    e) $\gamma:\ \{x = \cos^3 t, y = \sin^3 t,\ t \in [0, \pi/2]$.

    f) $\gamma : \{x = t, y = t^2, z = \frac{2}{3}t^3, t \in [-1, 0]$.

12. Determinaţi lungimea arcului parabolei $y^2 = 4x$ dintre $O(0,0)$ şi $A(1,2)$.

13. Determinaţi masa firului material $\gamma : \{x = t, y = \frac{1}{2}t^2, z = \frac{1}{3}t^3, t \in [0,1]$ cu densitatea $\rho(x,y,z) = \sqrt{2y}$.

14. Determinaţi centrul de greutate al arcului de cerc $\gamma:\ \{x = \cos t, y = \sin t,\ t \in [0,\alpha]$, unde $\alpha \in (0,\pi)$.

15. Determinaţi masa şi centrul de greutate al firului material $\gamma:\ \{x = t,\ y = \operatorname{ch} t,\ t \in [0,1]$ şi densitatea $\rho(x,y) = y$.

16. Calculaţi:

    a) $\int_\gamma \frac{1}{x^2+y^2+4z^2}\,\mathrm{ds}$, unde $\gamma : \{x = 2\cos t, y = 2\sin t, z = t, t \in [0,2]$.

    b) $\int_\gamma \frac{2}{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{ds}$, unde $\gamma : \{x = \cos t, y = \sin t, z = t,\ t \in [0,\sqrt{3}]$.

    c) $\int_\gamma y\,\mathrm{ds}$, unde $\gamma:\ \{x = \ln(\sin t) - \sin^2 t,\ y = \frac{1}{2}\sin(2t)\ t \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$.

    d) $\int_\gamma xy\,\mathrm{ds}$, unde $\gamma:\ \{x = |t|,\ y = \sqrt{1-t^2},\ t \in [-1,1]$.

17. Calculaţi:

    a) $\int_{\mathcal{C}(0,R)} \frac{x-y}{x^2+y^2}\,\mathrm{dx} + \frac{x+y}{x^2+y^2}\,\mathrm{dy}$.

    b) $\int_{\mathcal{C}(0,2)} \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{dx} + \frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{dy}$.

    c) $\int_\gamma \frac{y}{x+1}\,\mathrm{dx} + y\,\mathrm{dy}$, unde γ este triunghiul ABC, $A(2,0)$, $B(0,0)$ şi $C(0,2)$.

d) $\int_\gamma y \, \mathrm{dx} - x \, \mathrm{dy}$, unde γ este elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

e) $\int_\gamma (y-x) \, \mathrm{dx} + (z-x) \, \mathrm{dy} + (x-y) \, \mathrm{dz}$, unde $\gamma : \{x^2 + y^2 + z^2 = 2, z = 1$.

f) $\int_\gamma \overrightarrow{V} d\vec{r}$, unde $\overrightarrow{V} = (-y, x, z^2)$ şi $\gamma : \{x^2 + y^2 = 1, \ z = 1$.

18. Fie $P, Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $P = x^2 + 6y$, $Q = 3ax - 4y$. Determinaţi $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $\omega = P \, \mathrm{dx} + Q \, \mathrm{dy}$ este o formă diferenţială exactă şi apoi determinaţi $f \in C^1(\mathbb{R})$ cu $\omega = df$.

19. Fie forma diferenţială $\omega = y \, \mathrm{dx} + x \, \mathrm{dy}$.

    a) ω este închisă? Dar exactă?

    b) Calculaţi $\int_\gamma \omega$, unde ω e un drum cu capetele $A(2, 1)$ şi $B(1, 3)$.

20. Fie $P, Q : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid xy + 1 = 0\} \to \mathbb{R}$, $P = \frac{y}{1+xy}$, $Q = \frac{x}{1+xy}$ şi $\omega = P \, \mathrm{dx} + Q \, \mathrm{dy}$. Calculaţi $\int_\gamma \omega$, unde γ este un drum care uneşte $A(-1, -1)$ şi $B(3, 3)$ fără să intesecteze hiperbola $\{(x, y) \mid xy + 1 = 0\}$.

21. Fie $P, Q, R : \{(x, y, z) \mid y, z > 0\} \to \mathbb{R}$, $P = x^2 - yz - \frac{y}{x^2+y^2}$, $Q = y^2 - xz - \frac{y}{x^2+y^2}$, $R = z^2 - xy$ şi $\omega = P \, \mathrm{dx} + Q \, \mathrm{dy} + R \, \mathrm{dz}$.

    a) ω este închisă? Dar exactă?

    b) Calculaţi $\int_\gamma \omega$, unde ω e un drum cu capetele $A(1, 1, 0)$ şi $B(-1, 1, 0)$.

22. Calculaţi integralele duble:

    a) $\iint_D x \cos(xy) \, \mathrm{dx} \, \mathrm{dy}$, unde $D = [0, \pi] \times [1, 2]$.

    b) $\iint_D xy \, \mathrm{dx} \, \mathrm{dy}$, unde $D = \{(x, y) \mid y^2 \leq x \leq y\}$.

    b) $\iint_D (1 + \sqrt{x^2 + y^2}) \, \mathrm{dx} \, \mathrm{dy}$, unde $D = \{(x, y) | \ x^2 + y^2 \leq 4, \ x \geq 0\}$.

    c) $\iint_D (x + \sqrt{x^2 + y^2}) \, \mathrm{dx} \, \mathrm{dy}$, unde $D = \{(x, y) | \ x^2 + y^2 \leq x, \ y \geq 0\}$.

    d) $\iint_D (2 - \sqrt{x^2 + y^2}) \, \mathrm{dx} \, \mathrm{dy}$, unde $D = \{(x, y) | \ x^2 + y^2 \leq 4, \ y \geq 0\}$.

    e) $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, \mathrm{dx} \, \mathrm{dy}$, unde $D = \{(x, y) | \ x^2 + y^2 \leq 2y\}$.

    f) $\iint_D (1 + 2\sqrt{x^2 + y^2}) \, \mathrm{dx} \, \mathrm{dy}$, unde $D = \{(x, y) | \ x^2 + y^2 \leq 4y, \ x \geq 0\}$

    g) $\iint_D \sqrt{4 + x^2 + y^2} \, \mathrm{dx} \, \mathrm{dy}$, unde $D = \{(x, y) | \ x^2 + y^2 \leq 1, \ y \geq 0\}$.

    h) $\iint_D x^2 \, \mathrm{dx} \, \mathrm{dy}$, unde $D = \{(x, y) | \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$.

    i) $\iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2} \, \mathrm{dx} \, \mathrm{dy}$, unde $D = \{(x, y) | \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$.

    j) $\iint_D (1 + \sqrt{x^2 + y^2}) \, \mathrm{dx} \, \mathrm{dy}$, unde $D = \{x^2 + y^2 \leq 2x, y \geq 0\}$,

    k) $\iint_D (2 - \sqrt{x^2 + y^2}) \, \mathrm{dx} \, \mathrm{dy}$, unde $D = \{x^2 + y^2 \leq 2y, x \geq 0\}$.

    m) $\iint_D x^2 e^{x^2+y^2} \, \mathrm{dx} \, \mathrm{dy}$, unde $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$.

23. Calculaţi $\iint_D (3x+y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$, unde D este domeniul plan mărginit de $x = y^2 + 1$, $x = -y^2$, $y = -1$, $y = 3$.

24. Calculaţi $\iint_D e^{|x+y|}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$, unde D este domeniul plan mărginit de $x+y = 3$, $x + y = -3$, $y = 0$, $y = 3$.

25. Calculaţi $\iint_D \ln(x^2+y^2)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$, unde D este domeniul plan mărginit de $x^2 + y^2 = e^2$, $y = x\sqrt{3}$, $x = y\sqrt{3}$, $x \geq 0$.

26. Calculaţi cu o eroare $< 10^{-2}$, $\int_D \frac{1}{1+xy}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$, unde $D = [0, \frac{1}{2}] \times [0, 1]$.

27. Calculaţi aria domeniului D, unde:

    a) D domeniul mărginit de curba $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$, $x > 0$, $a > 0$.

    b) D e domeniul mărginit de curba $(x^2+y^2)^2 = 2a^2xy$, $a > 0$.

28. Calculaţi masa plăcii $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2, x, y \geq 0\}$, cu densitatea $\rho(x, y) = xy$.

29. Fie $a, b > 0$. Determinaţi centrul de greutate al plăcii omogene $D = \{(x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ x, y \geq 0\}$.

30. Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $D = D(O, 1)$, discul de rază 1 cu centrul în $O(0, 0)$. Calculaţi $\int_D \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}$ şi $\int_{\mathbb{R}^2\setminus D} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}$.

31. Calculaţi aria suprafeţelor:

    a) $S = \{(x, y, z) \mid z = 2x^2 + 2y^2\ :\ z \in [0, 1]\}$.

    b) $S = \{(x, y, z) \mid z^2 = 2x^2 + y^2\ :\ z \in [1, 2]\}$.

    c) $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z \geq 0\} \cap \{x^2 + y^2 \leq 2x\}$.

    d) $S = \{(x, y, z) \mid z^2 = x^2 + y^2\ :\ z \in [0, 1]\}$.

    e) $S = \{(x, y, z) \mid z = 3x^2 + 3y^2,\ z \in [0, 3]\}$.

    f) $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z \geq 0\} \cap \{x^2 + y^2 \leq 2x\}$.

    g) $S = \{(x, y, z) \mid z = x^2 + y^2, z \in [0, 4]\}$.

    h) $S = \{(x, y, z) \mid z = x^2 + y^2, z \in [1, 3]\}$.

    i) $S = \{(x, y, z) \mid z = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 \leq 2y\}$.

32. Calculaţi $\int_S F(x, y, z)\,\mathrm{ds}$, unde:

    a) $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z \geq 0\}$, $F(x, y, z) = x^2 + y^2$.

    b) $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + z^2 = y^2,\ y \in [0, 1]\}$, $F(x, y, z) = |xyz|$.

    c) $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 6z\}$, $F(x, y, z) = y\sqrt{z}$.

33. Determinaţi centrul de greutate şi momentele de inerţie în raport cu axele de coordonate ale paraboloidului $z = x^2 + y^2$, $z \in [0, h]$.

34. Calculaţi fluxul câmpurilor vectoriale $\vec{r} = (x, y, z)$ şi $\vec{V} = (y, -x, z^2)$ prin: a) $z^2 = x^2 + y^2$, $z \in [1, 2]$, b) $z = x^2 + y^2$, $z \in [0, 2]$.

35. Calculaţi $\int_S \overrightarrow{V} \cdot \vec{n} d\sigma$, unde $\overrightarrow{V} = (-y, x, 1)$ şi $S = \{x^2+y^2+z^2 = 1, z \geq 0\}$.

36. Calculaţi: a) $\int_{S(0,\sqrt{3})} 5xy \,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz} + (y^2 - z)\,\mathrm{dz}\,\mathrm{dx} + (2z - 3yz)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$.

    b) $\int_S xz \,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz} + yz \,\mathrm{dz}\,\mathrm{dx} + (x + y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$, unde $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = a^2,\ z \in [0, h]\}$.

    c) $\int_S x \,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz} + y \,\mathrm{dz}\,\mathrm{dx} + z \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$, unde $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ x, y, z \geq 0\}$.

    d) $\int_S x \,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz} + y \,\mathrm{dz}\,\mathrm{dx}$, unde $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = z^2,\ z \in [1, 2]\}$.

37. Calculaţi aria sferei $S(0, R)$ şi volumul bilei $B(0, R)$, $R > 0$.

38. Calculaţi volumele corpurilor mărginite de :

    a) $z = x^2 + y^2$ şi $6 - z = x^2 + y^2$.

    b) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ şi $y^2 + z^2 = x^2$, unde $x \geq 0$.

    c) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ şi $3z = x^2 + y^2$, unde $z \geq 0$.

    d) $x^2 + y^2 = z^2$ şi $2 - z = x^2 + y^2$, unde $z \geq 0$.

    e) $z^2 = x^2 + y^2$ şi $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, unde $z \geq 0$.

    f) $z = x^2 + y^2$ şi $2 - z = x^2 + y^2$.

39. Calculaţi:

    a) $\iiint_K (x^2 - xyz)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz}$, $K = \{(x, y, z) \mid x + 2y + 3z \leq 6,\ x, y, z \geq 0\}$.

    b) $\iiint_K \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz}$, $K = \{(x, y, z) \mid x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1,\ x^2+y^2 \geq 1,\ x, y \geq 0,\ z \in [0, 5]\}$.

    c) $\iiint_K \left(1 - x^2 - y^2 - z^2\right)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz}$, $K = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ y, z \geq 0\}$.

    d) $\iiint_K z\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz}$, $K = \{(x, y, z) \mid (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + z^2 \leq 4,\ z \geq 0\}$.

40. Calculaţi masa corpului mărginit de $z^2 = x^2 + y^2$ şi $2 - z = x^2 + y^2$ cu densitatea $\rho(x, y, z) = 2$.

41. Determinaţi centrul de greutate al corpului omogen mărginit de $z = 2 - x^2 - y^2$, $z = x^2 + y^2$.

42. Fie f, g câmpuri scalare şi $\overrightarrow{V}, \overrightarrow{W}$ câmpuri vectoriale pe $\mathbb{R}^3$. Arătaţi că:

    a) $\text{grad}(fg) = f\,\text{grad}(g) + g\,\text{grad}(f)$.

    b) $\text{div}(f\overrightarrow{V}) = f\,\text{div}(\overrightarrow{V}) + \overrightarrow{V}\cdot\text{grad}(f)$.

    c) $\text{div}(\overrightarrow{V}\times\overrightarrow{W}) = \overrightarrow{W}\cdot\text{rot}(\overrightarrow{V}) - \overrightarrow{V}\,\text{rot}(\overrightarrow{W})$.

    d) $\text{rot}(f\overrightarrow{V}) = f\,\text{rot}(\overrightarrow{V}) - \overrightarrow{V}\times\text{grad}(f)$

    e) $\text{rot}(\text{grad}\,\overrightarrow{V}) = \vec{0}$.

    f) $\text{div}(\text{rot}\,\overrightarrow{V}) = 0$.

    g) $\text{div}(\text{grad}\,f) = \Delta f$.

43. Fie $\vec{r} = (x, y, z)$, $r = ||\vec{r}||$.

    a) Calculaţi rotorul câmpului vectorial $\overrightarrow{V} = \frac{1}{r}(\vec{k}\times\vec{r})$.

    b) Calculaţi divergenţa câmpului vectorial $\overrightarrow{V} = \vec{r} + \frac{\vec{c}\cdot\vec{r}}{r^4}\vec{r}$.

44. Fie $\overrightarrow{V} = (x^2 + y - 4, 3xy, 2xz + z^2)$.

    a) Calculaţi $\overrightarrow{F} = \text{rot}(\overrightarrow{V})$.

    b) Calculaţi fluxul lui $\overrightarrow{F}$ prin $\Sigma = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 16,\ z \geq 0\}$.

45. Calculaţi:

    a) $\int_\gamma \overrightarrow{V}\,d\bar{r}$, unde $\overrightarrow{V} = (y, 3xy)$ şi $\gamma : x^2 + y^2 = 2x$.

    b) $\int_\gamma y\,\text{dx} + x^2\,\text{dy}$, unde $\gamma : x^2 + y^2 = 2y$.

    c) $\int_{\mathcal{C}(0,1)} (y + y^2)\,\text{dx} + 2xy\,\text{dy}$.

    d) $\int_\gamma (2xy + y)\,\text{dx} + x^2\,\text{dy}$, unde $\gamma = \partial D$, $D = \{x^2 + y^2 \leq 2, x \geq 0, y \geq 0\}$.

    e) $\int_\gamma xy\,\text{dx} + \frac{x^2}{2}\,\text{dy}$, unde $\gamma = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1,\ x \leq 0 \leq y\} \cup \{(x, y) \mid x + y = -1, x \leq 0, y \leq 0\}$.

    f) $\int_\gamma y^2\,\text{dx} + x\,\text{dy}$, unde γ este pătratul cu vârfurile $A(0, 0)$, $B(2, 0)$, $C(2, 2)$ şi $D(0, 2)$.

    g) $\int_{\mathcal{C}(0,R)} e^{x^2+y^2}(-y\,\text{dx} + x\,\text{dy})$.

46. Calculaţi aria domeniului D mărginit de curba $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, unde $a > 0$. (Indicaţie: $\text{Aria}(D) = \frac{1}{2}\int_{\partial D} x\,\text{dy} - y\,\text{dx}$)

47. Fie $\overrightarrow{V} = (-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ şi $\vec{r} = (x, y, z)$.

    a) Calculaţi $\int_{\mathcal{C}(0,2)} \overrightarrow{V}\,d\vec{r}$.

    b) Calculaţi $\int_\gamma \overrightarrow{V}\,d\vec{r}$, unde γ e un drum arbitrar închis cu $0 \notin Int(\gamma)$.

48. Fie $\overrightarrow{V} = (x^2 + z^2, -2xy, x + y + 3z)$. Calculaţi fluxul lui $\overrightarrow{V}$ prin $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$.

49. Fie $\overrightarrow{V} = (x^2, -2xy, 2z + x)$. Calculaţi fluxul lui $\overrightarrow{V}$ prin $S(0, R)$.

50. Fie $\overrightarrow{V} = (2xy, -y^2, 3z)$. Calculaţi fluxul ui $\overrightarrow{V}$ prin $S(0, 1)$.

51. Calculaţi fluxul lui $\overrightarrow{V} = (2x^2y, -2y^2x, 3x + z)$ prin $S(0, 1)$.

52. Calculaţi fluxul lui $\overrightarrow{V} = (xz, yz, z - z^2)$ prin $S(0, 2)$.

53. Calculaţi fluxul lui $\overrightarrow{V} = (2xy, -y^2 - z, 2z + 1)$ prin $S(0, R)$.

54. Fie $K = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ z \geq 0\}$ şi $\Sigma = \partial K$. Fie $\overrightarrow{V} = (x^2 + z^2, -2xy, x + 3z)$. Calculaţi fluxul lui $\overrightarrow{V}$ prin Σ.

55. Fie $\overrightarrow{r} = (x, y, z)$, $r = ||\overrightarrow{r}||$, $\overrightarrow{E} = \frac{q}{4\pi} \frac{\overrightarrow{r}}{r^3}$.

    a) Calculaţi fluxul lui $\overrightarrow{E}$ prin $S(0, R)$.

    b) Calculaţi fluxul lui $\overrightarrow{E}$ prin Σ, unde $\Sigma = \partial K$, K e un compact cu $0 \notin \Sigma$.

56. Fie $\Sigma = \{(x, y, z) \mid z = 3 - x^2 - y^2,\ z \leq 1\} \cup \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 2,\ z = 1\}$. Calculaţi fluxul lui $\overrightarrow{V} = (y, x, -z)$ prin Σ.

57. Fie K un compact şi $\Sigma = \partial K$. Arătaţi că $\mathrm{Vol}(K) = \frac{1}{3}\,\mathrm{Flux}_\Sigma\,\vec{r}$, unde $\vec{r} = (x, y, z)$.

58. Calculaţi:

    a) $\int_\gamma \overrightarrow{V} d\vec{r}$, unde $\overrightarrow{V} = (2z, -x, x)$ şi $\gamma : \{z^2 = x^2 + y^2, z = 1$.

    b) $\int_\gamma \overrightarrow{V} d\vec{r}$, unde $\overrightarrow{V} = (y - x, z - x, x - y)$ şi $\gamma : \{x^2 + y^2 + z^2 = 4, z = 1$.

    c) $\int_\gamma x\,\mathrm{dx} + (x + y)\,\mathrm{dy} + (x + y + z)\,\mathrm{dz}$, unde $\gamma :\ \{x^2 + y^2 = R^2,\ z = x + y$.

    d) $\int_\gamma z(z - y)\,\mathrm{dx} + xz\,\mathrm{dy} - xy\,\mathrm{dz}$, unde $\gamma = \partial S$, $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ x, y, z \geq 0\}$.

    e) $\int_\gamma y(y + 2z)\,\mathrm{dx} + 2x(y + z)\,\mathrm{dy} + 2xy\,\mathrm{dz}$, unde $\gamma :\ \{x^2 + y^2 = z^2,\ x^2 + y^2 = 2x$.

59. Fie $a, b, c > 0$, $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ şi $\gamma = [AB] \cup [BC] \cup [CA]$. Calculaţi $\int_\gamma (z - y)\,\mathrm{dx} + (x - z)\,\mathrm{dy} + (y - x)\,\mathrm{dz}$.

60. Fie Σ o suprafaţă cu frontiera $\gamma = \partial\sigma$. Fie $\vec{n}$ versorul normalei la Σ, $\vec{r} = (x, y, z)$ şi $\vec{c}$ un vector constant. Fie $\overrightarrow{V} = (\vec{c} \cdot \vec{r})\vec{r}$. Arătaţi că $\int_\gamma \overrightarrow{V} \cdot d\vec{r} = \int_\Sigma \vec{c}(\vec{r} \times \vec{n}) d\sigma$.

Capitolul 3

Analiză complexă şi transformate integrale

3.1 Mulţimea numerelor complexe

Muţimea numerelor complexe este:

$$\mathbb{C} := \{x + yi \mid x, y \in \mathbb{R}\} \equiv \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2.$$

Pe mulţimea numerelor complexe avem operaţiile $+$ şi $\cdot$ definite astfel:

$$z + z' = (x + yi) + (x' + y'i) = (x + x') + (y + y')i,$$
$$z \cdot z' = (x + yi) \cdot (x' + y'i) = (xx' - yy') + (xy' + x'y)i.$$

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ are structură de corp comutativ, care extinde corpul numerelor reale $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. În particular, $\mathbb{C}$ are structură de spaţiu vectorial real cu $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$, o bază fiind $\{1, i\}$.

Fie $z = x + yi \in \mathbb{C}$. *Partea reală* a lui z e $\operatorname{Re} z = x$, iar *partea imaginară* e $\operatorname{Im} z = y$. *Conjugatul* lui z este $\bar{z} = x - yi$. *Modulul* lui z este $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Proprietăţi utile:

1. $|z| \geq 0,\ |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0.$
2. $|zz'| = |z||z'|,\ (\forall) z, z' \in \mathbb{C}.$
3. $|z + z'| \leq |z| + |z'|,\ (\forall) z, z' \in \mathbb{C}.$
4. $|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2),\ (\forall) z, z' \in \mathbb{C}.$
5. $z \cdot \bar{z} = |z|^2,\ z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z,\ (\forall) z \in \mathbb{C}.$
6. $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2},\ (\forall) z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$

Observaţia 3.1.1. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel (comutativ unitar). O submulţime nevidă $I \subseteq A$ se numeşte *ideal*, dacă $(\forall)x, y \in I \Rightarrow x + y \in I$, $(\forall)x \in I$, $a \in A \Rightarrow xa \in I$. De exemplu, $n\mathbb{Z} = (n) = \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$ este un ideal în $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. Dacă $f \in K[X]$ este un polinom, atunci $(f) = \{fg \ : \ g \in K[X]\}$ este idealul generat de f.

Fie A un inel şi $I \subseteq A$ un ideal. Relaţia $\sim$ definită prin $a \sim b \Leftrightarrow b - a \in I$ este o relaţie de echivalenţă pe A. Mulţimea cât se notează $A/I = \{\hat{a} \mid a \in A\}$. Pe A/I se definesc operaţiile $\hat{a} + \hat{b} = \widehat{a + b}$, $\hat{a} \cdot \hat{b} = \widehat{a \cdot b}$, $(\forall)\hat{a}, \hat{b} \in A/I$. $(A/I, +, \cdot)$ are structură de inel comutativ unitar. De exemplu, $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Teoremă 3.1.2. *(Teorema fundamentală a algebrei) Corpul* $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *este algebric închis, adică, orice polinom* $f \in \mathbb{C}[X]$ *neconstant are cel puţin o rădăcină complexă.*

Corolarul 3.1.3. *Dacă* $f \in \mathbb{C}[X]$ *e un polinom de grad* $n \geq 1$, $f = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$, *atunci* $f = a_n(X - z_1)(X - z_2) \cdots (X - z_n)$, *unde* $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ *sunt rădăcinile lui* f, *nu neapărat distincte.*

Corolarul 3.1.4. *Orice polinom* $f \in \mathbb{R}[X]$ *se descompune în produs de polinoame de gradul* 1 *şi* 2 *(cu* $\Delta < 0$*).*

Observaţia 3.1.5. Corolarul 3.1.4 nu poate fi folosit pentru a arăta că orice polinom de grad impar $f \in \mathbb{R}[X]$ are cel puţin o rădăcină reală, deoarece această proprietate este folosită implicit în demonstrarea teoremei fundamentale a algebrei. *Nu există o demonstraţie pur algebrică a teoremei fundamentale a algebrei!* O demonstraţie care face uz de analiza complexă va fi dată ulterior, în secţiunea 6.

Numărul complex $z = x + iy \in \mathbb{C}$ are *forma trigonometrică* $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$. *Argumentul* lui z este mulţimea

$$\operatorname{Arg} z = \{\theta \in \mathbb{R} \ : \ z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)\}.$$

Argumentul principal al lui z este numărul $\arg z$ definit prin

$$\operatorname{Arg} z \cap (-\pi, \pi] = \{\arg z\}.$$

Se verifică uşor că $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi\mathbb{Z}$.

Dacă $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ şi $z' = |z'|(\cos\theta' + i\sin\theta')$, atunci:

$$z \cdot z' = |z||z'|(\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')),$$
$$z^n = |z|^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)), \ (\forall)n \geq 1.$$

Ecuaţia $z^n = w = |w|(\cos\theta + i\sin\theta)$, $n \geq 1$, are n rădăcini complexe:

$$z_k = \sqrt[n]{|w|}(\cos(\frac{2k\pi + \theta}{n}) + i\sin(\frac{2k\pi + \theta}{n})), \ 0 \leq k \leq n - 1.$$

Exerciţii

1. a) Arătaţi că mulţimea $\{\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ are structură de corp comutativ, izomorf cu $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

   b) Arătaţi că $\mathbb{R}[X]/(X^2+1) \cong \mathbb{C}$.

2. Determinaţi automorfismele $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, invariante pe $\mathbb{R}$, cu alte cuvinte $f(x) = x,\ (\forall) x \in \mathbb{R}$.

3. Fie $U_n := \{z \in C \mid z^n = 1\} = \{\cos(\frac{2\pi k}{n}) + i\sin(\frac{2\pi k}{n}) \mid 0 \leq k \leq n-1\}$. Arătaţi că $(U_n, \cdot) \cong (\mathbb{Z}_n, +)$.

4. Rezolvaţi ecuaţiile:

   a) $z^2 + 2z + 5 = 0$

   b) $z^2 = -3 - 4i$

   c) $(1+i)z^2 - 2iz + (1-i) = 0$

   d) $z^4 - z^2 + 1 = 0$

   e) $z^6 = -1$

   f) $z^3 + 2 - 2i = 0$

   g) $z^4 = 8 - 8i$.

   h) $z^8 - 1 = 0$.

5. Reprezentaţi grafic mulţimile:

   a) $|z| = 2$

   b) $|z - 1 + 2i| < 3$

   c) $1 < |z - 2i| < 2$

   d) $\mathrm{Im}(z) > 0$

   e) $\{\mathrm{Re}\, z \leq 0\} \cap \{\mathrm{Im}\, z \geq 0\}$

   f) $|z - 2i| = |2z + 1|$

   g) $|z - 2| < 2|z - 1|$

   h) $|z - 1| + |z + 1| = 4$

   i) $|z - 2i| - |z + 2i| = 2$

   j) $\mathrm{Re}(z^2) < 4$.

6. Fie $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ distincte.

   a) Arătaţi că z_1, z_2, z_3 sunt coliniare $\Leftrightarrow (z_2 - z_1)(\bar{z}_3 - \bar{z}_1) \in \mathbb{R}$.

   b) Arătaţi că $(z_1, z_2) \perp (z_3, z_4) \Leftrightarrow (z_2 - z_1)(\bar{z}_4 - \bar{z}_3) \in i\mathbb{R}$.

3.2 Şiruri şi serii de numere complexe.

Definiţia 3.2.1. *O funcţie $z : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $z(n) = z_n$, se numeşte şir de numere complexe (sau funcţie aritmetică). Notăm şirul prin $(z_n)_{n\geq 0}$.*

Spune că şirul $(z_n)_n$ converge la $z \in \mathbb{C}$, dacă:

$$(\forall)\varepsilon > 0,\ (\exists)n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \textit{astfel încât}\ (\forall)n \geq n_\varepsilon,\ |z_n - z| < \varepsilon.$$

Un şir care nu este convergent se numeşte divergent.

Spunem că $\lim_n z_n = \infty$ dacă $\lim_n |z_n| = \infty$.

Observaţia 3.2.2. Mulţimea $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ se numeşte sfera lui Riemann. Terminologia este dată de faptul că $\overline{\mathbb{C}}$ poate fi pusă în bijecţie cu o sferă prin proieţia stereografică din polul nord $N(0,0,1)$ al sferei $S^2 = \{x^2+y^2+z^2 = 1\}$. Notăm $\Phi : S^2 \to \overline{\mathbb{C}}$ şi o definim astfel: Dat un punct $P \in S^2 \setminus \{N\}$, dreapta PN intersectează planul $\{(x,y,0)\ |x,y \in \mathbb{R}\}$, identificat cu $\mathbb{C}$, într-un punct unic determinat Q. Definim $\Phi(P) = Q$. De asemenea, $\Phi(N) = \infty$.

Propoziţia 3.2.3. *Fie $(z_n)_n$ un şir de numere complexe. Notăm $z_n = x_n + y_n i$, $n \geq 0$. Atunci $(z_n)_n$ este convergent dacă şi numai dacă $(x_n)_n$ şi $(y_n)_n$ sunt convergente. Mai mult, în acest caz avem: $\lim_n z_n = \lim_n x_n + i \lim_n y_n$.*

Definiţia 3.2.4. *Fie $(z_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere complexe. Şirul sumelor parţiale asociat $(S_n)_n$ este definit prin $S_n = \sum_{k=0}^n z_k$, $n \geq 0$. Se numeşte serie de numere complexe, perechea $((z_n)_n, (S_n)_n)$, pe care o notăm prin $\sum_{n=0}^\infty z_n$.*

Spunem că seria $\sum_{n=0}^\infty z_n$ este convergentă dacă şirul $(S_n)_n$ este convergent. Altfel, spunem că seria e divergentă.

Spunem că seria $\sum_{n=0}^\infty z_n$ are suma $S \in \overline{\mathbb{C}}$, dacă $(\exists) \lim_n S_n = S$. Notăm $S = \sum_{n=0}^\infty z_n$. Observaţie, notaţia $\sum_{n=0}^\infty z_n$ are două înţelesuri diferite, care rezultă din context.

Propoziţia 3.2.5. *Fie $z_n = x_n + y_n i$, $n \geq 0$, unde $x_n, y_n \in \mathbb{R}$. Atunci, seria $\sum_{n=0}^\infty z_n$ este convergentă dacă şi numai dacă seriile $\sum_{n=0}^\infty x_n$ şi $\sum_{n=0}^\infty y_n$ sunt convergente. În plus, în acest caz avem $\sum_{n=0}^\infty z_n = \sum_{n=0}^\infty x_n + i \sum_{n=0}^\infty y_n$.*

Demonstraţie. Rezultă imediat din Propoziţia 3.2.3. □

Definiţia 3.2.6. *Fie $(z_n)_n$, $z_n \in \mathbb{C}$, un şir de numere complexe. Spunem că $(z_n)_n$ converge la $z \in \mathbb{C}$, dacă $(\forall)\epsilon > 0$, $(\exists)n_\epsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $(\forall)n \geq n_\epsilon$, $|z_n - z| < \epsilon$.*

Propoziţia 3.2.7. *Fie $(z_n)_n$, $z_n = x_n + iy_n$ cu $x_n, y_n \in \mathbb{R}$. Atunci $(z_n)_n$ este convergent $\Leftrightarrow$ $(x_n)_n$ şi $(y_n)_n$ sunt convergente. Mai mult*

$$\lim_n (z_n) = \lim_n (x_n + iy_n) = \lim_n x_n + i \lim_n y_n.$$

Definiţia 3.2.8. *Fie $(z_n)_n$, $n \geq 0$, un şir de numere complexe. Considerăm $(s_n)_n$, $s_n = \sum_{k=0}^{n} z_k$, şirul sumelor parţiale asociat. Perechea $((z_n)_n, (s_n)_n)$ se numeşte serie de numere complexe şi se notează cu $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$. Seria se numeşte convergentă, dacă $(s_n)_n$ converge la $s \in \mathbb{C}$. În acest caz, s se numeşte suma seriei, şi notăm $s = \sum_{n=0}^{\infty} z_n$.*

Propoziţia 3.2.9. *Fie $(z_n)_n$, $z_n = x_n + iy_n$ cu $x_n, y_n \in \mathbb{R}$. Atunci $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ e convergentă $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ şi $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ sunt convergente. Mai mult*
$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty}(x_n + iy_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + i\sum_{n=0}^{\infty} y_n$.

Definiţia 3.2.10. *Spunem că seria $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ este* absolut convergentă*, dacă $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ este convergentă.*

Propoziţia 3.2.11. *Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ este absolut convergentă (AC), atunci ea este convergentă. Reciproca nu e adevărată, în general.*

Exemplul 3.2.12. (1) Fie $z_n = \frac{n(2+i)^n}{3^n}$, $n \geq 0$. Avem $|z_n| = n\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^n$. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ este convergentă (criteriul raportului), deci şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ este convergentă.

(2) Fie $z_n = \frac{1+i(-1)^n}{n^2}$, $n \geq 1$. Avem $z_n = x_n + iy_n$, unde $x_n = \frac{1}{n^2}$, $y_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Cum $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (armonică) şi $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ (alternantă) sunt convergente, rezultă că $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ este convergentă. Pe de altă parte, $|z_n| = \frac{\sqrt{1+n^2}}{n^2} > \frac{1}{n}$, deci $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ nu este AC.

Exerciţii

1. Calculaţi:

   a) $\lim_n \frac{n+in^2\sin(\frac{1}{n})}{2+ni}$.

   b) $\lim_n[(\frac{2n}{2n+1})^n + (2^{\frac{1}{n}} - 1)ni]$.

2. Studiaţi absolut convergenţa şi convergenţa seriilor:

   a) $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{1+2i})^n$

   b) $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n^2} + (-1)^n \sin\frac{1}{\sqrt{n}}i]$.

   c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+ni}{n^2-i\sqrt{n+1}}$.

   d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2+i)^n}{3^n}$.

   e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2i}$.

   f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+i)\sqrt{n}}$.

   g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1+n^2}}{n^2-i(-1)^n n^3}$.

   h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, $z \in \mathbb{C}$.

3.3 Funcţii complexe. Funcţii olomorfe.

Reamintim că folosim identificarea $\mathbb{C} \ni z = x + yi \equiv (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Fie $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ o funcţie de variabilă complexă. Putem considera $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Avem

$$f(z) = f(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) = u(x, y)+v(x, y)i, \ (\forall)z = x+yi = (x, y) \in D,$$

unde $u, v : D \to \mathbb{R}$. Notăm:

- $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y) =$ partea reală a lui f,
- $\operatorname{Im} f(z) = v(x, y) =$ partea imaginară a lui f.

Presupunem că $f \in C^1(D)$, adică u şi v au derivate parţiale continue. Definim:

- $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} i$, derivata parţială a lui f în raport cu x.
- $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} i$, derivata parţială a lui f în raport cu x.
- $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} i)$ derivata parţială a lui f în raport cu z.
- $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} i)$ derivata parţială a lui f în raport cu $\bar{z}$.

Definiţia 3.3.1. *Fie $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ şi $z_0 \in D$. Funcţia f se numeşte* $\mathbb{C}$-derivabilă *în z_0 dacă există*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \in \mathbb{C}.$$

$f'(z_0)$ este derivata *lui f în z_0. Funcţia f se numeşte* olomorfă *($\mathbb{C}$-derivabilă) pe D dacă este $\mathbb{C}$-derivabilă în orice punct din D.*

Propoziţia 3.3.2. *(Relaţiile Cauchy-Riemann) Fie $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f = u + vi \in C^1(D)$, şi $z_0 \in D$. U.A.S.E.:*

1. *f este $\mathbb{C}$-derivabilă în z_0 (olomorfă pe D).*
2. *$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)$ ($\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$).*

Propoziţia 3.3.3. *Fie $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f = u + vi \in C^1(D)$. Atunci:*

1. *f este $\mathbb{C}$-derivabilă în z_0 (olomorfă) dacă şi numai dacă $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$ ($\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$).*
2. *Dacă f este olomorfă, atunci $f' = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} = i\frac{\partial f}{\partial y}$.*

3. *Dacă f este olomorfă, atunci u şi v sunt armonice, i.e. $\Delta u = \Delta v = 0$, unde Δ este Laplacianul.*

Propoziţia 3.3.3 admite următoarea reciprocă:

Propoziţia 3.3.4. *Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu simplu conex. Dacă $u : D \to \mathbb{R}$, $u \in C^2(D)$, este armonică, atunci există $f : D \to \mathbb{C}$ olomorfă astfel încât $\operatorname{Re} f = u$.*

Similar, dacă $v : D \to \mathbb{R}$, $u \in C^2(D)$, este armonică, atunci există $f : D \to \mathbb{C}$ olomorfă astfel încât $\operatorname{Im} f = v$.

Teoremă 3.3.5. *Dacă $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ este olomorfă, atunci $f' : D \to \mathbb{C}$ este olomorfă.*

Propoziţia 3.3.6. *Similar cu cazul funcţiilor de o variabilă reală, avem:*

1. $(f + g)' = f' + g'$.
2. $(f \cdot g)' = f'g + fg'$.
3. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.
4. $(g \circ f)' = (g' \circ f)f'$.

De asemenea, operatorii $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ au proprietăţile uzuale ale unor derivate parţiale cu perechile de variabile (x, y), respectiv $(z, \bar{z})$ independente.

Funcţia exponenţială $exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ se defineşte prin:

$$\exp(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Propoziţia 3.3.7. *Funcţia* $\exp : (\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}^*, \cdot)$ *este un morfism surjectiv de grupuri şi* $\operatorname{Ker}(\exp) = 2\pi i\mathbb{Z}$. *De asemenea, avem identitatea lui Euler:* $e^{\pi i} + 1 = 0$.

Funcţiile trigonometrice $\cos, \sin, \operatorname{ch}, \operatorname{sh} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se definesc prin:

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}),\ \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}),$$
$$\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}),\ \operatorname{sh} z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}).$$

Pentru $\cos z \neq 0$, se defineşte funcţia tangentă $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$.
Pentru $\sin z \neq 0$, se defineşte funcţia cotangentă $\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$.
Similar se definesc tangenta şi cotangenta hiperbolice, $\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$, $\operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$.

Propoziţia 3.3.8. *Funcţiile trigonometrice complexe verifică aceleaşi proprietăţi cu cele ale funcţiilor reale corespunzătoare, i.e.* $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$, $\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$, $(\sin z)' = \cos z$ *etc. În plus, avem de exemplu identităţile:*

$$\cos z = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y,\ \sin z = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y.$$

Funcţii multiforme. Ramuri continue (olomorfe).

O funcţie multiformă, este o funcţie F definită pe un domeniu $D \subset \mathbb{C}$ pentru care $F(z)$ este o submulţime în $\mathbb{C}$. De obicei, $F(z)$ este o mulţime discretă (finită sau numărabilă făra puncte de acumulare). O ramură continuă (olomorfă) a lui F este o funcţie $f : U \subset D \to \mathbb{C}$ continuă (olomorfă) cu $f(z) \in F(z)$, $(\forall) z \in U$.

Funcţia multiformă *argument* este definită prin:

$$\operatorname{Arg}(z) = \{\theta \in \mathbb{R} \mid z = |z|e^{i\theta} = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)\},\ z \in \mathbb{C}^*$$

Argumentul principal $\arg : \mathbb{C}^* \to (-\pi, \pi]$ este definit prin $\operatorname{Arg}(z) \cap (-\pi, \pi] = \{\arg(z)\}$. De observat că arg nu este continuă pe $\mathbb{C}^*$, dar restricţia sa pe domeniul $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ este.

Funcţia multiformă *logaritm* este definită prin:

$$\operatorname{Ln}(z) = \ln|z| + i \operatorname{Arg}(z),\ z \in \mathbb{C}^*.$$

O ramură olomorfă a logaritmului este $\ln : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \to \mathbb{C}$, $\ln(z) = \ln|z| + i\arg(z)$, care extinde funcţia logaritm natural uzuală definită pe $(0, \infty)$ şi are proprietăţi similare.

Cu ajutorul funcţiei multiforme logaritm, se pot defini următoarele funcţii multiforme:

1. $z^\alpha := e^{\alpha \operatorname{Ln} z}$, unde $\alpha \in \mathbb{C}$ şi $z \neq 0$. (funcţia putere)
2. $\sqrt[n]{z} := e^{\frac{1}{n}\operatorname{Ln} z}$, $z \neq 0$ şi $\sqrt[n]{0} = 0$. (funcţia radical)
3. $\operatorname{Arcsin}(z) = -i \operatorname{Ln}(iz \pm \sqrt{1 - z^2}), z \in \mathbb{C}$.
4. $\operatorname{Arccos}(z) = -i \operatorname{Ln}(z \pm \sqrt{z^2 - 1}), z \in \mathbb{C}$.
5. $\operatorname{Arctg}(z) = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln}(\frac{i-z}{i+z}), z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$.
6. $\operatorname{Arcctg}(z) = \frac{i}{2} \operatorname{Ln}(\frac{z-i}{z+i}), z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$.
7. $\operatorname{Arcsh}(z) = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1}), z \in \mathbb{C}$.
8. $\operatorname{Arcch}(z) = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}), z \in \mathbb{C}$.
9. $\operatorname{Arcth}(z) = \frac{1}{2} \operatorname{Ln}(\frac{1-z}{1+z}), z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$.
10. $\operatorname{Arccth}(z) = \frac{1}{2} \operatorname{Ln}(\frac{z-1}{z+1}), z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$.

Definiţia 3.3.9. *O funcţie* $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ *de forma* $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ *cu* $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ *şi* $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ *se numeşte transformare omografică. Observaţie:* $f(\infty) = \frac{a}{c}$ *şi* $f(-\frac{d}{c}) = \infty$.

f este olomorfă pe $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{\frac{-d}{c}\}$. f este bijectivă şi f^{-1} este o transformare omografică.

Exerciţii

1. Determinaţi domeniile de definiţie ale funcţiilor tg, ctg, th, cth.

2. Fie $f(z) = z^2 + i\bar{z} - 1$. Determinaţi $\mathrm{Re}(f(z))$ şi $\mathrm{Im}(f(z))$. Calculaţi $\frac{\partial f}{\partial z}$ şi $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$.

3. Să se determine a, b, c, d astfel încât $f(z) = x^2 + axy + by^2 + i(cx^2 + dxy + y^2)$ să fie olomorfă.

4. Fie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = |z|$. Arătaţi că f nu e $\mathbb{C}$-derivabilă în nici un punct din $\mathbb{C}$ si calculaţi $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ şi $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$.

5. În ce puncte, funcţia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = |z|^2$ este $\mathbb{C}$-derivabilă?

6. Fie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2 + z\bar{z} - \bar{z}^2 + 2z - \bar{z}$. Determinaţi punctele în care f este $\mathbb{C}$-derivabilă.

7. Folosind relaţiile Cauchy-Riemann, arătaţi că următoarele funcţii sunt olomorfe şi calculaţi derivatele lor:

   a) $f(z) = z^2 - iz + 1$ pe $\mathbb{C}$

   b) $f(z) = z - \frac{1}{z}$ pe $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

   c) $f(z) = e^{iz} + z^2$.

8. Fie $u(x, y) = e^{2x} \cos(2y) + xy$. Arătaţi că u e armonică pe $\mathbb{R}^2$ şi găsiţi $f = u + vi$ olomorfă cu $f(0) = 1 + i$.

9. Fie $v(x, y) = x^3 - 3xy^2$. Găsiţi $f = u + vi$ olomorfă cu $f(1) = i$.

10. Fie $u(x, y) = e^y \sin x + x^2 - y^2$. Găsiţi $f = u + vi$ olomorfă cu $f(0) = i$.

11. Fie $v(x, y) = \Phi(x^2 - y^2)$. Determinaţi $\Phi \in C^2(\mathbb{R})$ pentru care v e armonică pe $\mathbb{R}^2$ şi găsiţi $f = u + vi$ olomorfă cu $f(0) = 1$, $f(1) = 1 + i$.

12. Fie $v(x, y) = \frac{y}{(x+1)^2+y^2}$, $x > 0$. Găsiţi $f = u + vi$ olomorfă cu $f(1) = 2$.

13. Fie $u(x,y) = \ln(x^2+y^2)+2x-y$, $x>0$. Găsiţi $f = u+vi$ olomorfă cu $f(1) = 2$.

14. Fie $u(x,y) = \operatorname{arctg}(\frac{x}{y})$, $x,y>0$. Găsiţi $f = u+vi$ olomorfă cu $f(1) = i$.

15. Fie $v(x,y) = e^x \sin y + \frac{x}{x^2+y^2}$. Găsiţi $f = u+vi$ olomorfă cu $f(1) = e+i$.

16. Fie $u(x,y) = e^x(x\cos y - y\sin y)$. Găsiţi $f = u+vi$ olomorfă cu $f(0) = 0$.

17. Fie $u(x,y) = x + \frac{x}{x^2+y^2}$, $x<0$. Găsiţi $f = u+vi$ olomorfă cu $f(1) = 2$.

18. Fie $v(x,y) = xy - \frac{2y}{x^2+y^2}$, $y<0$. Găsiţi $f = u+vi$ olomorfă cu $f(-i) = 3i$.

19. Calculaţi:

    a) $\sin(1+i)$

    b) $tg(\frac{\pi}{4} - 2i)$

    c) i^i

    d) $\ln(-2)$

    e) $\operatorname{th}(\ln(2) + \frac{\pi i}{3})$

    f) $\ln(1+3i)$,

    g) $\operatorname{sh}(1-i)$

    h) $\operatorname{Arccos}(i)$

20. Rezolvaţi ecuaţiile:

    a) $e^z = -2i+1$

    b) $\cos(z) = -2$

    c) $\sin(z) = i\sqrt{3}$

    d) $\operatorname{ch}(z) = 1+i$.

21. Fie $D = \{|z| < 1\}$ şi $H = \{\operatorname{Im} z > 0\}$. Determinaţi o transformare omografică $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ cu proprietatea că $f(D) = H$.

3.4 Serii de puteri şi Laurent. Reziduuri.

Definiţia 3.4.1. *Fie $z_0 \in \mathbb{C}$ şi $(a_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere complexe. Se numeşte serie de puteri centrată în z_0, o serie de forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, unde $z \in \mathbb{C}$.*

Raza de convergenţă *R a seriei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ este definită prin*

$$\frac{1}{R} = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} \text{ sau, echivalent, prin:}$$

$$R = \lim_n \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_n \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \in [0, +\infty],$$

în caz că limitele respectivă există.

Teoremă 3.4.2. *(Abel) Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ o serie de puteri cu raza de convergenţă R. Atunci:*

1. *Seria este A.C. pe $|z-z_0| < R$.*

2. *Seria este divergentă pe $|z-z_0| > R$.*

3. *Seria este uniform convergentă pe $K \subset \{|z-z_0| < R\}$ compact.*

4. *Suma seriei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ defineşte o funcţie olomorfă pe $|z-z_0| < R$. Mai mult, $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$ pe $|z-z_0| < R$.*

Propoziţia 3.4.3. *Dacă $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ este olomorfă în z_0, i.e. olomorfă pe U deschis cu $z_0 \in U$, atunci f este analitică în z_0, adică există $R > 0$ astfel încât:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \ (\forall)z \text{ cu } |z-z_0| < R, \quad \text{unde } a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Mai mult, putem presupune că $R =$ raza de convergenţă a seriei de puteri. În particular, dacă $R = +\infty$, egalitatea are loc pentru orice $z \in \mathbb{C}$.

Teoremă 3.4.4. *(Teorema de identitatea a funcţiilor olomorfe) Fie $D \subset \mathbb{C}$ un deschis conex şi fie $f, g : D \to \mathbb{C}$ două funcţii olomorfe. Prespunem că există $S \subset D$ o submulţime care conţine cel puţin un punct de acumulare (adică există $w \in D$ şi un şir $(z_n)_n$ cu $z_n \in S$, $z_n \neq a$, $(\forall)n \geq 0$, astfel încât $\lim_n z_n = w$) astfel încât $f(z) = g(z), (\forall)z \in S$. Atunci funcţiile f şi g coincid pe D.*

Observaţia 3.4.5. Analiza complexă este fundamental diferită de cea reală. Dacă o funcţie reală f este derivabilă, este posibil ca derivata sa să nu fie nici măcar continuă. Însă derivata unei funcţii olomorfe f este la rândul său olomorfă, ba, mai mult, analitică. Există funcţii reale de clasă C^∞ care nu sunt analitice. de exemplu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, este de clasă C^∞ în 0, dar nu este analitică în 0. Avem $f^{(n)}(0) = 0$, $(\forall)n \geq 0$, deci seria Taylor a lui f în jurul lui 0 este $T(x) = 0$. Prin urmare, $f(x) = T(x) \Leftrightarrow x = 0$.

Definiţia 3.4.6. *Fie $z_0 \in \mathbb{C}$. Se numeşte* serie Laurent *centrată în z_0, o serie de forma*

$$L(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

Prima serie din dreapta $P(z)$ se numeşte partea principală iar cea de-a doua $T(z)$ se numeşte partea Taylor, a seriei $L(z)$.

$r = \limsup_n \sqrt[n]{|a_{-n}|} \in [0, \infty]$ *şi* $R = \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}}$ *sunt razele de convergenţă pentru $P(z)$, respectiv $T(z)$. Avem* $r = \lim_n \frac{|a_{-n-1}|}{|a_{-n}|} = \lim_n \sqrt[n]{|a_{-n}|}$ *şi* $R = \lim_n \frac{|a_{n-1}|}{|a_n|} = \frac{1}{\lim_n \sqrt[n]{|a_n|}}$, *în caz că limitele respective există.*

Teoremă 3.4.7. *Fie $L(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ o serie Laurent. Atunci:*

1. *$L(z)$ este absolut convergentă pe $r < |z - z_0| < R$.*
2. *$L(z)$ este divergentă pe $|z - z_0| < r$ şi $|z - z_0| > R$.*
3. *$L(z)$ este uniform convergentă pe compacţii din $r < |z - z_0| < R$.*
4. *$L(z)$ defineşte o funcţie olomorfă pe $r < |z - z_0| < R$.*

Definiţia 3.4.8. *Fie $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă. Un punct $z_0 \in \mathbb{C}$ se numeşte punct singular izolat pentru f, dacă există $U \subset D$ deschis cu $z_0 \in U$ astfel încât f este olomorfă pe $U \setminus \{z_0\}$ şi f nu este definită în z_0.*

Fie z_0 un punct singular izolat al lui f. Atunci:

- *z_0 este pol, dacă $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$.*
- *z_0 este pol aparent, dacă $\lim_{z\to z_0} f(z) = w \in \mathbb{C}$.*
- *z_0 este singularitate esenţială, dacă nu există $\lim_{z\to z_0} f(z)$.*

Propoziţia 3.4.9. *Fie $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă.*

1. *$z_0 \in \mathbb{C}$ este pol pentru f dacă şi numai dacă există $R > 0$ astfel încât*

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \ (\forall) z \text{ cu } 0 < |z-z_0| < R.$$

   Dacă $a_{-m} \neq 0$, m se numeşte ordinul polului z_0.

2. *Cel mai mic număr natural m pentru care $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z) \in \mathbb{C}$ este ordinul polului z_0 al lui f.*

3. *Dacă z_0 este un pol aparent pentru f, atunci f se poate prelungi olomorf în z_0.*

4. *z_0 este singularitate esenţială dacă şi numai dacă există $R > 0$ astfel încât*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \ (\forall) z \text{ cu } 0 < |z-z_0| < R,$$

   cu o infinitate de termeni a_{-n}, $n \in \mathbb{N}$, nenuli.

Definiţia 3.4.10. *Fie $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă şi $z_0 \in \mathbb{C}$ un punct singular izolat pentru f. Se numeşte* reziduul *lui f în z_0, coeficientul a_{-1} din dezvoltarea Laurent a lui f în jurul lui z_0. Notăm:*

$$\operatorname{Rez}(f(z), z_0) := a_{-1}.$$

Dacă există $r > 0$ cu $\{|z| > r\} \subset D$, reziduul lui f la infinit este

$$\operatorname{Rez}(f(z), \infty) := -\operatorname{Rez}(\frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z}), 0).$$

Propoziţia 3.4.11. *Fie $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfă şi z_0 un pol a lui f. Atunci:*

1. *Dacă z_0 e pol de ordin $m \geq 1$, atunci $\operatorname{Rez}(f(z), z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0}((z-z_0)^m f(z))^{(m-1)}$.*

2. *Dacă $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ cu g, h olomorfe în z_0, $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0)$ şi $h'(z_0) \neq 0$, atunci z_0 este pol de ordin 1 al lui f şi $\operatorname{Rez}(f(z), z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$.*

Exerciţii

1. Fie $f(z) = \frac{1}{z^3 - 6z^2 + 11z - 6}$. Determinaţi dezvoltarea în serie de puteri a lui f în jurul lui $z_0 = 0$ şi dezvoltarea în serie Laurent a lui f a) în jurul lui $z_1 = 1$, b) pe $1 < |z| < 2$, c) pe $2 < |z| < 3$, d) pe $|z| > 3$.

2. Fie $f(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z^2+4)}$. Dezvoltări pe a) $|z| < 1$, b) $1 < |z| < 2$, c) $|z| > 2$. $\text{Rez}(f, \infty)$?

3. Dezvoltarea în serie Laurent pentru $f(z) = \sin(\frac{z}{1-z})$, în jurul lui $z_1 = 1$. $\text{Rez}(f, 1) =$?

4. Dezvoltarea în serie Laurent pentru $f(z) = ze^{-1/z^2}$, în jurul lui $z_0 = 0$. $\text{Rez}(f, 0) =$?

5. Fie $f(z) = \frac{1}{z \sin(z)}$. Calculaţi $\text{Rez}(f, 0)$.

6. Fie $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^n}$, $n \geq 1$. Calculaţi $\text{Rez}(f, i)$ şi $\text{Rez}(f, -i)$.

7. Fie $f(z) = \frac{1}{z(1-e^z)}$. Calculaţi $\text{Rez}(f, 0)$.

8. Fie $f(z) = \frac{z^n}{(z-3)(z^n-1)}$, $n \geq 1$. Calculaţi $\text{Rez}(f, \infty)$.

3.5 Integrale complexe şi teorema reziduurilor

Fie $\gamma : [a,b] \to D \subset \mathbb{C}$ o curbă de clasă C^1. Fie $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie complexă continuă. $f = u + vi$. Atunci integrala lui f de-a lungul lui γ este:

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{dz} := \int_\gamma (u+vi)(\mathrm{dx} + i\,\mathrm{dy}) = \int_\gamma (u\,\mathrm{dx} - v\,\mathrm{dy}) + i \int_\gamma (v\,\mathrm{dx} + u\,\mathrm{dy}).$$

Dacă $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = x(t) + y(t)i$, atunci:

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{dz} = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{dt}\,.$$

Teoremă 3.5.1. *(Cauchy) Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu simplu conex şi $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă. Fie $\gamma : [a,b] \to D$ o curbă simplă închisă, i.e. $\gamma(a) = \gamma(b)$. Atunci:*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{dz} = 0.$$

Demonstraţie. Se aplică teorema Riemann-Green şi relaţiile Cauchy-Riemann. □

Teoremă 3.5.2. *(Formula integrală Cauchy) Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu simplu conex şi $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă. Fie $\gamma : [a,b] \to D$ o curbă simplă închisă, parcursă în sens direct trigonometric. Atunci pentru orice punct a din interiorul lui γ şi $n \geq 0$ avem*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,\mathrm{dz}\,.$$

Definiţia 3.5.3. *O funcţie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfă se numeşte funcţie întreagă.*

Pentru $z_0 \in \mathbb{C}$ şi $R > 0$, notăm

$$D(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\},$$

discul deschis de rază R, cu centrul în z_0. De asemenenea, notăm

$$\overline{D}(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq R\},$$

discul închis de rază R, cu centrul în z_0.

Lemă 3.5.4. *Fie $f : \overline{D}(z_0, R) \to \mathbb{C}$ continuă şi olomorfă pe $D(z_0, R)$. Presupunem că f este mărginită, i.e. există $M > 0$ astfel încât $|f(z)| < M$, $(\forall) z \in D(z_0, R)$, şi scriem $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n (z-z_0)^n$, $(\forall) z \in D(z_0, R)$, unde $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. Atunci:*

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!M}{R^n},\ (\forall) n \geq 0, \Leftrightarrow |a_n| \leq \frac{M}{R^n},\ (\forall) n \geq 0.$$

Demonstraţie. Avem:

$$|f^{(n)}(z_0)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \, \mathrm{dz} \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_{|z-z_0|=R} | \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \, \mathrm{dz} \, | \leq$$
$$\leq \frac{n!}{2\pi} 2\pi R \frac{M}{R^{n+1}} = \frac{n! N}{R^n}.$$

□

Teoremă 3.5.5. *(Liouville) Orice funcţie întreagă mărginită este constantă.*

Demonstraţie. Fie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ întreagă şi mărginită. Fie $M := \sup_{z\in\mathbb{C}} |f(z)| \in [0, \infty)$. Fie $R > 0$. Cum f este olomorfă pe $D(0, R)$, conform Lemei 3.5.4,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ cu } |a_n| \leq \frac{M}{R^n}.$$

Cum R poate fi ales oricât de mare, rezultă că $a_n = 0$, $(\forall)n \geq 1$, deci $f(z) = a_0$ pentru orice $z \in \mathbb{C}$. □

Teoremă 3.5.6. *(Teorema fundamentală a algebrei) Orice polinom $P \in \mathbb{C}[X]$ neconstant admite cel puţin o rădăcină complexă.*

Demonstraţie. Presupunem prin reducere la absurd că $P(z) \neq 0$ pentru orice $z \in \mathbb{C}$. Atunci $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{P(z)}$, este o funcţie întreagă. Cum $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$ rezultă că f este mărginită, deci, conform Teoremei 3.5.5, este constantă. Rezultă P este constant, contradicţie. □

Teoremă 3.5.7. *(Mica teoremă a lui Picard) Dacă f este o funcţie întreagă, atunci f ia toate valorile din $\mathbb{C}$ cu excepţia a cel mult uneia. De exemplu pentru $f(z) = e^z$, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{C}^*$.*

Teoremă 3.5.8. *(Teorema reziduurilor) Fie $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă. Fie $\gamma : [a, b] \to D$ o curbă simplă închisă parcursă în sens direct trigonometric. Presupunem că $z_1, \ldots, z_n$ sunt puncte singulare izolate ale lui f conţinute în interiorul curbei γ. Atunci:*

$$\int_\gamma f(z) \, \mathrm{dz} = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Rez}(f(z), z_k).$$

Aplicaţii ale teoremei reziduurilor:

1. $\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,\mathrm{dt} = \int_{|z|=1} R(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}, \frac{z-\frac{1}{z}}{2i})\frac{1}{iz}\,\mathrm{dz}$, unde R e o funcţie raţională. $(z = e^{it})$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} R(X)\,\mathrm{dx} = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(z_k)>0} \mathrm{Rez}(R(z), z_k)$, unde $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ este o funcţie raţională cu $Q(x) \neq 0$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$, şi $\mathrm{grad}(Q) \geq \mathrm{grad}(P) + 2$.

3. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix} R(x)\,\mathrm{dx} = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(z_k)>0} \mathrm{Rez}(e^{iz}R(z), z_k)$, unde $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ este raţională cu $Q(x) \neq 0$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$, şi $\mathrm{grad}(Q) \geq \mathrm{grad}(P) + 1$.

4. Dacă în cazul anterior $R(z)$ are un pol simplu în 0, atunci la suma din dreapta se adaugă $\pi i\, \mathrm{Rez}(R(z)e^{iz}, 0)$.

Exerciţii

1. Calculaţi $\int_\gamma z^2\,\mathrm{dz}$, unde γ este segmentul care uneşte 1 cu i.

2. Calculaţi $\int_\gamma (z^2 + \bar{z})\,\mathrm{dz}$, unde $\gamma = \partial D$, $D = \{|z| \leq 4, \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$.

3. Folosind teorema reziduurilor, calculaţi:

   a) $\int_{|z-i+1|=2} \frac{z}{(z^2+4)^2}\,\mathrm{dz}$,

   b) $\int_{|z+2i|=2} \frac{\cos(\pi z/2)}{(z+i)^4}\,\mathrm{dz}$,

   c) $\int_{|z|=\sqrt{2}} \mathrm{ctg}(\pi z)\,\mathrm{dz}$,

   d) $\int_{|z|=2} \frac{e^z \sin z}{(1-z)^3}\,\mathrm{dz}$,

   e) $\int_{|z|=2} \frac{\mathrm{tg}\, z}{z^2}\,\mathrm{dz}$,

   f) $\int_{|z|=2} \frac{e^{1/z}}{1-z}\,\mathrm{dz}$.

   g) $\int_{|z-3|=1} \frac{e^{iz} - \sin z}{(z-\pi)^3}\,\mathrm{dz}$,

   h) $\int_{|z|=4} \frac{1}{z \sin z}\,\mathrm{dz}$,

   i) $\int_{|z+i|=\sqrt{6}} \frac{iz}{z^3 - 6z^2 + 11z - 6}\,\mathrm{dz}$,

   j) $\int_{|z|=r} \frac{e^{iz}}{(z-i)(z+2)}\,\mathrm{dz}$, $r > 2$.

   k) $\int_{|z|=r} \frac{\mathrm{sh}\, z}{(z^2+4)^2(z-2)}\,\mathrm{dz}$, $r > 0$ şi $r \neq 2$.

   l) $\int_{|z|=2} \frac{z^n}{(z-3)(z^n-1)}\,\mathrm{dz}$, $n \geq 1$.

4. Calculaţi integralele trigonometrice:

   a) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\sin t}\,\mathrm{dt}$,

   b) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{5-3\cos t}\,\mathrm{dt}$,

   c) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2+\cos t)^2}\,\mathrm{dt}$,

   d) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos 3t}{5+3\cos t}\,\mathrm{dt}$,

   e) $\int_0^{2\pi} \frac{1+\sin t}{2+\cos t}\,\mathrm{dt}$,

   f) $\int_0^{\pi} \frac{\cos^2 t}{2+\sin(2t)}\,\mathrm{dt}$.

5. Calculaţi integralele raţionale:

   a) $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{dx}$,

   b) $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^6+1}\,\mathrm{dx}$,

   c) $\int_0^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,\mathrm{dx}$,

   d) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+4x+5)^2}\,\mathrm{dx}$,

   e) $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4+x^2+1}\,\mathrm{dx}$,

   f) $\int_0^{\infty} \frac{x^4}{x^6+1}\,\mathrm{dx}$.

6. Calculaţi integralele:

   a) $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,\mathrm{dx}$,

   b) $\int_0^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+3}\,\mathrm{dx}$,

   c) $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+4)}\,\mathrm{dx}$,

   d) $\int_0^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x}\,\mathrm{dx}$, $a > 0$.

3.6 Serii Fourier

Rea mintim câteva definiţii din liceu. O funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numeşte:

- *pară*, dacă $f(-t) = f(t)$, $(\forall)t \in \mathbb{R}$.
- *impară*, dacă $f(-t) = -f(t)$, $(\forall)t \in \mathbb{R}$.
- *periodică*, dacă există $T > 0$ astfel încât $f(t + T) = f(t)$, $(\forall)t \in \mathbb{R}$. T se numeşte perioadă. Cea mai mică perioadă T_0, dacă există, se numeşte perioadă principală. Dacă f are o perioadă principală T_0, atunci $T > 0$ este o perioadă $\Leftrightarrow T = kT_0$, pentru un $k \in \mathbb{N}^*$.

Observaţia 3.6.1. Produsul a două funcţii pare este o funcţie pară, produsul a două funcţii impare este o funcţie pară, produsul dintre o funcţie pară şi una impară este o funcţie impară.

Exemplul 3.6.2. Funcţia $f(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}$, este pară pentru n par şi impară pentru n impar. Funcţia $\cos t$ este pară, $\sin t$ este impară, ambele fiind periodice cu perioada principală 2π. $\operatorname{tg} t$ şi $\operatorname{ctg} t$ sunt impare, periodice şi cu perioada principală π. Partea fracţionară $\{t\}$ e periodică, cu perioada principală 1. Funcţia lui Dirichlet $f(t) = \begin{cases} 1, & \in \mathbb{Q} \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, este periodică şi orice $T \in \mathbb{Q}$, $T > 0$, este o perioadă, însă f nu are o perioadă principală.

Propoziţia 3.6.3. *Fie $a > 0$ şi $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ integrabilă.*

1. *Dacă f e pară, atunci $\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{dt} = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{dt}$.*
2. *Dacă f e impară, atunci $\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{dt} = 0$.*

Definiţia 3.6.4. *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţie periodică, cu perioada 2ℓ, unde $\ell > 0$. Presupunem că f e integrabilă pe $[-\ell, \ell]$ (De exemplu, f are cel mult un număr finit de puncte de discontinuitate pe $[-\ell, \ell]$ de speţa 1). Definim:*

- $a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\cos\frac{n\pi t}{\ell}\,\mathrm{dt}$, $n \geq 0$.
- $b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\sin\frac{n\pi t}{\ell}\,\mathrm{dt}$, $n \geq 1$.

Funcţia $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi t}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi t}{\ell}),$$

se numeşte seria Fourier asociată lui f.

Dacă f este pară, atunci:

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(t)\cos\frac{n\pi t}{\ell}\,\mathrm{dt},\ (\forall)n \geq 0,\ b_n = 0,\ (\forall)n \geq 1,\ S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty a_n \cos\frac{n\pi t}{\ell}.$$

Dacă f este impară, atunci:

$$a_n = 0,\ (\forall)n \geq 0,\ b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(t)\sin\frac{n\pi t}{\ell}\,\mathrm{dt},\ (\forall)n \geq 1,\ S(t) = \sum_{n=1}^\infty b_n \sin\frac{n\pi t}{\ell}.$$

Dacă $f : [0,\ell] \to \mathbb{R}$ e integrabilă, o putem prelungi prin paritate (imparitate) la $[-\ell,\ell]$, definind $f(-t) = f(t)$ (respectiv $f(-t) = -f(t)$), $(\forall)t \in (-\ell, 0)$. Prin periodicitate, prelungim f la $\mathbb{R}$. Seria Fourier asociată se numeşte dezvoltare în cos (respectiv în sin).

Revenind la cazul general, dacă $\ell = \pi$, atunci:

$$\begin{aligned} a_n &= \tfrac{1}{\pi}\textstyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{dt},\ n \geq 0,\\ b_n &= \tfrac{1}{\pi}\textstyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{dt},\ n \geq 1\\ S(t) &= \tfrac{a_0}{2} + \textstyle\sum_{n=1}^\infty (a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)). \end{aligned}$$

Forma armonică a seriei Fourier este: $S(t) = A_0 + \sum_{n=1}^\infty A_n\cos(\frac{n\pi t}{\ell} + \varphi_n)$, unde $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, iar pentru $A_n \neq 0$, $\varphi_n \in (-\pi, \pi]$ este argumentul lui $2c_n := a_n + b_n i$, $n \geq 1$. Forma complexă a seriei Fourier este:

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi t}{\ell}},\ \text{unde } c_n = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} e^{\frac{in\pi t}{\ell}} f(t)\,\mathrm{dt},\ n \in \mathbb{Z}.$$

De observat că $c_n = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$ pentru $n \geq 0$ şi $c_{-n} = \bar{c_n} = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$ pentru $n \geq 1$. Reciproc, $a_n = 2\,\mathrm{Re}(c_n)$, $(\forall)n \geq 0$ şi $b_n = 2\,\mathrm{Im}(c_n)$, $n \geq 1$.

Teoremă 3.6.5. *(Dirichlet) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodică, cu perioada $2\ell > 0$. Presupunem că f e mărginită şi de clasă C^1 pe porţiuni, adică f e derivabilă şi cu derivata continuă pe $(-\ell, \ell)$ cu excepţia unui număr finit de puncte. Mai presupunem că f nu are puncte de discontinuitate de speţa a 2-a, i.e. există limite laterale în orice punct. Atunci*

$$S(t) = \frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0)),\ (\forall)t \in \mathbb{R},$$

unde $f(t+0) = \lim_{y\searrow t} f(y)$, $f(t-0) = \lim_{y\nearrow t} f(t)$ sunt limitele laterale ale lui f. În particular, dacă f este continuă în punctul $t \in \mathbb{R}$, atunci $f(t) = S(t)$.

Propoziţia 3.6.6. *(Identitatea lui Parseval) În condiţiile teoremei Dirichlet, avem*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^\infty (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)^2\,\mathrm{dt}\,.$$

Propoziţia 3.6.7. *(Formula integrală Fourier) Dacă f verifică condiţiile teoremei Dirichlet, atunci*

$$S(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{dz} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos(z(u-t))\,\mathrm{du}\,.$$

Exerciţii

1. Dezvoltaţi în serie Fourier $f(t) = t, t \in (-\pi, \pi]$. Deduceţi sumele unor serii numerice, explicitând $S(\frac{\pi}{2})$ şi identitatea Parseval.

2. Dezvoltaţi în serie Fourier $f(t) = |t|, t \in (-2, 2]$. $S(0) =?$.

3. Dezvoltaţi în serie Fourier $f(t) = \mathrm{sgn}(t)$, $t \in (-\ell, \ell]$. $S(0) =?$

4. Dezvoltaţi în serie Fourier $f(t) = t^2, t \in (-1, 1]$. $S(0) =?$, $S(1) =?$.

5. Dezvoltaţi în serie Fourier $f(t) = \begin{cases} 2-t, \ t \in (-1, 0) \\ t, \ t \in [0, 1] \end{cases}$. $S(0) =?$

6. Dezvoltaţi în serie Fourier $f_1(t) = \sin(2t)$, $f_2(t) = \cos(2t)$, $f_3(t) = e^{2|t|}$, $t \in (-\pi, \pi]$.

7. Dezvoltaţi în sin şi cos funcţia $f(t) = \begin{cases} 1, \ t \in [0, 1] \\ -1, \ t \in (1, 2] \end{cases}$. Calculaţi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. Folosind identitatea Parseval, calculaţi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

8. Fie $f(t) = \begin{cases} 1, \ t \in [-2, -1] \\ 0, \ t \in (-1, 1) \\ 1, \ t \in [1, 2] \end{cases}$. Dezvoltaţi în serie Fourier. Folosind identitatea Parseval, calculaţi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

9. Dezvoltaţi în sin şi cos funcţia $f(t) = \pi - t$, $t \in [0, \pi)$. $S(0) =?$

10. Dezvoltaţi în sin şi cos funcţia $f(t) = \begin{cases} 2, \ t \in [0, 1) \\ 2-t, \ t \in [1, 2) \end{cases}$. $S(1) =?$.

11. Dezvoltaţi în sin şi cos funcţia $f(t) = \begin{cases} t^2, \ t \in [0, 1) \\ 1, \ t \in [1, 2) \\ 4-t, \ t \in [2, 3) \end{cases}$.

12. Dezvoltaţi în sin şi cos funcţiile $f_1(t) = \cos(kt)$, $f_2(t) = \sin(kt)$, $f_3(t) = e^{kt}$, $t \in [0, \pi)$, $k \in \mathbb{N}^*$.

3.7 Transformata Fourier.

Definiţia 3.7.1. *Notăm* $L^1(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid |f|$ *integrabilă pe* $\mathbb{R}\}$. *Se numeşte* transformata Fourier *a funcţiei* $f \in L^1(\mathbb{R})$, *funcţia:*

$$\mathcal{F}[f] : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ \mathcal{F}[f](\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{dt}\,.$$

Dacă $f \in L^1(\mathbb{R})$ *este pară, atunci*

$$\mathcal{F}[f](\omega) = 2\int_{0}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\,\mathrm{dt},\ (\forall)\omega \in \mathbb{R},$$

se numeşte transformata Fourier *prin* cos *a lui* f.

Dacă $f \in L^1(\mathbb{R})$ *este impară, atunci*

$$\mathcal{F}[f](\omega) = -2i\int_{0}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)\,\mathrm{dt},\ (\forall)\omega \in \mathbb{R},$$

se numeşte transformata Fourier *prin* sin *a lui* f.

Teoremă 3.7.2. *(Formula de inversare Fourier) Fie* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *astfel încât* $\mathcal{F}[f] \in L^1(\mathbb{R})$. *Atunci:*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](\omega)e^{i\omega t}d\omega,\ (\forall)t \in \mathbb{R}.$$

Proprietăţile transformatei Fourier

Presupunem că $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ şi $g(t) \leftrightarrow G(\omega)$. Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $t_0, \omega_0 \in \mathbb{R}$.

1. $\alpha f + \beta g \leftrightarrow \alpha F(\omega) + \beta G(\omega)$. (liniaritate)
2. $F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$. (formula de inversare)
3. $f(\alpha t) \leftrightarrow \frac{1}{|\alpha|}F(\frac{\omega}{\alpha})$. (schimbare de scală)
4. $f(t - t_0) \leftrightarrow F(\omega)e^{-it_0\omega}$. (translaţia timpului)
5. $e^{i\omega_0 t}f(t) \leftrightarrow F(\omega - \omega_0)$. (translaţia frecvenţei)
6. $f^{(n)}(t) \leftrightarrow (i\omega)^n F(\omega)$. (derivarea în raport cu timpul)
7. $(-it)^n f(t) \leftrightarrow F^{(n)}(\omega)$. (derivarea în raport cu frecvenţa)
8. $\overline{f(t)} \leftrightarrow F(-\omega)$. (conjugarea)
9. $(f * g)(t) \leftrightarrow F(\omega)G(\omega)$, $(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$. (produsul de convoluţie)

10. $f(t)g(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}(F * G)(\omega)$. (inversarea convoluţiei)

Exemplul 3.7.3. (1) Fie $u(t) := \begin{cases} 1, \ t > 0 \\ 0, \ t = 0 \end{cases}$, $t_0 > 0$ şi $f(t) = \frac{u(t+t_0)-u(t-t_0)}{2}$.

Atunci:

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \frac{1}{2}\int_{-t_0}^{t_0} e^{-i\omega t}\,\mathrm{dt} = \frac{1}{2}\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}|_{-t_0}^{t_0} = \frac{\sin(\omega t_0)}{\omega}.$$

(2) Fie $f(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$, unde $a > 0$. Atunci:

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \int_0^{\infty} e^{-at}e^{-i\omega t}\,\mathrm{dt} = \frac{e^{-at-i\omega t}}{a+i\omega}|_0^{\infty} = \frac{1}{a+i\omega} = \frac{a}{\omega^2+a^2} - \frac{\omega}{\omega^2+a^2}i.$$

Exerciţii

1. Să se calculeze tranformata Fourier a funcţiei:

   a) $f(t) = e^{-a|t|}$, $a > 0$

   b) $f(t) = e^{-7|t+4|}$

   c) $f(t) = e^{-t^2}$

   d) $f(t) = te^{-at^2}$, $a > 0$

   e) $f(t) = \frac{\sin t}{t}$

   f) $q_T(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T}, \ |t| \leq T, \\ 0, \ |t| > T \end{cases}$

2. Calculaţi transformata Fourier a funcţiei $f(t) = \frac{1}{4}(\mathrm{sgn}(t+t_0) - \mathrm{sgn}(t - t_0))$, unde $t_0 > 0$.

3. Să se calculeze transformata Fourier a funcţiei:

   a) $f(t) = \begin{cases} \cos(\frac{t}{2}), \ |t| < \pi, \\ 0, |t| > \pi \end{cases}$

   b) $f(t) = \begin{cases} |t|, \ |t| < 1 \\ \frac{1}{2}, \ |t| = 1 \\ 0, |t| > 1 \end{cases}$

   c) $f(t) = \begin{cases} -e^{-t}, \ t \in (-1, 0) \\ e^{-t}, \ t \in [0, 1) \\ 0, |t| \geq 1 \end{cases}$

   d) $f(t) = \frac{2t-1}{t^2+1}$, $t \in \mathbb{R}$.

4. Calculaţi transformata Fourier a funcţiei $f(t) = \frac{1}{(t^2+1)^2}$ şi scrieţi reprezentarea sa integrală.

5. Calculaţi transformatele Fourier prin cos şi sin şi scrieţi reprezentările integrale corespunzătoare:

   a) $f(t) = \begin{cases} 1,\ t \in [0, a) \\ \frac{1}{2},\ t = a \\ 0, t > a \end{cases}$

   b) $f(t) = \begin{cases} t - 1,\ t \in [0, 1], \\ 0, t > 1 \end{cases}$

   c) $f(t) = \begin{cases} \sin t,\ t \in [0, \pi], \\ 0, t > \pi \end{cases}$

6. Să se rezolve ecuaţiile integrale, cu formula de inversare Fourier:

   a) $\int_0^\infty y(t)\cos(\omega t)\,\mathrm{dt} = \frac{1}{\omega^2+1}$

   b) $\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\cos(\omega t) d\omega = \varphi(t)$, unde $\varphi(t) = \begin{cases} 1 - t,\ t \in (0, 1], \\ 0, t > 1 \end{cases}$

3.8 Transformata Laplace.

Definiţia 3.8.1. *O funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ se numeşte funcţie original Laplace dacă:*

(a) $f(t) = 0$ *pentru* $t < 0$.

(b) f *este derivabilă pe porţiuni, adică mulţimea punctelor în care nu e derivabilă este discretă.*

(c) Există $M > 0$ *şi* $\sigma_0 \geq 0$ *astfel încât* $|f(t)| \leq Me^{\sigma_0 t}$, $(\forall)t \geq 0$, *adică* f *are o creştere cel mult exponenţială.*

σ_0 *se numeşte indicele de crestere al funcţiei* f.

Fie $u(t) := \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2}, & t = 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$. Dacă f verifică (b) şi (c), atunci $u \cdot f$ este original Laplace.

Definiţia 3.8.2. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *o funcţie original Laplace. Transformata Laplace a lui* f *este*

$$F = \mathcal{L}[f] : \{\operatorname{Re} s > s_0\} \to \mathbb{C},\ F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,\mathrm{dt}\,.$$

Se arată că F *este olomorfă pe* $\{\operatorname{Re} s > s_0\}$.

Exemplul 3.8.3. Pentru $\operatorname{Re} s > 0$, avem:

$$\mathcal{L}[u(t)](s) = \int_0^\infty e^{-st}\,\mathrm{dt} = \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^\infty = \frac{1}{s}.$$

Teoremă 3.8.4. *(Mellin-Fourier) Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *original Laplace cu indicele de creştere* σ_0 *şi* $F = \mathcal{L}[f]$. *Atunci:*

$$\frac{1}{2}(f(t+0) - f(t-0)) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} F(s)e^{st}ds,\ (\forall)t > 0,$$

unde $\alpha > \sigma_0$ *e arbitrar. În punctele în care* f *e continuă, putem scrie* $f(t)$ *in partea stângă.*

Corolarul 3.8.5. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *original Laplace şi* $F = \mathcal{L}[f]$. *Presupunem că* $F(s)$ *admite o prelungire olomorfă în* $\mathbb{C} \setminus \{s_1, \ldots, s_n\}$, *iar* $s_1, \ldots, s_n$ *sunt puncte singulare izolate pentru* $F(s)$. *Mai presupunem că* $\lim_{s\to\infty} |F(s)| = 0$. *Atunci:*

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Rez}(F(s)e^{st}, s_k)u(t).$$

Proprietăţile transformatei Laplace

Presupunem că $f(t) \leftrightarrow F(s)$ şi $g(t) \leftrightarrow G(s)$. Fie $a, t_0 \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

1. $\alpha f + \beta g \leftrightarrow \alpha F(s) + \beta G(s)$. (liniaritate)
2. $f(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} F(\frac{s}{a})$. (asemănare)
3. $f(t - t_0) \leftrightarrow F(s) e^{-t_0 s}$. (întârziere)
4. $e^{-ts_0} f(t) \leftrightarrow F(s + s_0)$. (deplasare)
5. $t^n f(t) \leftrightarrow (-1)^n F^{(n)}(s)$. (derivarea imaginii)
6. $f^{(n)}(t) \leftrightarrow s^n F(s) - s^{n-1} f(0+0) - s^{n-1} f'(0+0) - \cdots - f^{(n-1)}(0+0)$. (derivarea în raport cu timpul)
7. $\int_0^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{F(s)}{s}$ (integrarea originalului)
8. $\frac{f(t)}{t} \leftrightarrow \int_p^\infty F(u)\,\mathrm{du}$
9. $(f * g)(t) \leftrightarrow F(s)G(s)$, $(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau$ (produsul de convoluţie)
10. $f(t)g(0) + \int_0^t f(\tau) g'(t - \tau) \mathtt{d}\tau \leftrightarrow sF(s)G(s)$.

La punctul 3, se subînţelege $f(t - t_0) u(t - t_0)$.

Transformatele Laplace ale unor funcţii importante

1. $u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}$, $\operatorname{Re} s > 0$, vezi Exemplul 9.3.
2. $t^n u(t) \leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}$, $\operatorname{Re} s > 0$.
3. $e^{\omega t} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s - \omega}$, $\operatorname{Re} s > \omega$.
4. $\cos(\omega t) u(t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega^2}$, $\operatorname{Re} s > 0$.
5. $\sin(\omega t) u(t) \leftrightarrow \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$, $\operatorname{Re} s > 0$.
6. $\operatorname{ch}(\omega t) u(t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2 - \omega^2}$, $\operatorname{Re} s > |\omega|$.
7. $\operatorname{sh}(\omega t) u(t) \leftrightarrow \frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$, $\operatorname{Re} s > |\omega|$.
8. $\frac{\sin t}{t} u(t) \leftrightarrow \operatorname{arcctg}(s)$, $\operatorname{Re} s > 0$.
9. $\frac{1}{2}(\sin t - t \cos t) u(t) \leftrightarrow \frac{1}{(s^2+1)^2}$, $\operatorname{Re} s > 0$.

Exerciţii

1. Calculaţi imaginile Laplace pentru următoarele funcţii:
   a) $f(t) = (e^{3t} - \sin t + 2t - 3)u(t)$.
   b) $f(t) = \frac{e^t - 1}{t} u(t)$.
   c) $f(t) = e^{at}(t^2 + bt + c)u(t)$.
   d) $f(t) = e^{t-1}\sin(t-1)u(t-1)$.
   e) $f(t) = \cos^2(7t)u(t)$.
   f) $f(t) = \sin(at)\sin(bt)u(t)$, $a, b \in \mathbb{R}$.
   g) $f(t) = \frac{\cos(3t) - \cos t}{t} u(t)$.
   h) $f(t) = t\cos(\omega t)u(t)$, $\omega \in \mathbb{R}$.
   i) $f(t) = tsh(3t)u(t)$.
   j) $f(t) = \int_0^t \tau^2 \cos(2(t-\tau))d\tau$.

2. Determinaţi funcţiile original ale căror tranformate Laplace sunt:
   a) $F(s) = \frac{s+3}{s^3+4s^2}$
   b) $F(s) = \frac{s^2+3s+1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$
   c) $F(s) = \frac{2s+1}{s^2+s}$
   d) $F(s) = \frac{4s+10}{s^2-12s+32}$
   e) $F(s) = \frac{5s+1}{s^2+1}$
   f) $F(s) = \frac{s+2}{s^3+3s}$
   g) $F(s) = \frac{1}{s^2(s-2)^2}$
   h) $F(s) = \frac{2s-7}{s^2+2s+6}$
   i) $F(s) = \frac{3s-14}{s^2-4s+8}$
   j) $F(s) = \frac{e^{-s}}{s^2+1}$
   k) $F(s) = \frac{8e^{-3s}}{s^2+4} - \frac{3se^{-2s}}{s^2-4}$
   l) $F(s) = \frac{se^{-s}}{s^2+2s+5}$
   m) $F(s) = \frac{e^{-s}}{s^2-2s+5} + \frac{se^{-2s}}{s^2+9}$
   n) $F(s) = \frac{se^{-2s}}{s^2+3s+2}$
   o) $F(s) = \frac{27-12s}{(s+4)(s^2+9)}$
   p) $F(s) = \frac{3s^2-1}{(s^2+1)^2}$.

3. Rezolvaţi următoarele ecuaţii şi sisteme, folosind transformata Laplace:

   a) $x'' + 6x' + 9x = 9e^{3t}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$

   b) $x'' - 3x + 2x = 4e^{t}$, $x(0) = -3$, $x'(0) = 5$

   c) $\begin{cases} x' - x + 2y = 0 \\ x'' + 2y' = 2 - \cos(2t) \end{cases}, x(0) = 0, x'(0) = -1, y(0) = \frac{1}{2}$

   d) $\begin{cases} x' + 5x - 2y = e^{t} \\ y' - x + 6y = e^{2t} \end{cases}, x(0) = 1, y(0) = -2$

   e) $x(t) - 2\int_0^t x(\tau)d\tau = \frac{1}{9}(1 - \cos(3t))$

   f) $x(t) = t + 4\int_0^t (t-\tau)x(\tau)d\tau$

   g) $x(t) = t\cos(3t) + \int_0^t \sin(3(t-\tau))x(\tau)d\tau$

   h) $x(t) = \cos t + \int_0^t (t-\tau)e^{t-\tau}x(\tau)d\tau$

4. Calculaţi $I = \int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x}$ dx. (Indicaţie: Calculaţi transformata funcţiei $I(t) = \int_0^\infty \frac{\sin^3(tx)}{x}$ dx)

5. Rezolvaţi ecuaţia cu argumente întârziate $y(t) - y(t-1) = t$, $t \geq 0$.

3.9 Transformata Z.

Definiţia 3.9.1. *Se numeşte* semnal discret*, o funcţie* $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$*. Notăm* $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$*, altfel spus,* $x_n = x(n)$*. Notăm* $\mathcal{S}$ *mulţimea semnalelor discrete.*

Se numeşte semnal discret cu suport pozitiv*, un semnal discret* x *cu* $x_{-n} = 0$*,* $(\forall)n \geq 1$*. Notăm* $\mathcal{S}_+$ *mulţimea semnalelor discrete cu suport pozitiv.*

$\delta_k(n) := \begin{cases} 1, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases}$, $n \in \mathbb{Z}$*, se numeşte* impulsul unitar discret *la momentul* k*.* $\delta := \delta_0$*.*

Dacă $x, y \in \mathcal{S}$ *astfel încât există* $(x * y)(n) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{n-k}y_k \in \mathbb{C}$ *pentru orice* $n \in \mathbb{Z}$*, atunci* $x * y$ *se numeşte* produsul de convoluţie *al semnalelor* x *şi* y*.*

Observaţia 3.9.2. (1) $(\mathcal{S}_+, +, *)$ are structură de domeniu de integritate (inel comutativ unitar integru). Elementul neutru la produsul de convoluţie este δ. De fapt, $\mathcal{S}_+ \cong \mathbb{C}[[t]]$ = inelul de serii formale, izomorfismul fiind dat de $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} x_n t^n$.

(2) Dacă $x \in \mathcal{S}$ şi $k \in \mathbb{Z}$, atunci $(x * \delta_k)(n) = x(n - k)$, $(\forall)n \in \mathbb{Z}$.

Definiţia 3.9.3. *Fie* $x \in \mathcal{S}$*. Se numeşte transformata Z a semnalului discret s, seria Laurent*

$$\mathrm{L}_x(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}.$$

$X(z) := \mathrm{L}_x(z)$ *este o funcţie olomorfă pe domeniul* $r < |z| < R$*, unde* $r = \limsup_n \sqrt[n]{|x(n)|}$ *şi* $R = \frac{1}{\limsup_n \sqrt[b]{|x(-n)|}}$*. Vezi Definiţia 4.6.*

Propoziţia 3.9.4. *Fie* $x, y \in \mathcal{S}$*,* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *şi* $k \in \mathbb{Z}$*. Atunci:*

1. $\mathrm{L}_{\alpha x+\beta y}(z) = \alpha\,\mathrm{L}_x(z) + \beta\,\mathrm{L}_y(z)$.
2. $\mathrm{L}_{x*y}(z) = \mathrm{L}_x(z)\,\mathrm{L}_y(z)$.
3. $\mathrm{L}_{x*\delta_k}(z) = z^{-k}\,\mathrm{L}_x(z)$.

Propoziţia 3.9.5. *Fie* $x \in \mathcal{S}_+$ *un semnal cu suport pozitiv. Atunci* $L_x(z) = X(z)$ *este olomorfă pe* $|z| > r$*, unde* $r = \limsup_n \sqrt[n]{|x(n)|} = \lim_n \frac{|x(n+1)|}{|x(n)|}$*, dacă există cea dea doua limită. Mai mult, dacă* $\rho \in (r, R)$*, atunci:*

$$x(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho} z^{n-1}X(z)\,\mathrm{dz},\ (\forall)n \in \mathbb{N}.$$

Presupunând că $X(z)$ *admite o prelungire olomorfă pe* $\mathbb{C} \setminus \{z_0, z_1, \ldots, z_n\}$ *cu* $z_0 = 0$ *şi* $\{z_0, z_1, \ldots, z_n\}$ *puncte singulare izolate pentru* $X(z)$*, atunci:*

$$x(n) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Rez}(z^{n-1}X(z), z_k),\ (\forall)n \in \mathbb{N}.$$

Formule asemănătoarele pot fi obţinute şi dacă renunţăm la ipoteza că x e cu suport pozitiv. O altă metodă posibilă este aceea de a scrie direct dezvoltarea în serie Laurent a lui $X(z)$. (pentru x semnal pozitiv, scriem dezvoltarea pe domeniul $|z| > r$, astfel încât toţi polii lui $X(z)$ sunt în $|z| \leq r$; dacă x nu e pozitiv, putem avea şi alte domenii)

Lista cu transformatele Z ale unor semnale uzuale din $\mathcal{S}_+$

1. $\delta_k \leftrightarrow \frac{1}{z^k}$, $z \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}$.
2. $1 \leftrightarrow \frac{z}{z-1}$, $|z| > 1$.
3. $n \leftrightarrow \frac{z}{(z-1)^2}$, $|z| > 1$.
4. $n^2 \leftrightarrow \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$, $|z| > 1$.
5. $a^n \leftrightarrow \frac{z}{z-a}$, $|z| > a$, $a > 0$.
6. $\cos(\omega n) \leftrightarrow \frac{z(z-\cos\omega)}{z^2-2z\cos\omega+1}$, $|z| > 1$.
7. $\sin(\omega n) \leftrightarrow \frac{z\sin\omega}{z^2-2z\cos\omega+1}$, $|z| > 1$.

Exerciţii

1. Determinaţi semnalul $x \in \mathcal{S}_+$, cu transformata Z:
   a) $X(z) = \frac{2z+3}{z^2-5z+6}$
   b) $X(z) = \frac{z^2+1}{z^2-z+1}$
   c) $X(z) = \frac{z}{(z-1)(z^2+1)}$,
   d) $X(z) = \frac{z}{(z-1)^2(z^2+z-6)}$
   e) $X(z) = \frac{z}{z^2+2az+2a^2}$, $a > 0$.
2. Notăm $u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$. Rezolvaţi ecuaţia $y * a = x$, unde:
   a) $a = \delta_{-2} + 3\delta_{-1} + 2\delta$, $x_n = 5 \cdot 3^n u(n)$, $n \in \mathbb{Z}$.
   b) $a = \delta_{-2} - \frac{5}{2}\delta_{-1} + \delta$, $x_n = \cos(\pi(n+1))u(n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$.
   c) $a = \delta_{-2} - 4\delta_{-1} + 3\delta$, $x_n = 2u(n)$, $n \in \mathbb{Z}$.
   d) $a = \delta_{-1} - 2\delta$, $x_n = (n^2 - 2n - 1)u(n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

3. Determinaţi expresia şirurilor recurente:

   a) $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, \quad x_0 = 0, x_1 = 1.$

   b) $x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0, \quad x_0 = 4, x_1 = 6.$

   c) $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 3x_n = 2, \quad x_0 = 0, x_1 = 1.$

   d) $x_{n+2} + x_{n+1} - 6x_n = n, \quad x_0 = 0, x_1 = -1.$

   e) $x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 2^n, \quad x_0 = 0, x_1 = 0.$

   f) $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 4 \cdot 5^n, \quad x_0 = 0, x_1 = 1.$

4. Arătaţi că semnalul $x \in \mathcal{S}_+, x_n = 2^{n^2}, n \geq 0$, nu admite transformată Z.

3.10 Exerciţii recapitulative

1. Rezolvaţi ecuaţiile:

   a) $z^2 - \sqrt{3}z + i = 0$.

   b) $z^3 - 2 + 2i = 0$.

   c) $z^8 + 2z^4 + 2 = 0$.

   d) $z^{12} = 1$.

2. Reprezentaţi grafic domeniile:

   a) $1 < |2z - 3i| \leq 2$.

   b) $|z - 2i| + |z - 2i| = 6$.

   c) $\{\mathrm{Im}(z^2) < 4\} \cap \{\mathrm{Re}\, z \geq 0\}$.

   d) $|z|^2 - \mathrm{Im}(z^2) = 1$.

3. Demonstraţi identităţile:

   a) $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \mathrm{sh}^2\, y$, unde $z = x + yi$.

   b) $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \mathrm{sh}^2\, y$, unde $z = x + yi$.

4. Scrieţi $A = \frac{-1+i\sqrt{3}}{1+i}$ sub formă trigonometrică. Calculaţi $\mathrm{Ln}\, A$, A^8 şi $\sqrt[6]{A}$.

5. Calculaţi:

   a) $e^{(1-i)\pi}$.

   b) $\sin(1 + i)$.

   c) $\mathrm{tg}(\frac{\pi}{3} + i \ln 2)$.

   d) $\mathrm{cth}(\frac{\pi}{4} + i \ln 3)$.

6. Calculaţi:

   a) $(-1)^{1+2i}$.

   b) $\mathrm{Ln}(2 + 2i)$.

   c) $\sqrt{(1 + i)^{(1+i)}}$.

   d) $\mathrm{Arcctg}\left(\frac{\sqrt{3}+5i}{2}\right)$.

7. Rezolvaţi ecuaţiile:

   a) $\sin z + i\,\mathrm{sh}\, z = 0$.

   b) $\mathrm{ctg}\, z = 1 + i$.

   c) $\mathrm{ch}\, z - \mathrm{sh}\, z = 1 + i$.

d) $\ln z = (2 - \frac{i}{2})\pi$.

e) $\cos(2z) = 2i$.

f) $e^z = 2i$.

8. Determinaţi $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ pentru care funcţiile următoare sunt olomorfe:

   a) $f(z) = x + ay + i(bx + cy)$

   b) $f(z) = x^2 + axy + by^2 + (cx^2 + dxy + y^2)i$.

   c) $f(z) = \cos x(\operatorname{ch} y + a \operatorname{sh} y) + i \sin x(\operatorname{ch} y + b \operatorname{sh} y)$.

9. Fie $f(z) = z \cdot |z|^2$. Calculaţi $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ şi $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$.

10. Arătaţi că $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = |z + 1|$, nu e olomorfă în nici un punct.

11. Arătaţi că $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \sqrt{|z^2 - \bar{z}^2|}$, este continuă în $z_0 = 0$, satisface relaţiile Cauchy-Riemman, dar nu este olomofă. (Indicaţie: $\operatorname{Re} f(z)$ nu e diferenţiabilă în $(0, 0)$).

12. Determinaţi punctele în care funcţia $f(z) = z^2 + 2|z|^2 - 2\bar{z}^2 + 3z + 2\bar{z}$ este olomorfă şi calculaţi derivatele în punctele respective.

13. Determinaţi funcţia olomorfă $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f = u + vi$ cu $u(x, y) = \sin(2x) \cdot \operatorname{ch}(2y)$, $f(0) = 0$.

14. Determinaţi funcţia olomorfă $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f = u + vi$ cu $u(x, y) = e^{2x} \cos(2y) + y^2 - x^2$, $f(0) = 1$.

15. Determinaţi funcţia olomorfă $f : \Omega = \{z \in \mathbb{C} \ : \ Re(z) > 0\} \to \mathbb{C}$, cu $(\operatorname{Re} f)(x, y) = x - \frac{x}{x^2+y^2}$ şi $f(1) = i$.

16. Determinaţi funcţiile olomorfe $f : \{\operatorname{Re} z > 0\} \to \mathbb{C}$, $f = u + vi$ cu $v(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + x - 2y$.

17. Fie $u(x, y) = \frac{x}{x^2+(y+1)^2}$. Determinaţi $v(x, y)$ astfel încât $f(z) = u(x, y) + v(x, y)i$ este olomorfă şi $f(0) = -i$. Calculaţi $f'(0)$.

18. Determinaţi funcţia olomorfă $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ cu $(\operatorname{Re} f)(x, y) = e^x(x \cos y - y \sin y)$ şi $f(0) = 0$.

19. Determinaţi funcţiile olomorfe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f = u + vi$, cu $u(x, y) = \varphi(ax + by)$, $a, b \in \mathbb{R}$ constante, $\varphi \in C^2$, $f(0) = 0$.

20. Determinaţi funcţiile olomorfe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f = u + vi$, cu proprietatea că $v(x, y) = \varphi(x^2 - y^2)$, unde $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$.

21. Determinaţi funcţiile olomorfe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f = u + vi$, cu proprietatea că $u(x, y) = x\varphi(x^2 - 3y^2)$, unde $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$.

22. Determinaţi discurile de convergenţă pentru seriile de puteri:

    a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{n!}$,

    b) $\sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} z^n$, $|a| < 1$.

    c) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2-3i}{5+i}\right)^n (z - 1 + i)^n$.

    d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-3in}{n+2i}\right)^n z^n$

23. Dezvoltaţi în serie de puteri şi în serie Laurent în jurul lui $z_1 = 1$, funcţia $f(z) = \cos \frac{z}{z-1}$.

24. Dezvoltaţi în serie Laurent funcţia $f(z) = \frac{2z^2+3z-1}{z^3+z^2-z_1}$ în jurul punctelor $z_0 = 0$, $z_1 = 1$, $z_2 = -1$.

25. Dezvoltaţi în serie de puteri funcţia $f(z) = \frac{1}{z^3-3z+2}$ şi în serie Laurent pe domeniile a) $1 < |z| < 2$ şi b) $|z| > 2$.

26. Dezvoltaţi în serie Laurent funcţia $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z^2-4)^2}$ pe domeniile a) $|z| < 1$, b) $1 < |z| < 2$, c) $|z| > 2$.

27. Determinaţi punctele singulare, natura lor şi reziduurile pentru:

    a) $f(z) = \frac{2z^4-3z+5}{z^2(z+1)}$.

    b) $f(z) = \frac{\operatorname{ch}(iz)}{(z^2+4z+5)^2}$.

    c) $f(z) = \frac{\sin z}{z^3}$.

    d) $f(z) = \sin \frac{\pi}{z}$.

    e) $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z-1}}$.

    f) $f(z) = z^3 \cos \frac{1}{z}$.

    g) $f(z) = \frac{1}{z \sin z^2}$.

    h) $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^n}$, $n \geq 1$.

28. Calculaţi reziduurile funcţiei $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2(1-z)^3}$ în punctele singulare şi ∞.

29. Calculaţi $\int_\gamma z|\,\mathrm{d}z\,|$, unde pentru $z = \varphi(t)$, $|\,\mathrm{d}z\,| = |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t$ şi:

    a) γ este cercul $|z| = R$.

    b) γ este segmentul care uneşte punctele 1 şi i.

30. Calculaţi $\int_{|z|=1} \frac{1}{\bar{z}}\,\mathrm{d}z$ şi $\int_{|z|=1} \bar{z}^2\,\mathrm{d}z$.

31. Calculaţi:
   a) $\int_{|z|=1} \frac{e^{3z}}{5z-i}$ dz.
   b) $\int_{|z+i|=3} \frac{z^4+3z^2+1}{(z+i)^3}$ dz.
   c) $\int_{|z|=\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{z\sin z}$ dz.
   d) $\int_{|z|=1} \frac{z^2-e^z}{z^3}$ dz.
   e) $\int_\gamma \frac{\operatorname{tg} z}{z-i}$ dz, unde γ este triunghiul cu vârfurile 0, $1+2i$ şi $-1+2i$.
   f) $\int_\gamma \frac{z^2}{z-i}$ dz, unde γ este semicercul $|z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0$ şi $R > 0$, $R \neq 1$.
   g) $\int_{|z|=r} \frac{\cos z}{(z-i)^2(z-2)}$ dz, $r \neq 1, 2$. Discuţie după r.

32. Fie $f(z) = \frac{ze^{\frac{1}{z}}}{z+1}$.
   a) Determinaţi punctele singulare şi natura lor.
   b) Calculaţi reziduurile funcţiei in punctele respective.
   c) Calculaţi $\int_{|z|=\frac{\sqrt{2}}{2}} f(z)dz$.

33. Fie $f(z) = \frac{z^2e^{1/z}}{z^2-1}$.
   a) Determinaţi punctele singulare şi natura lor.
   b) Calculaţi reziduurile funcţiei in punctele respective
   c) Calculaţi $\int_{|z|=\frac{1}{2}} f(z)$ dz.

34. Calculaţi $\int_\gamma \frac{\cos(iz)}{(z-1)^2(z+2)}dz$ unde a) $\gamma : |z-3| = 0$, b) $\gamma : |z+i| = 2$, şi c) γ e un drum închis situat în semiplanul $\operatorname{Im}(z) > 0$.

35. Calculaţi integralele trigonometrice:
   a) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+a\sin t}$ dt, unde $0 < a < 2$.
   b) $\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos t}{2+\sin t}$ dt.
   c) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos t}{(2+\sin t)^2}$ dt.
   d) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(5+4\sin t)^2}$ dt.

36. Calculaţi integralele raţionale:
   a) $\int_0^\infty \frac{x^4+1}{x^6+1}$ dx.
   b) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{x^4+16}$ dx.
   c) $\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)^3}$ dx.
   d) $\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+a^2)(x^2+1)}$ dx, $a > 0$.

37. Calculaţi integralele:

a) $\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+9)}\,\mathrm{dx}$.

b) $\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+4)^2}\,\mathrm{dx}$.

c) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x\sin x}{x^2+2x+10}\,\mathrm{dx}$.

d) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x\cos x}{x^2+2x+10}\,\mathrm{dx}$.

e) $I = \int_0^\infty \cos(x^2)\,\mathrm{dx}$ şi $J = \int_0^\infty \sin(x^2)\,\mathrm{dx}$.

38. Arătaţi că $\operatorname{sgn} t = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin((2n-1)t)}{2n-1}$ pentru $t \in (-\pi, \pi)$.

39. Fie $f(t) = \begin{cases} 1, \ t \in [0,1], \\ -1, \ t \in (1,2] \end{cases}$.

a) Dezvoltaţi f în serie de cosinusuri.

b) Calculaţi $\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

40. Dezvoltaţi $f(t) = \cos(at) + \sin(bt)$, $a, b > 0$, după cosinusuri şi sinusuri.

41. Dezvoltaţi în serie Fourier funcţiile, scriind totodată forma complexă şi armonică:

a) $f(t) = |\cos t|$, $t \in (-\pi, \pi)$.

b) $f(t) = \pi^2 - t^2$, $t \in (-\pi, pi)$.

c) $f(t) = \frac{1}{2+\cos t}$, $t \in \mathbb{R}$.

d) $f(t) = \begin{cases} 1, \ t \in [-2,-1] \cup [1,2], \\ 0, \ t \in (-1,1) \end{cases}$.

e) $f(t) = e^{|t|}$, $t \in (-\pi, \pi)$.

42. Calculaţi $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4}$, folosind identitatea Parseval pentru seria Fourier asociată funcţiei $f(x) = x^2$, $x \in (-\pi, \pi)$.

43. Fie $a > 0$ şi $f(x) = e^{ax}, x \in (-\pi, \pi)$.

a) Scrieţi dezvoltarea Fourier a lui f.

b) Deduceţi sumele seriilor $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n^2+a^2}$ şi $\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2+a^2}$.

c) Deduceţi dezvoltările în serie Fourier ale funcţiilor $g(x) = \operatorname{sh}(ax)$ şi $h(x) = \operatorname{ch}(ax)$ pe $(-\pi, \pi)$.

44. Deduceţi identitatea $\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^\infty \frac{\sin(nx)}{x}$, $x \in (0, 2\pi)$. Calculaţi $\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin(2nx)}{x}$ şi $\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin((2n+1)x)}{x}$ pentru $x \in (0, \pi)$.

45. Dezvoltaţi în serie de sinusuri funcţia $f(t) = t(\pi - t)$, $t \in (0, \pi)$.

46. Dezvoltaţi în serie de sinusuri funcţia $f(t) = \begin{cases} a\sin t + b\cos t, & t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ a\sin t - b\cos t, & t \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$,
unde $a, b > 0$ şi $a^2 + b^2 = 1$.

47. Calculaţi transformatele Fourier ale funcţiilor:
a) $f(t) = e^{-at^2} + bte^{-at^2}$.
b) $f(t) = \begin{cases} \frac{\sin(2t)}{t}, & t \neq 0 \\ 2, & t = 0 \end{cases}$.
c) $f(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$.
d) $f(t) = u(t-a) - u(t-b)$, unde $u(t) = \begin{cases} 1, t > 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$ şi $a < b$.
e) $f(t) = |t-1| - 2|t| + |t+1|$.

48. Rezolvaţi, cu ajutorul transformării Fourier, ecuaţiile integrale:
a) $\int_0^\infty x(t)\cos(\omega t)\,\mathrm{dt} = \begin{cases} \omega, & \omega \in [0,1], \\ 0, & \omega > 1 \end{cases}$.
b) $\int_0^\infty X(\omega)\cos(\omega t) d\omega = \begin{cases} 1-t, & t \in (0,1), \\ 0, & t \in [1, \infty) \end{cases}$.
b) $\int_0^\infty x(t)\sin(\omega t)dt = e^{-\omega}$, $\omega > 0$.
c) $\int_0^\infty x(t)\sin(\omega t)dt = \frac{1}{4\omega^2+9}$, $\omega > 0$.

49. Determinaţi transformatele Laplace ale funcţiilor:
a) $f(t) = \sin^2(\omega t)u(t)$, unde $\omega > 0$.
b) $f(t) = ((t+2)e^{3t} + 2e^{-t}\cos(2t))u(t)$.
c) $f(t) = \cos(at)\cos(bt)u(t)$, unde $a, b > 0$.
d) $f(t) = (\mathrm{sh}(at)\cos(bt) - \mathrm{ch}(bt)\sin(at))u(t)$, unde $a, b > 0$.
e) $f(t) = te^{2t}\sin(3t)u(t)$.
f) $f(t) = \int_0^t \tau^2 e^{-\tau} d\tau$.
g) $f(t) = \int_0^t \tau^2 e^{2(t-\tau)} d\tau$.
h) $f(t) = \frac{\mathrm{ch}(\omega t)}{t} u(t)$, unde $\omega > 0$.
i) $f(t) = e{-}2t^2 u(t)$.
j) $f(t) = (t-1)^2 e^{t-1} u(t-1)$.

50. Determinaţi funcţiile original ale căror imagini Laplace sunt:

a) $F(s) = \frac{s}{(s^2+9)(s^2+1)}$.

b) $F(s) = \frac{s}{(s^3+16s-24)(s^4+20s^2+64)}$.

c) $F(s) = \frac{e^{-s}}{s^2-2s+5} + \frac{se^{-s}}{(s^2+1)^2}$.

d) $F(s) = \frac{5s^2-15s+11}{(s+1)(s-2)^2}$.

51. Calculaţi, cu ajutorul transformării Laplace, integralele:

a) $\int_0^\infty \frac{\sin x^2}{x}$ dx.

b) $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}$ dx.

c) $\int_0^\infty \frac{\cos(tx)}{1+x^2}$ dx, $t > 0$.

52. Rezolvaţi, cu ajutorul transformării Laplace, ecuaţia cu argumente întârziate $3y(t) - 4y(t-1) + y(t-2) = t$, $t \geq 0$.

53. Rezolvaţi, cu ajutorul transformării Laplace, ecuaţiile diferenţiale:

a) $x'' + 3x' + 2x = 4e^{-t}$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

b) $x'' + 6x' + 9x = e^{-3t}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

c) $x'' + 2x' + x = \frac{e^{-t}}{t+1}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

d) $x''' - 3x'' + 3x' - y = t^2e^t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$, $x''(0) = -2$.

e) $x'' - 2x' + 5x = e^t\cos(2t)$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$.

f) $tx'' + 2x' = t - 1$, $x(0) = 0$.

g) $x'' - x = \operatorname{th} t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = -1$.

54. Folosind tranformata Laplace, determinaţi soluţia sistemelor:

a) $\begin{cases} x' = y + e^t \\ y' = -x + e^{-t} \end{cases}$, $t > 0$, $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} 3x' + 2x + y' = 1 \\ x' + 4y' + 3y = 0 \end{cases}$, $t > 0$ $\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$.

c) $\begin{cases} x' + 5x - 2y = e^t \\ y' - x + 6y = e^{2t} \end{cases}$, $t > 0$ $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = -2 \end{cases}$.

d) $\begin{cases} x'' + x' + y'' - y = e^t \\ x' + 2x - y' + y = e^{-t} \end{cases}$, $t > 0$ $\begin{cases} x(0) = x'(0) = 0 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$.

55. Rezolvaţi, cu ajutorul transformării Laplace, ecuaţiile integrale:
   a) $x(t) = \cos(2t) - \int_0^t (t-\tau)e^{t-\tau}x(\tau)d\tau$.
   b) $x(t) = t\cos(3t) + \int_0^t \sin(3(t-\tau))x(\tau)d\tau$.
   c) $x(t) = t + 4\int_0^t x(\tau)(t-\tau)^2 d\tau$.
   d) $x'(t) = \int_0^t x(\tau)\cos(t-\tau)d\tau$, $x(0) = 1$.
   e) $\sin t = t + \int_0^t x'(\tau)(t-\tau)d\tau$.
56. Determinaţi semnalul $x \in \mathcal{S}_+$ a cărui transformată Z este:
   a) $X(z) = \frac{z}{z^2-5z+6}$.
   b) $X(z) = \frac{z^2+1}{z^2-2z+5}$.
   c) $X(z) = \frac{z}{(z-4)^2}$.
   d) $X(z) = \frac{z}{(z-1)^2(z^2+z-6)}$.
57. Calculaţi transformata Z a semnalelor:
   a) $x_n = u(n-2) - 2u(n-1) + u(n)$, $n \in \mathbb{Z}$.
   b) $x_n = \sin^2(\omega n)u(n)$, $n \in \mathbb{Z}$.
   c) $x_n = (\mathrm{sh}(\omega n) + \mathrm{ch}(2\omega n))u(n)$, $n \in \mathbb{Z}$.
58. Cu ajutorul transformării Z, determinaţi semnalul $y \in \mathcal{S}_+$ care verifică ecuaţia $y * a = x$, unde:
   a) $a = \delta_{-2} + 4\delta_{-1} + 3\delta$, $x_n = 2u(n)$, $n \in \mathbb{Z}$.
   b) $a = \delta_{-1} + 2\delta$, $x_n = (2n^2 + 2n + 1)u(n)$, $n \in \mathbb{Z}$.
59. Determinaţi, cu ajutorul transformării Z, termenul general al şirului $(x_n)_n$ definit prin:
   a) $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 3x_n = 2n$, $n \in \mathbb{N}$, $x_0 = 0$, $x_1 = 3$.
   b) $x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$, $x_0 = x_1 = 0$.
   c) $x_{n+2} + x_{n+1} - 6x_n = n$, $n \in \mathbb{N}$, $x_0 = 0$, $x_1 = -1$.
   d) $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 4 \cdot 5^n$, $n \in \mathbb{N}$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$.
   e) $x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 2, n \in \mathbb{N}$, $x_0 = 0, x_1 = 1$.
   f) $x_{n+2} + 2x_{n+1} - x_n = 2$, $n \geq 0$, $x_0 = -1$, $x_1 = 3$.
   g) $x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n = 2^{n+1}$, $n \geq 0$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$.
   h) $x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n = n + 1$, $n \geq 0$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$.
60. Determinaţi termenii generali ai şirurilor $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ care verifică:
$$a_{n-1} + 7a_n + b_n = 0,\ b_{n+1} + a_n + 5b_n = 0,\ n \in \mathbb{N},\ a_0 = 1,\ b_0 = 1.$$

Capitolul 4

Soluţii şi indicaţii

4.1 Exerciţii din capitolul 1

Pagina 16

1. b) Este o tautologie (are doar valoarea 1).

2. $(\exists)x, (\forall)yP(x,y)$ şi $\overline{Q(x,y)}$.

3. Evident $x \sim x$. Dacă $x \sim y$, atunci $\cos x = \cos y$, deci $\cos y = \cos x$, de unde rezultă $y \sim x$. Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$, astfel încât $x \sim y$ şi $y \sim z$. Atunci $\cos x = \cos y$ şi $\cos y = \cos z$, de unde rezulta $\cos x = \cos z$, deci $x \sim z$. Rezultă cš $\sim$ este o relaţie de echivalenţă pe $\mathbb{R}$.

   Avem $\widehat{\frac{\pi}{3}} = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x = \cos(\frac{\pi}{3})\} = \{\pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

4. Se rezolvă similar cu 3. $\widehat{1+i}$ = mulţimea soluţiilor ecuaţiei $z^3 = 1 + i$.

5. $(\mathcal{P}(X), \Delta)$ e grup comutativ cu elementul neutru $\emptyset$; $A\Delta A = \emptyset$, deci A e opusul lui A. $(\mathcal{P}(X), \cap)$ e monoid comutativ cu elementul neutru X. De asemenea, $A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$.

6. Se explicitează modulele.

7. Din $\{a\} + \{b\} = a + b - [a] - [b] = 1$ rezultă $a + b = [a] + [b] + 1 \in \mathbb{Z}$. Dacă $a, b \in \mathbb{Z}$, atunci $[a] + [b] = 0$.

8. $\left|\frac{3x-5}{2}\right| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq \frac{3x-5}{2} \leq 2 \Leftrightarrow -4 \leq 3x - 5 \leq 4 \Leftrightarrow 1 \leq 3x \leq 9 \Leftrightarrow x \in [\frac{1}{3}, 3]$. Deci $A = [\frac{1}{3}, 3]$ şi $B = A \cap \mathbb{Z} = \{0, 1, 2, 3\}$.

9. a) $z^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -2$, deci $z_{1,2} = \pm i\sqrt{2}$. b) $z_1 = 2$, $z_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{3}$, c) $z_{1,2} = \pm i$, $z_{3,4} = \pm i\sqrt{3}$.

10. Se foloseşte $(1 + i)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k i^k$.

Pagina 19

1. a) Dacă $y \in f(A \cup B)$, atunci există $x \in A \cup B$ cu $y = f(x)$. Dacă $x \in A$, atunci $y \in f(A)$, iar dacă $x \in B$, atunci $y \in f(B)$. Prin urmare $x \in f(A) \cup f(B)$, deci $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$. Incluziunea $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$ este evidentă. De asemenea, e evident $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

2. Vârful parabolei $y = f(x) = x^2 + 3x + 2$ este $V(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4})$. De aici rezultă că f este strict descrescătoare pe $(-\infty, -\frac{3}{2}]$, strict crescătoare pe $[-\frac{3}{2}, \infty)$ şi $\mathrm{Im}(f) = [-\frac{1}{4}, \infty)$. Atunci $f|_{[-\frac{3}{2},\infty)} : [-\frac{3}{2}, \infty) \to [-\frac{1}{4}, \infty)$ este bijectivă (injectivitatea rezultă din faptul că f e strict crescătoare).

6. Observăm că $f(x + 1) = \{2x + 2\} + \{3x + 3\} = \{2x\} + \{3x\} = f(x)$, deci $T_0 = 1$ este o perioadă. Presupunem că $T > 0$ este o altă perioadă. Atunci $f(0) = 0 = \{2T\} + \{3T\}$, de unde $\{2T\} = \{3T\} = 0$. Deci $2T, 3T \in \mathbb{N}^*$. Cum 2 şi 3 sunt prime între ele, rezultă $T \in \mathbb{N}^*$. Deci $T_0 = 1$ este perioada principală.

7. f impară, g pară, h nici pară, nici impară.

Pagina 22

1. Mulţimile A, B, F, H, I, K sunt numărabile, mulţimile D, G sunt finite şi mulţimile C, E, J, L sunt nenumărabile.

2. Funcţia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $f(n) = \begin{cases} k, & n = 2k \\ -k - 1, & n = 2k + 1 \end{cases}$, este bijectivă.

Pagina 29

1. Orice punct $x \in (0, 1)$ este interior, deoarece $(\frac{x}{2}, 1) \subset A$ este o vecinătate a sa. 0 nu este punct interior, pentru că orice vecinătate V a lui 0 conţine un interval de forma $(-\varepsilon, \varepsilon)$, cu $\varepsilon > 0$, care nu e inclus în A. 2 este punct izolat, deci nu poate fi interior. Prin urmare $\mathring{A} = (0, 1)$. $1 \in \overline{A}$, deoarece orice vecinătare V a lui 1 conţine un interval de forma $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$, cu $\varepsilon > 0$, care intersectează mulţimea A.

2. a) Avem $0 \le x_n = \frac{2n}{2n+1} < 1$, $(\forall)n \ge 0$. Deci $(x_n)_n$ este mărginit. Pe de altă parte,

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2n + 2}{2n + 3} - \frac{2n}{2n + 1} = \frac{4}{(2n + 3)(2n + 1)} > 0,\ (\forall)n \ge 0,$$

deci $(x_n)_n$ este strict crescător.

b) mărginit, nu e monoton, c) nemărginit, crescător, d) mărginit, descrescător,

e) nemărginit, crescător, f) mărginit, crescător, g) mărginit, descrescător,

h) mărginit, crescător, i) mărginit, crescător.

3. a) Fie $\varepsilon > 0$. Din $\left|\frac{2n+1}{3n+2} - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{3(2n+1)-2(3n+2)}{3(3n+2)}\right| = \frac{1}{9n+6} < \varepsilon$, rezultă $9n+6 > \frac{1}{\varepsilon}$, adică $n > \frac{1}{9}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 6\right)$. Fie $n_\varepsilon := \left[\frac{1}{9}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 6\right)\right] + 1$. Atunci, pentru $n \geq n_\varepsilon$, avem $\left|\frac{2n+1}{3n+2} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon$, deci $\lim_n \frac{2n+1}{3n+2} = \frac{2}{3}$.
4. a) Avem $x_n := \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$. Pe de altă parte, $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \geq \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$. Cum $\lim_n \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_n \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1$, din criteriul cleştelui rezultă că $\lim_n x_n = 1$.
5. a) Din $\left|\frac{\sin n}{n} - 0\right| = \frac{|\sin n|}{n} \leq \frac{1}{n}$ şi $\lim_n \frac{1}{n} = 0$, rezultă $\lim_n \frac{\sin n}{n} = 0$, conform criteriului majorării.
6. a) Avem $1 \leq x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} = 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 2 + \frac{1}{n} \leq 2$, $(\forall)n \geq 1$, deci şirul $(x_n)_n$ este mărginit. Pe de altă parte, $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$, deci $(x_n)_n$ este crescător.
7. a) $\lim_n \frac{n+1}{2n^2+3} = \lim_n \frac{n(1+\frac{1}{n})}{n^2(2+\frac{3}{n^2})} = \lim_n \frac{1+\frac{1}{n}}{n(2+\frac{3}{n^2})} = \lim_n \frac{1}{2n} = 0$, b) $\frac{2}{3}$, c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$, d) ∞, e) $-\infty$, f) $\frac{1}{2}$, g) 3, h) $\frac{1}{3}$, i) $\frac{1}{4}$, j) $\sqrt[3]{4}$, k) ∞, l) $\frac{\pi}{2}$.
8. a) $\lim_n(n^2 - n + 1) = \lim_n n^2\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \infty$,
   b) ∞, c) ∞, d) $\frac{1}{2}$, e) $\frac{1}{2}$, f) 1, g) $\frac{1}{3}$.
9. a) $\lim_n \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{3n+1} = \lim_n \left(1 + \frac{-1}{n+2}\right)^{3n+1} = \lim_n \left[\left(1 + \frac{-1}{n+2}\right)^{-(n+2)}\right]^{\frac{3n+1}{-(n+2)}} = e^{-3}$, b) $\sqrt{e}$, c) 2, d) 0, e) -1, f) $\frac{1}{2}$, g) $\ln 2$, h) $\ln 3$, i) 3.
10. a) 0, b) $\lim_n \frac{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \lim_n \frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+1}-n\sqrt{n}} = \lim_n \frac{(n+1)^2+n\sqrt{n^2+n}}{(n+1)^3-n^3} = \frac{2}{3}$, c) 0, d) 0, e) 0, f) $\frac{1}{3}$, g) $\frac{1}{p+1}$, h) 1.
11. a) $\lim_n \sqrt[n]{n^2} = \lim_n \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1$, b) 1, c) $\lim_n \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} =$
    $= \lim_n \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim_n \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_n \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$, d) 4.
12. a) Fie $n, p \geq 1$. Atunci $|x_{n+p} - x_n| = \left|\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2}\right| \leq \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} \leq \frac{1}{n}$. Cum $\lim_n \frac{1}{n} = 0$, rezultă că $(x_n)_n$ este Cauchy. b) $|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p} \geq \frac{p}{n+p}$. Alegând $p = n$, avem că $|x_{2n} - x_n| \geq \frac{1}{2}$. Prin urmare, pentru $\varepsilon = \frac{1}{2}$ şi $n \geq 1$, alegând $p = n$ avem $|x_{n+p} - x_n| \geq \varepsilon$. Prin urmare, şirul nu este Cauchy,
    d) şir Cauchy, e) şir Cauchy, f) şir Cauchy.

Pagina 37

1. a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x^3-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x-2}{x^2+x+1} = -\frac{1}{3}$, b) 5,
   c) $\frac{\sqrt{2}}{3}$, d) 2, e) $\frac{1}{2}$, f) e^2, g) 0, h) $\frac{\ln 2}{2}$
2. f e continuă pe $\mathbb{R}^*$, dar $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{3}{2} \neq 0 = f(0)$, deci f nu e continuă în 0.
3. $f([0,1])$ trebuie să fie un interval compact.

Pagina 45

1. a) $f'(x) = (xe^{x^2+1})' = x'e^{x^2+1} + x(e^{x^2+1})' = (1+2x^2)e^{x^2+1}$, b) $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x}$.

2. a) $f'(x) = ae^{ax}$, $f''(x) = a^2e^{ax}$ etc. Deci $f^{(n)}(x) = a^{n-1}e^{ax}$, $n \geq 1$, afirmaţie care se demonstrează prin inducţie, b) $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n}$, $n \geq 1$,

   c) $f^{(n)}(x) = \begin{cases} \cos x, & n = 4k \\ -\sin x, & n = 4k+1 \\ -\cos x, & n = 4k+2 \\ \sin x, & n = 4k+3 \end{cases}$, e) $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}e^{-x}$, $n \geq 1$,

   f) $f(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$, g) Se foloseşte $(x^2e^x)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (x^2)^{(n-k)}(e^x)^{(k)}$,

   j) $f(x) = (x+4)^{-\frac{1}{2}}$.

3. a) $\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\frac{1}{x^2+1}}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3(x^2+1)} = \frac{1}{3}$, b) 0, c) 0, d) ∞, e) 0, f) ∞, g) 1, h) $e^{-\frac{1}{2}}$.

4. a) Avem $f'(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n = x(n-(n+1)x)$. Ecuaţia $f'(x) = 0$ are soluţiile $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{n}{n+1}$. $f' > 0$ pe $(0, \frac{n}{n+1})$ şi $f' < 0$ pe $(\frac{n}{n+1}, 1]$. Rezultă că $x_2 = \frac{n}{n+2}$ este punct de maxim local pentru f.

5. a) Avem $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$ şi $f''(x) = 6x - 4$. $f' > 0$ pe $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (1, \infty)$ şi $f' < 0$ pe $(\frac{1}{3}, 1)$. Deci f este strict crescătoare pe $(-\infty, \frac{1}{3}]$, strict descrescătoare pe $[\frac{1}{3}, 1]$ şi strict crescătoare pe $[1, \infty)$, deci $x_1 = \frac{1}{3}$ e punct de maxim local şi $x_2 = 1$ e punct de minim local.

   $f'' < 0$ pe $(-\infty, \frac{2}{3})$ şi $f'' > 0$ pe $(\frac{2}{3}, \infty)$, deci f e concavă pe $(-\infty, \frac{2}{3}]$ şi convexă pe $[\frac{2}{3}, \infty)$.

Pagina 51

1. a) $a_n = \frac{1}{n(n+3)} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right)$, deci $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3}\right)$, $n \geq 1$. Deci $S_n = \frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+3}\right) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right)$. Prin urmare $S = \lim_n S_n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{11}{18}$ este suma seriei, c) $S = -\ln 2$, d) $S = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = e$,

   e) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n + (-4)^{n+1}}{6^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n - 4\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{4}{1+\frac{2}{3}} = -\frac{2}{5}$, f) 1, g) ∞

2. a) Nu există $\lim_n (-1)^n$, b) $\lim_n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} \neq 0$, c) $\lim_n \frac{2n^2+n+1}{3n^2-n+1} = \frac{2}{3} \neq 0$.

3. a) $x_n = \frac{n+2}{\sqrt{n^3+1}} \geq \frac{n}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ e divergentă, deci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ e divergentă, b) $x_n = \frac{1}{n^2+n+3} \geq \frac{1}{n^2}$. Seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ e convergentă, deci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ e convergentă, c) $x_n = \frac{2^n}{n!} = \frac{2\cdot 2\cdot 3\cdots 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} \leq 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$. Cum $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$ e convergentă, rezultă că $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ e convergentă, f) convergentă, g) convergentă, h) divergentă, i) divergentă, j) convergentă, k) convergentă, l) divergentă,

m) Avem $x_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \sim \frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}} =: y_n$,

Deoarece $\lim_n \frac{x_n}{y_n} = \lim_n \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{2} \in (0,\infty)$, rezultă $\sum_n x_n \sim \sum_n y_n$. Pe de altă parte, $\sum_n y_n$ e o serie armonică, convergentă pentru $\alpha > \frac{1}{2}$ şi divergentă $\alpha \leq \frac{1}{2}$. Deci $\sum_n x_n$ e convergentă pentru $\alpha > \frac{1}{2}$ şi divergentă pentru $\alpha \leq \frac{1}{2}$.

n) $x_n = \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{n^3+2} \sim \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2} = y_n$. Cum $\lim_n \frac{x_n}{y_n} = 2 \in (0,\infty)$ şi $\sum_n y_n$ e convergentă rezultă că $\sum_n x_n$ e convergentă.

p) $x_n = \frac{\sqrt[3]{n^3+n^2}-\sqrt[3]{n^3-n}}{n^k+1} = \frac{n^2+n}{(n^k+1)(\sqrt[3]{(n^3+n^2)^2}+\sqrt[3]{(n^3+n^2)(n^3-n)}+\sqrt[3]{(n^3-n)^2})} \sim \frac{1}{n^k+1} = y_n$. Avem $\lim_n \frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{3} \in (0,\infty)$, deci $\sum_n x_n \sim \sum_n y_n$. Pentru $k \leq 0$, $y_n \geq \frac{1}{2}$ şi deci $\lim_n y_n \neq 0$. Prin urmare $\sum_n y_n$ e divergentă. Pentru $k > 0$, $y_n \sim \frac{1}{n^k} = z_n$. $\lim_n \frac{y_n}{z_n} = 1$ şi $\sum_n z_n$ e convergentă pentru $k > 1$ şi divergentă pentru $k \in (0,1]$.

q) $x_n = \frac{n^k}{\sqrt[3]{n^3+n}-\sqrt[3]{n^3-n}} = \frac{n^k(\sqrt[3]{(n^3+n)^2}+\sqrt[3]{n^6-n^2}+\sqrt[3]{(n^3-n)^2})}{2n} \sim n^{k+1} = \frac{1}{n^{-k-1}} = y_n$. $\lim_n \frac{x_n}{y_n} = \frac{3}{2}$ şi $\sum_n y_n$ e convergentă pentru $-k-1 > 1$ şi divergentă pentru $-k-1 \leq 1$. Deci $\sum_n x_n$ e convergentă pentru $k < -2$ şi divergentă pentru $k \geq -2$.

4. a) $x_n = \frac{a^n}{n!}$. Avem $\ell = \lim_n \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_n \frac{a}{n+1} = 0 < 1$, deci seria $\sum_n x_n$ e convergentă,

b) $\ell = 0$, deci seria e convergentă, c) $\ell = \frac{1}{4}$, deci seria e convergentă, d) $\ell = \frac{a}{e}$. Pentru $a > e$, seria e divergentă, pentru $a < e$ seria e convergentă. Pentru $a = e$ se foloseşte criteriul necesar şi formula Stirling pentru a arăta că $\sum_{n=1}^\infty \frac{e^n n!}{n^n}$ este divergentă. e) $\ell = \frac{e}{3} < 1$, deci seria e convergentă, f) $\ell = 0$, deci seria e convergentă, g) $\ell = \frac{2}{3}$, deci seria e convergentă, h) $\ell = \frac{e}{2}$, deci seria e convergentă, i) $\ell = a$, seria e convergentă pentru $a < 1$ şi divergentă pentru $a > 1$. Pentru $a = 1$, avem $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \geq \frac{1}{n}$, deci seria $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ e divergentă.

5. a) $x_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$. Avem $\ell = \lim_n n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \lim_n n\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{(2n+2)!!}{(2n+1)!!} - 1\right) =$
$= \lim_n n\left(\frac{2n+2}{2n+1} - 1\right) = \lim_n \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$, deci seria $\sum_{n=1}^\infty x_n$ e convergentă.

b) Pentru $a > 2$, seria e convergentă, pentru $a \leq 2$ seria e divergentă, c) Pentru $a < 4$, seria e convergentă, pentru $a \leq 4$ seria e divergentă, d) Pentru $a < 1$, seria e convergentă, pentru $a \geq 1$ seria e divergentă.

6. a) $x_n = \left(\frac{2n^2+3n+1}{3n^2+2n}\right)^n$. Avem $\ell = \lim_n \sqrt[n]{x_n} = \lim_n \frac{2n^2+3n+1}{3n^2+2n} = \frac{2}{3} < 1$, deci seria $\sum_{n=1}^\infty x_n$ e convergentă, b) $\ell = 0$, deci seria e convergentă, c) $\ell = \frac{1}{2}$, deci seria e convergentă, d) $\ell = \frac{a}{b}$. Dacă $a < b$, atunci seria e convergentă. Dacă $a > b$ atunci seria e divergentă. Dacă $a = b$, atunci seria e divergentă din criteriul necesar, e),f),g) se rezolvă similar cu d).

7. a) $x_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$. $\ell = \lim_n \frac{\ln(1/x_n)}{\ln n} = \lim_n \frac{\ln((\ln n)^{\ln n})}{\ln n} = \lim_n \frac{\ln n \cdot \ln(\ln n)}{\ln n} = \infty > 1$, deci seria $\sum_{n=1}^\infty x_n$ e convergentă, b) $x_n = a^{\ln n}$, $\ell = \lim_n \frac{\ln(1/x_n)}{\ln n} = -\ln a$. Dacă $\ell > 1 \Leftrightarrow a > \frac{1}{e}$, atunci seria e divergentă. Dacă $a < \frac{1}{e}$, atunci seria e convergentă. dacă $a = \frac{1}{e}$, atunci $x_n = \frac{1}{n}$, deci $\sum_{n=1}^\infty x_n$ e divergentă, c) Seria

e divergentă pentru $a \geq 1$ şi convergentă pentru $a < 1$, d) Seria e divergentă pentru $a \leq e$ şi convergentă pentru $a > e$.

8. a) Fie $f : [1.\infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = \frac{1}{x^s} = x^{-s}$. Dacă $s > 1$, atunci $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{dx} = \int_1^\infty x^{-s}\,\mathrm{dx} =$
$= \left.\frac{x^{-s+1}}{-s+1}\right|_1^\infty = -\left.\frac{1}{(s-1)x^{s-1}}\right|_1^\infty = -\lim_{x\to\infty} \frac{1}{(s-1)x^{s-1}} + \frac{1}{s-1} = \frac{1}{s-1} < \infty$, deci $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{dx}$ e convergentă. Cum $f(n) = \frac{1}{n^s}$, $n \geq 1$, rezultă că $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$ e convergentă. Dacă $s \leq 1$, atunci $\frac{1}{n^s} \geq \frac{1}{n}$, deci $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$ e divergentă.

   b) Vom exemplifica, folosind criteriul de condensare Cauchy: Din $x_n = \frac{1}{n(\ln n)^a}$, rezultă că $y_n = 2^n x_{2^n} = \frac{2^n}{2^n(\ln 2^n)^a} = \frac{1}{n^a(\ln 2)^a}$. Cum seria $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^a}$ e convergentă pentru $a > 1$ şi divergentă pentru $a \leq 1$, rezultă că $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n(\ln n)^a}$ verifică aceeaşi proprietate.

9. a) $x_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$, deci $|x_n| = \frac{1}{n^2}$. Cum seria $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ este convergentă, rezultă că $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2}$ este A.C., deci şi convergentă, b) Seria e A.C., c) $x_n = \frac{(-1)^n}{\ln n}$. Avem $a_n = |x_n| = \frac{1}{\ln n} \geq \frac{1}{n}$, deci seria $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{\ln n}$ nu este absolut convergentă. Pe de altă parte, $a_n > 0$, $(a_n)_n$ descrescător şi $\lim_n a_n = 0$, deci seria $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{\ln n}$ e convergentă, b) Seria e convergentă, dar nu e A.C., e) Seria e convergentă, dar nu e A.C., f) Seria e convergentă, dar nu e A.C., g) Seria este A.C., i) Seria e convergentă, dar nu e A.C., j) Seria e convergentă, dar nu e A.C., k) Seria e convergentă, dar nu e A.C., l) Seria este A.C., m) Seria este A.C., n) Seria este convergentă, o) Seria e convergentă, dar nu e A.C.

10. a) $a_n = \frac{1}{n \cdot n!}$. Fie $\alpha_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+1)^2}$. Cum şirul $(\alpha_n)_n$ e descrescător, rezultă că pentru $n \geq 1$, avem $0 < S - S_n < \frac{\alpha_n}{1-\alpha_n} a_n = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{1-\frac{1}{(n+1)^2}} \cdot \frac{1}{n \cdot n!} = \frac{1}{(n^2+2n) \cdot n \cdot n!}$. Condiţia $\frac{1}{(n^2+2n) \cdot n \cdot n!} < 10^{-3} = \frac{1}{1000}$ e echivalentă cu $(n^3 + 2n^2) \cdot n! \geq 1000 \Leftrightarrow n \geq 4$. Deci $S \approx S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$, g) $a_n = \frac{1}{n!2^n}$. Atunci $|S - S_n| \leq a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!2^{n+1}}$. Inegalitatea $\frac{1}{(n+1)!2^{n+1}} < \frac{1}{1000}$ se verifică pentru $n \geq 4$. Deci, $S \approx -a_1 + a_2 - a_3 + a_4$.

Pagina 57

1. a) Avem $f(x) = \lim_n x^n = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$. Deci $f_n \xrightarrow{PC} f$ pe $[0, 1]$ Funcţiile f_n, $n \geq 1$ sunt continue, dar f nu este continuă. Rezultă că şirul $(f_n)_n$ nu converge uniform la f.

   b) Avem $f(x) = \lim_n f_n(x) = \lim_n(x^n - x^{2n}) = 0$, $(\forall)x \in [0, 1)$. De asemenea, $f(1) = \lim_n f_n(1) = \lim_n(1^n - 1^{2n}) = 0$. Deci $f_n \xrightarrow{CP} 0$ pe $[0, 1]$.

   Avem $|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) = x^n - x^{2n}$. Pentru $n \geq 2$, $f_n'(x) = nx^{n-1} - 2nx^{2n-1} = nx^{n-1}(1 - 2x^n)$. Ecuaţia $f_n'(x) = 0$ are soluţiile 0 şi $\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$. Cum $f_n'(x) > 0$ pe $(0, \frac{1}{\sqrt[n]{2}})$ şi $f_n'(x) < 0$ pe $(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}, 1]$, rezultă că $\sup_{x\in[0,1]} f_n(x) = f_n(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, deci $(f_n)_n$ nu converge uniform.

c) Ca în cazul b), se verifică uşor că $f_n \xrightarrow{PC} 0$ pe $[0,1]$. Avem $|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) = x^n - x^{n+1}$. Pentru $n \geq 2$, $f_n'(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n = x^{n-1}(n-(n+1)x)$. Ecuaţia $f_n'(x) = 0$ are soluţiile 0 şi $\frac{n}{n+1}$. Cum $f_n'(x) > 0$ pe $(0, \frac{n}{n+1})$ şi $f_n'(x) < 0$ pe $(\frac{n}{n+1}, 1]$, rezultă că $\sup_{x\in[0,1]} f_n(x) = f_n(\frac{n}{n+1}) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$. Deoarece $\lim_n \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 0 \cdot \frac{1}{e} = 0$, rezultă că $f_n \xrightarrow{CU} 0$ pe $[0,1]$.

d) Şirul $(f_n)_n$ converge uniform la $f(x) = |x|$, dar şirul derivatelor converge doar punctual la $g(x) = \mathrm{sgn}(x)$.

e) Şirul converge punctual, neuniform, pe $[0,\infty)$ şi uniform pe $[1,\infty)$.

f) Şirul converge punctual, neuniform, pe $[0,1]$ şi uniform pe $[1,\infty)$.

g) Şirul converge uniform la 1. $\lim_n \int_0^1 \frac{x+n}{x+n+1}\,\mathrm{dx} = \int_0^1 1\,\mathrm{dx} = 1$.

h) $f(x) = \lim_n f_n(x) = 0$, $(\forall)x > 0$ şi $f(0) = \lim_n 0 = 0$. Deci $f_n \xrightarrow{PC} 0$ pe $[0,\infty)$.

$|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$. Cum $\frac{ab}{a^2+b^2} \leq \frac{1}{2}$ pentru orice $a, b \geq 0$, nu ambele zero, rezultă că $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n}x}{1+(\sqrt{n}x)^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \xrightarrow{n} 0$. Deci $f_n \xrightarrow{CU} 0$ pe $[0,\infty)$.

i) Şirul converge punctual, neuniform, pe $\mathbb{R}$ şi uniform pe $[a,\infty)$.

j) Şirul converge uniform, k) Şirul converge uniform

l) Şirul converge punctual, neuniform, pe $(0,\infty)$ şi uniform pe $[1,\infty)$.

m) Pentru $x \in (0,1]$, $f(x) = \lim_n x^2e^{-nx} = \lim_n \frac{x^2}{e^{nx}} = 0$, $f(0) = \lim_n 0 = 0$. Deci $f_n \xrightarrow{PC} 0$.

$|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) = x^2e^{-nx}$. $f_n'(x) = (2x - nx^2)e^{-nx} = 0 \Rightarrow x = 0$ or $x = \frac{2}{n}$. Dacă $n \geq 3$, atunci f_n e crescătoare pe $[0, \frac{2}{n}]$ şi descrescătoare $[\frac{2}{n}, 1]$, deci $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = f_n(\frac{2}{n}) = \frac{4}{n^2e^2}$. Cum $\lim_n \frac{4}{n^2e^2} = 0$, rezultă că $f_n \xrightarrow{CU} 0$.

n) Pentru $x \in (0,1]$, $f(x) = \lim_n xe^{-nx^2} = \lim_n \frac{x}{e^{nx^2}} = 0$, $f(0) = \lim_n 0 = 0$. Deci $f_n \xrightarrow{PC} 0$.

$|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) = xe^{-nx^2}$. $f_n'(x) = (1 - 2nx^2)e^{-nx^2} = 0 \Rightarrow x = 0$ or $x = \frac{1}{\sqrt{2n}}$. Dacă $n \geq 3$. f_n e crescătoare $[0, \frac{1}{\sqrt{2n}}]$ şi descrescătoare pe $[\frac{1}{\sqrt{2n}}, 1]$, deci $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = f_n(\frac{1}{\sqrt{2n}}) = \frac{1}{\sqrt{2ne}}$. Cum $\lim_n \frac{1}{\sqrt{2ne}} = 0$, rezultă că $f_n \xrightarrow{CU} 0$.

o) Avem $f(x) = \lim_n f_n(x) = x, (\forall)x \in [0,\infty)$, deci $f_n \xrightarrow{PC} f$.

Fie $g_n(x) := |f_n(x) - f(x)| = |\frac{nx}{1+n+x} - x| = \frac{x+x^2}{1+n+x}$. Deoarece $\lim_{x\to\infty} g_n(x) = \infty$, rezultă că $\sup_{x\in[0,\infty)} g_n(x) = \infty$, deci şirul $(f_n)_n$ nu converge uniform.

Pagina 59

1. a) Avem $f_n(x) = x^n - x_{n-1}$, $n \geq 1$, deci $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x) = x^n - 1$. $S(x) = \lim_n S_n(x) = \begin{cases} -1, & x \in [0,1) \\ 0, & x = 1 \end{cases}$, deci $\sum_{n=1}^\infty (x^n - x^{n-1})$ converge punctual (la

S). Cum funcţiile S_n, $n \geq 1$, sunt continue, dar S nu e continuă, rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty}(x^n - x^{n-1})$ nu converge uniform.

b) Seria converge punctual la $S(x) = -\sin x$ pe $\mathbb{R}$, dar nu converge uniform. Seria converge uniform pe $[0,1]$.

e) Seria nu converge pentru $x \leq 0$, converge punctual, dar neuniform, pe $(0,\infty)$ şi converge uniform pe $[1,\infty)$.

2. a) Avem $\left|\frac{(-1)^n 3^{-nx}}{x+n^2}\right| \leq \frac{1}{x+n^2} \leq \frac{1}{n^2}$, $(\forall)x \in [0,\infty)$. Deoarece seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ este convergentă, rezultă că seria de funcţii $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^{-nx}}{x+n^2}$ este (absolut) uniform convergentă pe $[0,\infty)$.

3. Fie $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^2\sqrt{n}}$. Avem $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2\sqrt{n}}$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$. Cum $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$ este convergentă, rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ este (absolut) uniform convergentă pe $\mathbb{R}$. Avem $f_n'(x) = \frac{\cos(nx)}{n\sqrt{n}}$. Similar, se arată că $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ este (absolut) uniform convergentă. Rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ poate fi derivată termen cu termen, adică $\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$.

4. Fie $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^2\sqrt{n}}$. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ este uniform convergentă, dar seria derivatelor $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\frac{2\cos(nx)}{n}$ nu este nici măcar punctual convergentă. Rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ nu poate fi derivată termen cu termen.

5. Fie $f_n(x) = \frac{\cos(3^n x)}{6^n}$. Avem $|f_n(x)| = \frac{|\cos(3^n x)|}{6^n} \leq \frac{1}{6^n} = \left(\frac{1}{6}\right)^n$. Cum seria $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n$ rezultă că $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge uniform pe $\mathbb{R}$.

   Avem $f_n'(x) = -\frac{\sin(3^n x)}{2^n}$. Ca mai sus, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$ converge uniform pe $\mathbb{R}$. Rezultă că $S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(3^n x)}{2^n}$. Prin urmare,
$$S'(\frac{\pi}{3}) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(3^{n-1}\pi)}{2^n} = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$
   deoarece $\sin(\pi k) = 0$ pentru orice $k \in \mathbb{Z}$.

6. Similar cu 5.

Pagina 63

1. a) $a_n = (-2)^n$. Raza de convergenţă este $R = \lim_n \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_n \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$. Pentru $x = \frac{1}{2}$, seria de puteri devine $\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n\frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$, care este divergentă (criteriul necesar). Pentru $x = -\frac{1}{2}$, seria de puteri devine $\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}1$, care este divergentă. Rezultă că domeniul de convergenţă este $D = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

   b) $a_n = \frac{1}{2n}$. Rază de convergenţă este $R = \lim_n \frac{1}{2n+2}\cdot\frac{2n}{1} = 1$. Pentru $x = 1$, seria de puteri devine $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$, care e divergentă (seria armonică). Pentru $x = -1$, seria de puteri devine $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n}$, care e convergentă (criteriul Leibniz). Domeniu de convergenţă este $D = [-1,1)$.

c) $R = 1$, $D = [-1, 1]$, d) $R = 0$, $D = \{0\}$, e) $R = \infty$, $D = \mathbb{R}$,

f) $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$, $R = \lim_n \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = \lim_n \frac{n+1}{n} = 1$, Pentru $x = \pm 1$, seria e divergentă (criteriul necesar), deci $D = (-1, 1)$, g) $R = 3$, $D = (-3, 3)$,

h) Notăm $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Se obţine $R = 1$. Pentru $x = \pm 1$, seria de puteri devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, care este convergentă. Deci $D = [-1, 1]$,

i) Notăm $y = x-2$. Seria de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} y^n$ are raza de convergenţă $R = 2$ şi domeniul de convergenţă $D_y = [-2, 2)$. Cum $x = y + 2$, $y \in D_y \Leftrightarrow -2 \leq y < 2 \Leftrightarrow 0 \leq y + 2 = x < 4 \Leftrightarrow x \in [0, 4)$. Deci $D = [0, 4)$.

j) Notăm $y = \frac{2x}{x+3}$, k) Notăm $y = \frac{1+x}{1-x}$.

2. a) Domeniul de convergenţă este $D = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Pentru $x \in D$, suma seriei este $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-3x)^n = \frac{1}{1-(-3x)} = \frac{1}{1+3x}$,

   b) $R = \infty$, deci $D = \mathbb{R}$. Avem $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n!} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = xe^{-x}$,

   c) $D = (-1, 1)$. $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = x \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$,

   d) $D = (-1, 1)$. $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n(x_n)' = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} nx^n\right)' = x \left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)'$ (folosind punctul c).

   e) $D = [-1, 1)$. Pentru $x \in (-1, 1)$, avem $S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^n)'}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. Cum $S(0) = 0$ şi S e contină pe D, rezultă că pentru $x \in D$, avem $S(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,\mathrm{dt} = -\ln(1-t)|_0^x = -\ln(1-x)$, f) $D = [-3, 3)$, $S(x) = -3\ln(3-x)$,

   g) $D = (-1, 1)$. Pentru $x \in (-1, 1)$, $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^{2n})'}{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-1} = x \sum_{n=1}^{\infty} x^{2(n-1)} = x \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{x}{1-x^2}$. Rezultă $S(x) = -\frac{1}{2}\ln(1-x^2)$.

   h) $D = (-1, 1)$. Pentru $x \in (-1, 1)$, $S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$. Rezultă $S(x) = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$.

   i) $D = [-1, 1]$. Pentru $x \in (-1, 1)$, $S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x^{2n+1})'}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ $= \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2}$. Rezultă că $S(x) = \operatorname{arctg} x$, pentru $x \in D$.

3. $f(x) = (x+4)^{\frac{1}{2}}$, $f'(x) = \frac{1}{2}(x+4)^{-\frac{1}{2}}$, $f''(x) = -\frac{1}{4}(x+4)^{-\frac{3}{2}}$, $f'''(x) = \frac{3}{8}(x+4)^{-\frac{5}{2}}$. Deci $T_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}x^2$. $\sqrt{4.5} = f(0.5) \approx T_2(0.5)$. Există $c \in (0, 0.5)$ astfel încât eroarea $|R_2(0.5)| = \frac{|f'''(c)|}{3!}(0.5)^3 = \frac{3}{8 \cdot 6 \cdot 8 (c+4)^{-\frac{5}{2}}} <$ $< \frac{1}{128 \cdot 32} = \frac{1}{4096}$.

4. Scriem $f(x) = (x+4)^{-\frac{1}{2}}$ şi folosim aceeaşi metodă ca la 3.

5. Avem $f(x) = \ln(x+1)$, $f'(x) = \frac{1}{x+1}$, $f''(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$, $f'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$, $f^{(4)}(x) = \frac{-6}{(x+1)^4}$. Atunci $T_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$. $\ln(1,2) = f(0,2) \approx T_3(0,2) = 0,2 - \frac{0,04}{2} + \frac{0,008}{3}$. Există $x \in (0; 0,2)$ astfel încât eroarea $|R_2(0,2)| = \frac{1}{4(c+1)^4}(0,2)^4 < \frac{1}{4 \cdot 5^4}$.

6. Similar cu 3. si 4.

7. Considerăm fuţiile $f(x) = \sin x$, respectiv $f(x) = \cos x$, $f(x) = e^x$ şi aproximăm valorile lor în $0,2$, respectiv $0,2$, $-0,5$.

8. Se aplică formula lui Taylor. Pentru a doua parte, avem $P(X) = T_3(X)$.

9. a) Pentru $x \in (-1,1)$, $f(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{3}{2})\cdots(-\frac{2n-1}{2})}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!} x^n$. Identitatea are loc de fapt pentru $x \in (-1,1]$, deoarece $(-1,1]$ este domeniul de convergenţă al seriei de puteri,

   b) $\mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, c) $\mathrm{sh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$,

   d) $\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{dt} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n}\,\mathrm{dt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^x t^{2n}\,\mathrm{dt} =$
   $= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1} x^{2n+1}$, i) $f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}} + \frac{1}{1-x} =$
   $-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} + \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) x^n$.

10. a) $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, deci $\frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$. Prin urmare $S = \int_0^{1/2} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{dx} = \int_0^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}\,\mathrm{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^{1/2} x^{2n}\,\mathrm{dx} =$
    $= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)2^{2n+1}}$. Fie $a_n = \frac{1}{(2n+1)!(2n+1)2^{2n+1}}$ şi $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$. Atunci:

    $$|S - S_n| \le a_{n+1} = \frac{1}{(2n+3)!(2n+3)2^{2n+3}} < \frac{1}{1000} \Leftrightarrow n \ge 1, \text{deci } S \approx S_1 = a_0 - a_1,$$

    e) $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ şi $1 - \cos x = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$, deci $\frac{1-\cos x}{x^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-2}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+2)!}$. Avem

    $$S = \int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^2}\,\mathrm{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+2)!} \int_0^1 x^{2n}\,\mathrm{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+2)!(2n+1)}$$

    Fie $a_n = \frac{1}{(2n+2)!(2n+1)}$ şi $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$. Rezultă

    $$|S - S_n| \le a_{n+1} = \frac{1}{(2n+4)!(2n+3)} < \frac{1}{1000} \Leftrightarrow n \ge 1, \text{deci } S \approx S_1 = a_0 - a_1.$$

    f) Avem $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$, deci $\cos x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n}}{(2n)!}$.

    $$S = \int_0^1 \cos(x^2)\,\mathrm{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^1 x^{4n}\,\mathrm{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(4n+1)}$$

    Fie $a_n = \frac{1}{(2n)!(4n+1)}$ si $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$. Avem

    $$|S - S_n| \le a_{n+1} = \frac{1}{(2n+2)!(4n+5)} < \frac{1}{1000} \Leftrightarrow n \ge 2,$$

    deci $S \approx S_2 = a_0 - a_1 + a_2$.

g) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$ şi $1 - e^{-x} == \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} x^{n+1}$. $S = \int_0^{1/2} \frac{1-e^{-x}}{x}\, \mathrm{dx} = \int_0^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} x^n\, \mathrm{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!(n+1)2^{n+1}}$.

Fie $a_n = \frac{1}{(n+1)!(n+1)2^{n+1}}$. $a_{n+1} = \frac{1}{(n+2)!(n+2)2^{n+2}} < \frac{1}{1000} \Leftrightarrow n \geq 2$, deci $S \approx a_0 - a_1 + a_2$.

h) Cum $\ln(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$, rezultă că $S = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(x+1)}{x}\, \mathrm{dx} = \int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n\, \mathrm{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}$. Fie $a_n = \frac{1}{(n+1)^2 2^{n+1}}$. $a_{n+1} = \frac{1}{(n+2)^2 2^{n+2}} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow n \geq 3$, deci $S \approx a_0 - a_1 + a_2 - a_3$.

Pagina 71

1. D este interiorul elipsei $\partial D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + 4y^2 = 1\}$. D este o mulţime deschisă. $\overline{D} = D \cup \partial D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + 4y^2 \leq 1\}$.

2. K este compactă (închisă şi mărginită), conexă dar nu este simplu conexă.

3. Evident, $||x||_p \geq 0$ şi $||x||_p = 0$ dacă şi numai dacă $x = 0_{\mathbb{R}^n}$. Fie $a \in \mathbb{R}$. Atunci $||ax||_p = (|ax_1|^p + \cdots + |ax_n|^p)^{\frac{1}{p}} = (|a|^p(|x_1|^p + \cdots + |x_n|_p)^p)^{\frac{1}{p}} = |a|||x||_p$.

6. a) f este contină pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Pentru $(x,y) \neq (0,0)$, avem

$$|f(x,y) - 0| = \left| \frac{x^3 + 2y^3}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{|x|^3}{x^2+y^2} + 2\frac{|y|^3}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{x^2+y^2}|x| + 2\frac{y^2}{x^2+y^2}|y| \leq |x| + 2|y|.$$

Cum $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(|x|+2|y|) = 0$, rezultă că $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, deci f este continuă în $(0,0)$. În concluzie, f e continuă pe $\mathbb{R}^2$.

b) f este contină pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Pentru $(x,y) \neq (0,0)$, avem

$$|f(x,y) - 0| = \left| \frac{x^2 + 2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq \frac{|x|^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2\frac{|y|^2}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$
$$= \sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2}}|x| + 2\sqrt{\frac{y^2}{x^2+y^2}}|y| \leq |x| + 2|y|.$$

Cum $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(|x| + 2|y|) = 0$, rezultă că $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \neq 1 = f(0,0)$, deci f este nu continuă în $(0,0)$.

c) f este contină pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Fie şirul $(x_n, y_n) = (0, \frac{1}{n})$, $n \geq 1$. Evident $(x_n, y_n) \neq (0,0)$, $(\forall) n \geq 1$, şi $\lim_n (x_n, y_n) = 0$. Avem $f(x_n, y_n) = \frac{1}{n} \xrightarrow{n} 0$.

Fie şirul $(x_n', y_n') = (\frac{1}{n}, 0)$, $n \geq 1$. Evident $(x_n', y_n') \neq (0,0)$, $(\forall) n \geq 1$, şi $\lim_n (x_n', y_n') = 0$. Avem $f(x_n', y_n') = 2 \xrightarrow{n} 2$.

Prin urmare, nu există $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, deci f nu e continuă în $(0,0)$.

d) f este continuă pe $\mathbb{R}$.

Pagina 73

1. a) Fie $x \neq y \in \mathbb{R}$. Atunci $|f(x) - f(y)| = |ax - b - ay + b| = |a||x - y|$. Dacă $k = |a| < 1$, atunci f este o contracţie de factor k. Dacă $k = |a| \leq 1$, atunci f nu e contraţie.

   b) f e contracţie de factor $k = |q|$, dacă şi numai dacă $|q| < 1$.

   c) Evident, pentru $x \geq e$, avem $f(x) = \ln x + e - 1 \geq e$, deci $f : [e, \infty) \to [e, \infty)$. Avem $f'(x) = \frac{1}{x}$ şi $k = \sup_{x \in [e,\infty)} |f'(x)| = \frac{1}{e} < 1$, deci f e contracţie de factor $\frac{1}{e}$.

   d) $f'(x) = \left(\frac{2x}{x^2+4}\right)' = \frac{2(x^2+4)-4x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{8-2x^2}{(x^2+4)^2}$. Se arată că $k = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| = \frac{1}{2}$, deci f e o contracţie.

2. Avem $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-2}{2x^2}$ şi $f''(x) = \frac{2}{x^3}$. Evident, $f'' > 0$ pe $[\sqrt{2}, \frac{3}{2}]$, deci f' este crescătoare. De asemenea, $f' \geq 0$ pe $[\sqrt{2}, \frac{3}{2}]$, deci f este crescătoare. Avem $f(\sqrt{2}) = \sqrt{(2)}$, $f'(\sqrt{2}) = 0$, $f(\frac{3}{2}) = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{17}{12}$ şi $f'(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$. Având în vedere cele de mai sus, rezultă că:
   $f([\sqrt{2}, \frac{3}{2}]) = [\sqrt{2}, \frac{17}{12}] \subset [\sqrt{2}, \frac{3}{2}]$ şi $k = \sup_{x\in[\sqrt{2},\frac{3}{2}]} |f'(x)| = \frac{1}{18} < 1$. Deci f e o contracţie cu factor $k = \frac{1}{18}$.
   Fie şirul $x_0 := \frac{3}{2}$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \geq 1$. Din teorema de punct fix a lui Banach rezultă că $(x_n)_n$ converge la $\sqrt{2}$ şi

$$|x_n - \sqrt{2}| \leq \frac{k^n}{1-1}|x_1 - x_0| = \frac{1}{18^n} \cdot \frac{18}{17} \cdot \left|\frac{17}{12} - \frac{3}{2}\right| == \frac{1}{18^{n-1} \cdot 17 \cdot 12}.$$

   Observă că $\frac{1}{18^{n-1}\cdot 17\cdot 12} < \frac{1}{1000} \Leftrightarrow n \geq 2$. Deci

$$\sqrt{2} \approx x_2 = f(x_1) = f(\frac{17}{12}) = \frac{17}{24} + \frac{12}{17} = \frac{577}{408} = 1.41421\ldots.$$

3. Se rezolvă similar cu exerciţiul 2.

4. a) Ecuaţia $x^3+4x-1 = 0$ are o unică soluţie reală α, deoarece funcţia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^3 + 4x - 1$ este strict crescătoare şi bijectivă. Cum $h(0) = -1 < 0$ şi $h(1) = 4 > 0$, rezultă că $\alpha \in [0, 1]$. Observăm că $x^3 + 4x - 1 = x(x^2 + 4) - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{x^2+4}$. Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$. Avem $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+4)^2}$ şi $f''(x) = \frac{-2(x^2+4)^2+2x\cdot 2\cdot 2x(x^2+4)}{(x^2+4)^3} = \frac{6x^2-8}{(x^2+4)^3}$.
   Cum $f'' < 0$ pe $[0, 1]$, rezultă că f' e descrescătoare. Cum $f' \leq 0$ pe $[0, 1]$ rezultă că f e descrescătoare. Deci $f([0, 1]) = [\frac{1}{5}, \frac{1}{4}] \subset [0, 1]$ şi $k := \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)| = |f'(1)| = \frac{2}{25} < 1$. Prin urmare, f este o contraţie. Fie $x_0 = 0$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \geq 0$. Din Teorema lui Banach de punct fix, avem $\lim_n x_n = \alpha$ şi

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0| = \left(\frac{2}{25}\right)^n \cdot \frac{25}{23} \cdot \left|\frac{1}{4} - 0\right| = \frac{2^{n-2}}{25^{n-1} \cdot 23}.$$

   Observăm că $\frac{2^{n-2}}{25^{n-1}\cdot 23} \leq \frac{1}{1000} \Leftrightarrow n \geq 3$. Deci $\alpha \approx x_3$ cu o eroare $< 10^{-3}$.
   b,c) Se rezolvă în mod similar cu a).

5. Fie $f(x) = x^3 - 2$, $x \in [1, 2]$. Din $x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2 < 0$, $(\forall)x \in [1, 2]$, se poate deduce că $|f''(x)f(x)| \leq \frac{1}{2}f'(x)^2$, $(\forall)x \in [1, 2]$, deci putem aplica metoda lui Newton pentru a aproxima pe $\sqrt[3]{2}$, care este soluţia ecuaţiei $f(x) = 0$. Fie $x_0 = 1$, $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n \geq 0$. Din condiţia $|\sqrt[3]{2} - x_n| < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{3} < \frac{1}{100}$, rezultă $n \geq 7$, deci $\sqrt[3]{2} \approx x_7$.

Pagina 83

1. a) Pentru $(x, y) \neq (0, 0)$, avem $|f(x, y) - 0| = \left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^2}{x^2+y^2}|y| \leq |y|$. Cum $\lim_{y\to 0} |y| = 0$, rezultă că $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$ deci f e continuă în $(0, 0)$. Avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0.$$

Pe de altă parte

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

dar această limită nu există (alegând $(x_n, y_n) = (0, \frac{1}{n})$ şi $(x'_n, y'_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, obţinem $\lim_n f(x_n, y_n) = 0$ şi $\lim_n f(x'_n, y'_n) = 1$). Deci f nu e diferenţiabilă în $(0, 0)$. De aici rezultă că f nu e de clasă C^1 în $(0, 0)$.

b) f e continuă în $(0, 0)$, nu e diferenţiabilă în $(0, 0)$ şi $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

c) f este de clasă C^1: Avem $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x\sqrt{x^2 + y^2}) = \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ şi $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$. Similar, $df dy = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ şi $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

d) f este diferenţiabilă în $(0, 0)$ cu $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, dar nu este de clasă C^1 în $(0, 0)$.

f) f este de clasă C^1, dar nu e de clasă C^2.

2. Avem $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(e^{x^2-y^2}) = 2xe^{x^2-y^2}$ şi $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(e^{x^2-y^2}) = -2ye^{x^2-y^2}$. Rezultă că $df = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{dy} = 2xe^{x^2-y^2}\,\mathrm{dx} - 2ye^{x^2-y^2}\,\mathrm{dy}$ şi $df(1, 1) = 2\,\mathrm{dx} - 2\,\mathrm{dy}$.

Avem

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(2xe^{x^2-y^2}) = 2e^{x^2-y^2} + 4x^2e^{x^2-y^2},\\
&\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2xe^{x^2-y^2}) = -4xye^{x^2-y^2},\\
&\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(-2ye^{x^2-y^2}) = -2e^{x^2-y^2} + 4y^2e^{x^2-y^2}.\\
&d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\mathrm{dx}^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,\mathrm{dy}^2 =\\
&= (2+4x^2)e^{x^2-y^2}\,\mathrm{dx}^2 - 8xye^{x^2-y^2}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} + (-2+4y^2)e^{x^2-y^2}\,\mathrm{dy}^2,
\end{aligned}$$

Deci $d^2 f(1,1) = 6\,\mathrm{dx}^2 - 8\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} + 2\,\mathrm{dy}^2$.

6. a) $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Avem $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2}$, deci $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2(x^2+y^2)-4x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$. Similar, din simetrie, avem $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$. Deci $\Delta f = 0$.

   f) $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$. Deci $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{2} \cdot 2x \cdot (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} = -x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}$. Rezultă $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} - x \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) 2x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} = -(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}$. Din simetrie, obţinem $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3y^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}$ şi $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3z^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}$. Deci $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$.

7. Notăm $u(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2$ şi $v(x,y,z) = xye^z$. Atunci $f = (u,v)$ şi
   $J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -2y & 2z \\ ye^z & xe^z & xye^z \end{pmatrix}$, $J_f(1,1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ e & e & e \end{pmatrix}$.

8. $J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 & -3y^2 \\ \frac{2x}{x^2+y^2} & \frac{2y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$. Deci $\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \det J_f(x,y) = \frac{6x^y+6xy^2}{x^2+y^2}$.

9. Cum $z(x,y) = \varphi(bx-ay)$, rezultă $\frac{\partial z}{\partial x} = b\varphi'(bx-ay)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -a\varphi'(bx-ay)$. Deci $E = a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 0$,

10. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\varphi'(x^2+y^2)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y\varphi'(x^2+y^2)$, deci $E = y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

11. $E = (x^2+y^2)z$, 12. $E = 0$.

13. $\frac{\partial z}{\partial x} = \phi'(x-at) + \psi'(x+at)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \phi''(x-at) + \psi''(x+at)$. De asemenea, $\frac{\partial z}{\partial t} = -a\phi'(x-at) + a\psi'(x+at)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2\phi''(x-at) + a^2\psi''(x+at)$.

15. Din $u(x,y) = \varphi(x^2-y^2)$, rezultă $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x\varphi'(x^2-y^2)$ şi $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y\varphi'(x^2-y^2)$. Atunci $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\varphi'(x^2-y^2) + 4x^2\varphi''(x^2-y^2)$ şi $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2\varphi'(x^2-y^2) + 4y^2\varphi''(x^2-y^2)$. Din $\Delta u = 0$, rezultă $4(x^2+y^2)\varphi''(x^2-y^2) = 0$ pentru orice $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. De aici, $\varphi'' = 0$ pe $\mathbb{R}$, deci $\varphi(t) = at + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. În concluzie, $u(x,y) = a(x^2-y^2) + b$.

16. Avem $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2y}{1+2xy}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x}{1+2xy}$, $f(0,1) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 0$. Rezultă:

$$T_1(x,y) = f(0,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,1)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,1)(y-1) = 2(x-1) = 2x.$$

Avem $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{4y^2}{(1+2xy)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{2+4xy-4y^2}{(1+2xy)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{4x^2}{(1+2xy)^2}$. Rezultă:

$$T_2(x,y) = T_1(x,y) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1)x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,1)x(y-1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1)(y-1)^2\right),$$

deci $T_2(x,y) = -2x^2 + 2xy$.

20. Avem $\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix} = 0$, deci u, v, w sunt funcţional dependente. Se observă că $v = u^2 - 2w$.

22. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}$, deci $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$. Similar $\frac{\partial}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial u} - a\frac{\partial}{\partial v}$. Rezultă $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$. Similar $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2a^2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$. Prin urmare, ecuaţia devine $4a^2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$.

Pagina 91

1. a) Rezolvăm sistemul $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y - 2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$ şi obţinem soluţia $(1,0)$, care ese punctul critic al lui f. Matricea Hessiană a lui f este $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = H_f(1,0)$. Cum $\Delta_1 = 2 > 0$ şi $\Delta_2 = 3 > 0$, rezultă că $(1,0)$ e punct de minim local al lui f.

b) Fie sistemul $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0 \ (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0 \ (2) \end{cases}$. Din (1) rezultă $y = x^2$. Înlocuind în (2), obţinem $x^4 - x = 0$, deci $x(x^3 - 1) = 0$. Atunci $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, deci $y_1 = 0$, $y_2 = 1$. Punctele critice ale lui f sunt $(0,0), (1,1)$. Avem $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$.

$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$. $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = -9 < 0$, deci $(0,0)$ nu e punct de extrem local.

$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$. $\Delta_1 = 6 > 0$, $\Delta_2 = 27 > 0$, deci $(1,1)$ e punct de minim local.

c) Fie sistemul $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4y = 0 \ (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 4x = 0 \ (2) \end{cases}$. Din (1) rezultă $y = x^3$. Înlocuind în (2), obţinem $x^9 - x = 0$, deci $x(x^8 - 1) = 0$. Atunci $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$ deci

$y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = -1$. Punctele critice ale lui f sunt $(0,0), (1,1), (-1,-1)$.
Avem $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}$.

$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$. $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = -16 < 0$, deci $(0,0)$ nu e punct de extrem local.

$H_f(1,1) = H_f(-1,-1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}$. $\Delta_1 = 12 > 0$, $\Delta_2 = 128 > 0$, deci $(1,1), (-1,-1)$ sunt puncte de minim local.

e) Fie sistemul $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = y - \frac{2}{x^2} = 0 \ (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x - \frac{5}{y^2} = 0 \ (2) \end{cases}$. Din (1) rezultă $y = \frac{2}{x^2}$. Înlocuind în (2), obţinem $x - \frac{5}{4}x^4 = 0$, deci $x(1 - \frac{5}{4}x^3) = 0$. Cum $x \neq 0$, rezultă $x^3 = \frac{4}{5} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{4}{5}} \Rightarrow y = 2\sqrt[3]{\frac{25}{16}} = \sqrt[3]{\frac{25}{2}}$. Deci $(\sqrt[3]{\frac{4}{5}}, \sqrt[3]{\frac{25}{2}})$ este punctul critic al lui f. Matricea Hessiană a lui f este

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{10}{y^3} \end{pmatrix}. \text{ Deci } H_f(\sqrt[3]{\frac{4}{5}}, \sqrt[3]{\frac{25}{2}}) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

$\Delta_1 = 5 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & \frac{4}{5} \end{vmatrix} = 3 > 0$, deci $(\sqrt[3]{\frac{4}{5}}, \sqrt[3]{\frac{25}{2}})$ e punct de minim local.

f) Fie sistemul $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 6xy - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases}$. Înlocuind $y = \frac{2}{x}$ în prima ecuaţie, obţinem $x^2 + \frac{4}{x^2} = 5$. Fie $t = x^2 \geq 0$. Avem $t^2 - 5t + 4 = 0$, cu soluţiile $t_1 = 1$, $t_2 = 4$.

Dacă $x^2 = 1 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1 \Rightarrow y_{1,2} = \pm 2$. Dacă $x^2 = 4 \Rightarrow x_{3,4} = \pm 2 \Rightarrow y_{3,4} = \pm 1$. Deci, punctele critice ale lui f sunt $(1,2), (-1,-2), (2,1), (-2,-1)$. De asemenea, $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix}$.

$H_f(1,2) = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$, $\Delta_1 = 6 > 0$, $\Delta_2 = -108 < 0 \Rightarrow (1,2)$ nu e extrem.

$H_f(-1,-2) = \begin{pmatrix} -6 & -12 \\ -12 & -6 \end{pmatrix}$, $\Delta_1 = -6 < 0$, $\Delta_2 = -108 < 0 \Rightarrow (-1,-2)$ nu e extrem.

$H_f(2,1) = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$, $\Delta_1 = 12 > 0$, $\Delta_2 = 108 > 0 \Rightarrow (2,1)$ e minim local.

$H_f(-2,-1) = \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}$, $\Delta_1 = -12 < 0$, $\Delta_2 = 108 > 0 \Rightarrow (-2,-1)$ e minim local.

g) Fie sistemul $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 2y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 24y^2 - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 = 2y \\ 12y^2 = x \end{cases}$. Înlocuind x în prima ecuaţie, obţinem $216y^4 = y \Leftrightarrow (216y^3 - 1)y = 0$. Atunci $y_1 = 0$, $y_2 = \frac{1}{6}$, deci $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{3}$. Punctele critice ale lui f sunt $(0,0)$ şi $(\frac{1}{3}, \frac{1}{6})$. De asemenea, $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -2 \\ -2 & 48y \end{pmatrix}$.

$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $\Delta_2 = -4 < 0 \Rightarrow (0,0)$ nu e extrem.

$H_f(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = 4 > 0 \Rightarrow (\frac{1}{3}, \frac{1}{6})$ e minim local.

h) Avem $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 4x + 2y + 2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 4y + 2x + 2z + 2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 2z + 2y + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{y+1}{1}, z = -3 - y$, deci înlocuind x şi z în a doua ecuaţie, obţinem $y = 5$, deci $x = -3, z = -8$. $(-3, 5, -8)$ este punctul critic al lui f. Avem $H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = H_f(-3, 5, 8)$.

Cum $\Delta_1 = 4 > 0$, $\Delta_2 = 12 > 0$ şi $\Delta_3 = 8 > 0$, rezultă că $(-3, 5, 8)$ este minim local.

i) Avem $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = yz - 1 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = xz - 1 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = xy - 1 = 0 \end{cases}$, deci $xy = xz = yz = 1$. Din $xz = yz$, rezulta $x = y$ (pentru că $z \neq 0$), deci $x^2 = 1$. Atunci $x_1 = 1, y_1 = 1, z_1 = 1$ şi $x_2 = -1, y_2 = -1, z_2 = -1$. Punctele critice ale lui f sunt $(1,1,1)$ şi $(-1,-1,-1)$.

Matricea Hessiană e $H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ x & y & 0 \end{pmatrix}$. Avem $H_f(1,1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Polinomul caracteristic asociat este $P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = -(\lambda - 2)(\lambda + 1)^2$, deci valorile proprii ale matricii $H_f(1,1,1)$ sunt $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$. Rezultă că $(1,1,1)$ nu e punct de extrem local. Similar se arată că $(-1,-1,-1)$ nu e punct de extrem local.

2. a) Fie $E(a,b) = (-2a + b - 3)^2 + (a+b)^2 + (2a + b + 1)^2$. Avem $\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial a} = -4(-2a + b - 3) + 2(a+b) + 4(2a + b + 1) = 18a + 2b + 16 = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial b} = 2(-2a + b - 3) + 2(a+b) + 2(2a + b + 1) = 2a + 6b - 4 = 0 \end{cases}$. De aici rezultă $a = -1$, $b = 1$, deci dreapta de regresie este $y = ax + b = -x + 1$. $y(3) = -3 + 1 = 2$.

3. Avem $(x^2 - xy + y^2 - 1)' = 2x - y - xy' + 2yy' = 0$, deci $y' = \frac{2x-y}{x-2y}$, dacă $x - 2y \neq 0$. Atunci $y'(1) = \frac{2-1}{1-2} = -1$. De asemenea:

$y'' = \left(\frac{2x-y}{x-2y}\right)' = \frac{(2-y')(x-2y)-(2x-y)(1-2y')}{(x-2y)^2}$, $y''(1) = \frac{(2-1)(1-2)-(2-1)(1-2)}{(1-2)^2} = 0$.

4. Avem $(2x \operatorname{arctg} \frac{y}{x})' = 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + 2x \frac{-y}{x^2} \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} = 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \frac{2xy}{x^2+y^2}$,

$y'(1) = 2 \operatorname{arctg} 0 - \frac{0}{1} = 0$.

5. a) Avem $\frac{\partial}{\partial x}(x \sin(y+z) + xz) = \sin(y+z) + z + x\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, deci $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\sin(y+z)+z}{x}$, pentru $x \neq 0$.

Similar $\frac{\partial}{\partial y}(x\sin(y+z)+xz) = x\cos(y+z)+x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, deci $\frac{\partial z}{\partial y} = -\cos(y+z)$, pentru $x \neq 0$.

6. $\begin{cases} (x+2y-z-2)' = 1+2y'-z' = 0 \ (1) \\ (x^2+y^2+z^2-2xy+3z-2)' = 2x+2yy'+2zz'-2y-2xy'+3z' = 0 \ (2) \end{cases}$.

Din (1) rezultă $z' = 1+2y'$. Înlocuind în (2), obţinem:

$2x+2yy'+2z+4zy'-2y-2xy'+3+6y' = 0$, deci $y' = \frac{-2x+2y-2z-3}{-2x+2y+4z+6}$, $y'(1) = -\frac{1}{2}$, $z'(1) = 1$.

7. a) Avem $(2xy^3+y-x^2)' = 2y^3+6xy^2y'+y'-2x = 0$, deci $y' = \frac{2x-2y^3}{6xy^2+1}$ pentru $6xy^2+1 \neq 0$. Dacă $y'(x) = 0$, atunci $2x-2y^3 = 0$. Prin urmare, punctele critice ale lui $y(x)$ sunt date de sistemul $\begin{cases} 2xy^3+y-x^2 = 0 \ (1) \\ 2x-2y^3 = 0 \ (2) \\ 6xy^2+1 \neq 0 \ (3) \end{cases}$. Din (2) avem $x = y^3$. Înlocuind în (1), obţinem $2y^6+y-y^6 = y^6+y = 0$. Deci $y_1 = 0$, $y_2 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = -1$. Avem $6x_1y_1^2+1 = 1 \neq 0$ şi $6x_2y_2^2+1 = -5 \neq 0$, deci $x_1 = 0$ şi $x_2 = 0$ sunt puncte critice pentru funcţia $y(x)$ (definită local în jurul lor).

Avem $y''(x) = \left(\frac{2x-2y^3}{6xy^2+1}\right)' = \frac{(2-6y^2y')(6xy^2+1)-(2x-2y^3)(6y^2+12xyy')}{(6xy^2+1)^2}$.

$y''(0) = \frac{2\cdot 1}{1^2} = 2 > 0$, deci $x_1 = 0$ e punct de minim local pentru $y(x)$.

$y''(-1) = \frac{2\cdot(-5)}{(-5)^2} = -\frac{2}{5} < 0$, deci $x_2 = -1$ e punct de maxim local pentru $y(x)$.

8. a) Avem $\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2-xz-yz+2x+2y+2z-2) = 2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}-z-\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial x}+2+2\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, deci $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2x+z-2}{-y+2z+2}$, pentru $y \neq 2z+2$.

Similar $\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+z^2-xz-yz+2x+2y+2z-2) = 2y+2z\frac{\partial z}{\partial y}-z-y\frac{\partial z}{\partial y}-x\frac{\partial z}{\partial x}+2+2\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, deci $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2y+z-2}{-y+2z+2}$, pentru $y \neq 2z+2$.

Dacă $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, atunci $z = 2x+2 = 2y+2$, de unde $x = y = \frac{z}{2}-1$. Rezultă $x^2+y^2+z^2-xz-yz+2x+2y+2z-2 = z^2+3z-4 = 0$, deci $z_1 = 1$, $z_2 = -4$, $x_1 = y_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = y^2 = -3$. Condiţia $y \neq 2z+2$ se verifică. Funcţia $z(x,y)$ are punctele critice: $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ cu $z(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}) = 1$ şi $(-3,-3)$ cu $z(-3,-3) = -4$. Matricea $H_z(x,y)$ este:

$$\begin{pmatrix} \frac{(-2+\frac{\partial z}{\partial x})(-y+2z+2)-2(-2x+z-2)\frac{\partial z}{\partial x}}{(-y+2z+2)^2} & \frac{\frac{\partial z}{\partial y}(-y+2z+2)-(-2x+z-2)(-1+2\frac{\partial z}{\partial y})}{(-y+2z+2)^2} \\ \frac{\frac{\partial z}{\partial y}(-y+2z+2)-(-2x+z-2)(-1+2\frac{\partial z}{\partial y})}{(-y+2z+2)^2} & \frac{(-2+\frac{\partial z}{\partial y})(-y+2z+2)-(-2y+z-2)(-1+2\frac{\partial z}{\partial y})}{(-y+2z+2)^2} \end{pmatrix}$$

$H_z(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{9} & 0 \\ 0 & -\frac{4}{9} \end{pmatrix}$. $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, deci $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ e punct de maxim local.

$H_z(-3,-3) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, deci $(-3,-3)$ e punct de minim local.

9. $F(x,y,\lambda) = x^2+y^2+\lambda(3x+2y-6)$. $\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 3\lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y + 2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 3x + 2y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3\lambda}{2} \\ y = -\lambda \\ -\frac{13}{2}\lambda = 6 \end{cases}$

   $\Rightarrow \lambda = -\frac{12}{13} \Rightarrow x = \frac{18}{13}$ şi $y = \frac{12}{13}$. Fie $\varphi(x,y) = F(x,y,-\frac{12}{13})$.

   Avem $H_\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = H_\varphi(\frac{18}{13}, \frac{12}{13})$. Rezultă că $(\frac{18}{13}, \frac{12}{13})$ e punct de minim local pentru φ, deci $(\frac{18}{13}, \frac{12}{13})$ e punct de minim local cu legături pentru f.

10. Similar cu 9: $(1,1)$ punct de minim local cu legături.

11. Din $x^2+y^2+z^2 = 3$, rezultă $z^2 = 3 - x^2 + y^2$, deci $z = \pm\sqrt{3-x^2-y^2}$. Determinăm extremele simple alte funcţiilor $f_1(x,y) = xy\sqrt{3-x^2-y^2}$ şi $f_2(x,y) = -xy\sqrt{3-x^2-y^2}$. Putem aplica şi metoda multiplicatorilor Lagrange: $F(x,y,z,\lambda) = xyz + \lambda(x^2+y^2+z^2-3)$. Rezolvăm sistemul:

    $\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = yz + 2x\lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = xz + 2y\lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = xy + 2z\lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2+y^2+z^2-3 = 0 \end{cases}$. Din primele ecuaţii rezultă $x^2 = y^2 = z^2$, deci $3x^2 = 3$. F are punctele critice $(1,1,1,-\frac{1}{2})$, $(1,1,-1,\frac{1}{2})$, $(1,-1,1,\frac{1}{2})$, $(1,-1,-1,-\frac{1}{2})$, $(-1,1,1,\frac{1}{2})$, $(-1,1,-1,-\frac{1}{2})$, $(-1,-1,1,-\frac{1}{2})$, $(-1,-1,-1,\frac{1}{2})$. Observăm că $f(1,1,1) = f(1,-1,-1) = f(-1,1,-1) = f(-1,-1,1) = 1$ şi $f(-1,1,1) = f(1,-1,1) = f(1,1,-1) = f(-1,-1,-1) = -1$. Cum sfera $x^2+y^2+z^2 = 3$ este o mulţime compactă, rezultă că funcţia continuă f e mărginită şi îsi atinge marginile pe ea. Totodată, puncte de extrem sunt puncte critice. Deci $(1,1,1), (1,-1,-1), (-1,1,-1)$ şi $(-1,-1,1)$ sunt puncte de maxim local condiţionat pentru f, iar $(-1,1,1), (1,-1,1), (1,1,-1)$ şi $(-1,-1,-1)$ sunt puncte de minim local condiţionat pentru f.

12. Determinăm valoarea minimă a funcţiei $f(x,y) = (x-2)^2 + y^2$ cu legătura $y^2 = 2x$.

13. Scriem $z = a-x-y$ şi determinăm minimul funcţiei $\varphi(x,y) = xy(a-x-y)$. Se poate folosi şi metoda multiplicatorilor Lagrange: $F(x,y,z,\lambda) = xyz+\lambda(x+y+z-6)$. Rezolvăm sistemul $\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = yz + \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = xz + \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = xy + \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x+y+z-6 = 0 \end{cases}$. Rezultă $x = y = z = 2$ şi $\lambda = -4$. Avem $\varphi(x,y,z) = xyz - 4(x+y+z) + 24$, care are matricea Hessiană $H_\varphi(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & y & z \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}$. Avem $H_\varphi(2,2,2) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, altfel spus $d^2\varphi(2,2,2) = 4\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} + 4\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dz} + 4\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz}$.

    Din $x+y+z-6 = 0$ rezultă $\mathrm{dx}+\mathrm{dy}+\mathrm{dz} = 0$, deci $\mathrm{dz} = -\mathrm{dx}-\mathrm{dy}$. Atunci $d^2\varphi(2,2,2) = 4\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} + 4(\mathrm{dx}+\mathrm{dy})(-\mathrm{dx}-\mathrm{dy}) = -4\,\mathrm{dx}^2 - 4\,\mathrm{dy}^2 - 4\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$, deci $d^2\varphi(2,2,2) = -(2\,\mathrm{dx}+\mathrm{dy})^2 - 3\,\mathrm{dy}^2$ care este negativ definită. Deci $(2,2,2)$ este punct de maxim local condiţionat pentru f.

14. **I**. $x^2+y^2<1$. $\frac{\partial f}{\partial x}=2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$, $\frac{\partial f}{\partial x}=2y-2=0 \Rightarrow y=1$. Cum $\left(\frac{3}{2}\right)^2+1^2=\frac{13}{4}\geq 1$, rezultă că $(\frac{3}{2},1)$ nu e în domeniul $x^2+y^2<1$, deci f nu are puncte critice în $x^2+y^2<1$.

    II. $x^2+y^2=1$. Fie $F(x,y,\lambda)=x^2+y^2-3x-2y+1+\lambda(x^2+y^2-1)$.

    $$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}=2x-3+2\lambda x=0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}=2y-2+2\lambda y=0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}=x^2+y^2-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2(1+\lambda)} \\ y=\frac{1}{1+\lambda} \\ \frac{9}{4(1+\lambda)^2}+\frac{1}{(1+\lambda)^2}=1 \end{cases} \Rightarrow (1+\lambda)^2=\frac{13}{4} \Rightarrow$$

    $\lambda_{1,2}=-1\pm\frac{\sqrt{13}}{2}$.. Thus $x_1=\frac{3}{\sqrt{13}}$, $y_1=\frac{2}{\sqrt{13}}$ şi $x_1=-\frac{3}{\sqrt{13}}$, $y_1=-\frac{2}{\sqrt{13}}$.

    Avem $f(\frac{3}{\sqrt{13}},\frac{2}{\sqrt{13}})=2-\sqrt{13}$ şi $f(-\frac{3}{\sqrt{13}},-\frac{2}{\sqrt{13}})=2+\sqrt{13}$, deci $(\frac{3}{\sqrt{13}},\frac{2}{\sqrt{13}})$ este minim local condiţionat şi $(-\frac{3}{\sqrt{13}},-\frac{2}{\sqrt{13}})$ este maxim local condiţionat.

15. **I**. $x^2+2y^2<1$. $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$ implică $x=y=0$. Cum $0^2+2\cdot 0^2<1$, rezultă că $(0,0)$ e punctul critic al lui f în domeniul $x^2+2y^2<1$. Avem $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ şi $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=1$, deci $H_f(0,0)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Cum $\Delta_2=-1<0$, $(0,0)$ nu e un punct de minim local.

    II. $x^2+2y^2=1$. Fie $F(x,y,\lambda)=xy+\lambda(x^2+2y^2-1)$. $\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}=y+2\lambda x=0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}=x+4\lambda y=0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}=x^2+2y^2-1=0 \end{cases}$

    $\Rightarrow y=-2\lambda x \Rightarrow x-8\lambda^2 x=0 \Rightarrow x(1-8\lambda^2)=0$. Dacă $x=0$, atunci $y=0$, o contradicţie. Deci $1-8\lambda^2=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

    Dacă $\lambda=\frac{1}{2\sqrt{2}}$, atunci $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}x$ şi $2x^2-1=0$. Prin urmare $x_{1,2}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ şi $y_{1,2}=\mp\frac{1}{2}$.

    Dacă $\lambda=-\frac{1}{-2\sqrt{2}}$, atunci $y=\frac{1}{\sqrt{2}}x$ şi $2x^2-1=0$. Prin urmare $x_{3,4}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ şi $y_{3,4}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

    Cum $f(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2})=f(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2})=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ şi $f(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2})=f(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2})=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}),(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2})$ sunt puncte de maxim local condiţionat, $(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2}),(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2})$ sunt puncte de minim local condiţionat.

16. Similar cu 14: $(0,0)$ e punct de minim local în $x^2+4y^2<1$. $(1,0)$, $(-1,0)$ sunt puncte de maxim local condiţionat şi $(0,\frac{1}{2})$, $(0,-\frac{1}{2})$ sunt puncte de minim local condiţionat.

4.2 Exerciţii din capitolul 2

Pagina 113

1. a) $\int(2+3x-5x^3)\,\mathrm{dx} = 2\int 1\,\mathrm{dx} + 3\int x\,\mathrm{dx} - 5\int x^3\,\mathrm{dx} = 2x + \frac{3x^2}{2} - \frac{5x^4}{4} + \mathcal{C}$.

   b) $\int(\frac{2}{x} + 2\sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2})\,\mathrm{dx} = 2\ln x + 3x\sqrt{x} - \frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} + \mathcal{C}$.

   c) $\int(x^{\sqrt{2}} - \frac{3}{x^3} + \frac{2}{x})\,\mathrm{dx} = \frac{x^{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1} + \frac{3}{2x^2} + 2\ln x + \mathcal{C}$.

   d) $\int(2^x + 3^{x+1})\,\mathrm{dx} = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{3^{x+1}}{\ln 3} + \mathcal{C}$.

   e) $\int(3e^{2x} + e^{-x})\,\mathrm{dx} = \frac{3e^{2x}}{2} - e^{-x} + \mathcal{C}$.

   f) $\int \frac{\mathrm{dx}}{x^2+4} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + \mathcal{C}$

   g) $\int \frac{\mathrm{dx}}{16x^2-9} = \frac{1}{16}\int \frac{\mathrm{dx}}{x^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{1}{24}\ln\left|\frac{4x-3}{4x+3}\right| + \mathcal{C}$.

   h) $\int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{x^2-4}} = \ln(x + \sqrt{x^2-4}) + \mathcal{C}$.

   i) $\int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{2x^2+3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{x^2+\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln(x + \sqrt{x^2+\frac{3}{2}}) + \mathcal{C}$.

   j) $\int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{1-9x^2}} = \frac{1}{3}\arcsin(3x) + \mathcal{C}$.

2. f admite primitive dacă şi numai dacă f e contină în 0. Deci $a = 1$. O primitivă a lui f este de forma $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + x + c_1 \\ \frac{2^x}{\ln 2} + c_2 \end{cases}$. Cum F e în particular continuă în 0 rezultă $c_1 = \frac{1}{\ln 2} + c_2$.

3. Pentru $x \neq 0$, $f(x) = \left(x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. Pentru $x = 0$, $f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x} = \lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. Nu există $\lim_{x\to 0} f(x)$, deci f nu e continuă în 0. Presupunem că g ar avea o primitivă G. Atunci $F+G$ ar fi o primitivă pentru $f+g$. Dar $(f+g)(x) = \begin{cases} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, deci $f+g$ are un punct de discontinutate de speţa 1 în 0, deci nu are primitive. Contradiţie!

4. a) $\int \ln x\,\mathrm{dx} = \int x'\ln x\,\mathrm{dx} = x\ln x - \int 1\,\mathrm{dx} = x\ln x - x + \mathcal{C}$.

   b) $\int x^2\ln x\,\mathrm{dx} = \frac{x^3\ln x}{3} - \int \frac{x^2}{3}\,\mathrm{dx} = \frac{x^3\ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + \mathcal{C}$.

   c) $\int x\ln^2 x\,\mathrm{dx} = \frac{x^2\ln^2 x}{2} - \int x\ln x\,\mathrm{dx}$.

   d) $\int \ln(x^2+1)\,\mathrm{dx} = x\ln(x^2+1) - \int \frac{x^2}{x^2+1}\,\mathrm{dx} = x\ln(x^2+1) - x + \operatorname{arctg} x + \mathcal{C}$.

   e) $\int xe^x\,\mathrm{dx} = (x-1)e^x + \mathcal{C}$.

   f) $\int x^2e^x\,\mathrm{dx} = (x^2-2x+2)e^x + \mathcal{C}$.

   g) $\int x\cos x\,\mathrm{dx} = x\sin x + \cos x + \mathcal{C}$.

   h) $\int x^2\sin x\,\mathrm{dx} = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,\mathrm{dx}$.

   i) $\int \arcsin x\,\mathrm{dx} = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + \mathcal{C}$.

   k) $\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{dx} = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{dx} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \mathcal{C}$.

5. a) $\int(x^2-x+1)e^{2x}\,\mathrm{dx} = (ax^2+bx+c)e^{2x}+\mathcal{C}$. Din $((ax^2+bx+c)e^{2x})' = (2ax^2+(2a+2b)x+2c+b)e^{2x} = x^2-x+1$ rezultă $a=\frac{1}{2}$, $b=-1$ şi $c=1$.

   b) $\int(x^2+1)\cos x\,\mathrm{dx} = (ax^2+bx+c)\cos x+(ex^2+dx+f)\sin x+\mathcal{C}$. Se explicitează condiţia $((ax^2+bx+c)\cos x+(ex^2+dx+f)\sin x)' = (x^2+1)\cos x$ pentru a determina a,b,c,d,e şi f.

   c) $\int(2x+1)\sin 2x\,\mathrm{dx} = (ax+b)\cos 2x+(cx+d)\sin 2x+\mathcal{C}$.

   d) $\int e^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{dx} = e^{ax}(M\cos(bx)+N\sin(bx))+\mathcal{C}$. Din $(e^{ax}(M\cos(bx)+N\sin(bx)))' = e^{ax}\cos(bx)$ rezultă $M=\frac{a}{a^2+b^2}$, $N=\frac{b}{a^2+b^2}$.

   Similar, $\int e^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{dx} = e^{ax}(\frac{-b}{a^2+b^2}\cos(bx)+\frac{a}{a^2+b^2}\sin(bx))+\mathcal{C}$.

   3) $\int xe^{2x}\cos(3x)\,\mathrm{dx} = e^{2x}((ax+b)\cos(3x)+(cx+d)\sin(3x))+\mathcal{C}$.

6. a) $\int\sqrt{x^2-4}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-4}-4\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|)+\mathcal{C}$.

   b) $\int\sqrt{4x^2+9}\,\mathrm{dx} = x\sqrt{x^2+\frac{9}{4}}+\frac{9}{4}\ln(x+\sqrt{x^2+\frac{9}{4}})+\mathcal{C}$.

   c) $\int\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}(x\sqrt{4-x^2}+\arcsin\frac{x}{2})+\mathcal{C}$.

7. a) $I_0=\int e^x\,\mathrm{dx} = e^x+\mathcal{C}$. Pentru $n\geq 1$, $I_n=\int x^ne^x\,\mathrm{dx} = x^ne^x-nI_{n-1}$.

   b) $I_0=-\sin x+\mathcal{C}$. $I_1=x\sin x+\cos x+\mathcal{C}$. Pentru $n\geq 2$, $I_n=\int x^n\cos x\,\mathrm{dx} = x^n\sin x-n\int x^{n-1}\sin x\,\mathrm{dx} = x^n\sin x-nx^{n-1}\sin x+n(n-1)I_{n-2}$.

   d) $I_0=x+\mathcal{C}$ şi $I_n=\int\ln^n x\,\mathrm{dx} = x\ln^n x-nI_{n-1}$, $n\geq 1$.

8. a) Fie $u=2x+3$. Atunci $\mathrm{dx}=\frac{1}{2}\,\mathrm{du}$ şi $\int(2x+3)^4\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int u^4\,\mathrm{dx} = \frac{u^5}{5}+\mathcal{C} = \frac{(2x+3)^5}{5}+\mathcal{C}$.

   b) Fie $u=x^2+4$. Atunci $\mathrm{du}=2x\,\mathrm{dx}$ şi $\int x(x^2+4)^6\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int u^6\,\mathrm{du} = \frac{u^7}{14}+\mathcal{C} = \frac{(x^2+4)^7}{14}+\mathcal{C}$.

   c) $\int\frac{2x+3}{(x^2+3x+1)}\,\mathrm{dx} = \ln(x^2+3x+1)+\mathcal{C}$.

   d) $\int\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{dx} = -\operatorname{arctg}(\cos x)+\mathcal{C}$.

   e) $\int\frac{x}{x^4+1}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}x^2+\mathcal{C}$

   f) $\int\frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}\,\mathrm{dx} = \ln(e^x+\sqrt{e^{2x}+1})+\mathcal{C}$.

   g) $\int\frac{\mathrm{dx}}{\frac{1}{x}\sqrt{1+\ln x}} = \frac{2}{3}(1+\ln x)^{\frac{3}{2}}+\mathcal{C}$.

   h) $\int\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln^2 x}{2}+\mathcal{C}$.

   i) $\int x\operatorname{tg}(x^2)\,\mathrm{dx} = -\frac{1}{2}\ln|\cos(x^2)|+\mathcal{C}$, $u=x^2$

   j) $\int\frac{\operatorname{sh}(\ln x)}{x} = \operatorname{ch}(\ln x)+\mathcal{C}$.

9. a) Fie $x=t^2$. Atunci $\mathrm{dx}=2t\,\mathrm{dt}$ şi $\int\frac{\sqrt{x}}{x+2}\,\mathrm{dx} = \int\frac{t}{t^2+2}2t\,\mathrm{dt} = 2\int\left(1-\frac{2}{t^2+2}\right)\mathrm{dt} =$
   $= 2t-2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}+\mathcal{C} = 2\sqrt{x}-2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{2}}+\mathcal{C}$.

   b) Fie $x=t^2$. Atunci $\int\frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{dx} = 2\int\frac{t+t^3}{1+t}\,\mathrm{dt} = 2\int\left(t^2-t+2-\frac{2}{t+1}\right)\mathrm{dt} = \frac{2t^3}{3}-t^2+2t-4\ln|t+1|+\mathcal{C} = \frac{2x\sqrt{x}}{3}-x+2\sqrt{x}-4\ln(\sqrt{x}+1)+\mathcal{C}$.

   c) $\int e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{dx} = 2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}+\mathcal{C}$.

   d) $\int\frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = 5\left(\frac{\sqrt{x}}{3}-\frac{\sqrt[3]{x}}{2}+\sqrt[6]{x}-\ln(\sqrt[6]{x}+1)\right)+\mathcal{C}$.

10. a) $\int (x^3 + \frac{1}{(x-2)^3} + \frac{2}{x+3})\,\mathrm{dx} = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2(x-2)^2} + 2\ln(x+3) + \mathcal{C}$.
b) $\int \frac{x}{x^2+2x+4}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1-1}{x^2+2x+4}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+4) - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{dx}}{(x+1)^2+3} =$
$= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+4) - \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}} + \mathcal{C}$.
d) $\int \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^3}\,\mathrm{dx} = -\frac{1}{2(x^2-x+1)^2} + \mathcal{C}$.
e) $\int \frac{1}{(x^2+4)^2}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + \frac{x}{8(x^2+4)} + \mathcal{C}$.
f) Din $\frac{2x+1}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+2}$, obţinem $a(x-1)(x+2) + b(x+2) + c(x-1)^2 = 2x+1$, de unde $a = \frac{1}{3}$, $b = 1$ şi $c = -\frac{1}{3}$. Deci $\int \frac{2x+1}{(x-1)^2(x+2)}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{3}\ln(x-1) - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3}\ln(x+2) + \mathcal{C}$.
i) Avem $\frac{x^3+1}{x^3-2x+1} = 1 - \frac{2x}{x^3-2x+1} = 1 - \frac{2x}{(x-1)^2(x+1)}$. Se descompune $\frac{2x}{(x-1)^2(x+1)}$ etc.
j) Avem $\frac{x^6}{x^3-1} = \frac{x^6-1+1}{x^3-1} = x^3 + 1 + \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}$. Din $\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$ rezultă $a(x^2+x+1) + (bx+c)(x-1) = 1$, deci $a+b=0$, $a-b+c=0$ şi $a-c=1$. Rezultă $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{1}{3}$ şi $c = -\frac{2}{3}$. Prin urmare, $\int \frac{x^6}{x^3-1}\,\mathrm{dx} = \int (x^3+1)\,\mathrm{dx} + \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{dx}}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2+x+1}\,\mathrm{dx}$ (1).
Însă, $\int \frac{x-2}{x^2+x+1}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1-5}{x^2+x+1}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{5}{2}\int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{dx} =$
$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{5}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \mathcal{C}$. Înlocuind în (1), obţinem:
$\int \frac{x^6}{x^3-1}\,\mathrm{dx} = \frac{x^4}{4} + x - \frac{1}{3}\ln(x-1) - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) + \frac{5}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \mathcal{C}$.

11. a) Din $t = e^x$, obţinem $\int \frac{e^{2x}}{1+2e^x}\,\mathrm{dx} = \int \frac{t}{1+2t}\,\mathrm{dt} = \frac{t}{2} - \frac{\ln(1+2t)}{4} + \mathcal{C} = \frac{e^x}{2} - \frac{\ln(1+2e^x)}{4} + \mathcal{C}$.
c) Din $t = \operatorname{tg} x$, obţinem $\int \frac{\operatorname{tg}^2 x+1}{\operatorname{tg}^2 x-1}\,\mathrm{dx} = \int \frac{t^2+1}{t^2-1}\frac{\mathrm{dt}}{t^2+1} = \int \frac{\mathrm{dt}}{t^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\operatorname{tg} x-1}{\operatorname{tg} x+1}\right| + \mathcal{C}$.
e) Din $t = \sqrt{\frac{2x+1}{x+3}}$, obţinem $\int \sqrt{\frac{2x+1}{x+3}}\,\mathrm{dx} = \int t\left(\frac{1-3t^2}{t^2-1}\right)'\mathrm{dt} = t\left(\frac{1-3t^2}{t^2-1}\right) + \int \frac{3t^2-1}{t^2-1}\,\mathrm{dt} =$
$= x\sqrt{\frac{2x+1}{x+3}} + 3t + \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + \mathcal{C} = (x+3)\sqrt{\frac{2x+1}{x+3}} + \ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+3}}\right| + \mathcal{C}$.

12. a) Folosind $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, obţinem $\int \frac{\mathrm{dx}}{\sin x+\cos x+1} = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}+1}\frac{2\,\mathrm{dt}}{1+t^2} = \int \frac{\mathrm{dt}}{t+1} = \ln(t+1) + \mathcal{C} = \ln(2\operatorname{arctg} x+1) + \mathcal{C}$. b) $\int \frac{\mathrm{dx}}{5-3\cos x} = \int \frac{\mathrm{dt}}{5(t^2+1)-3(1-t^2)} = \int \frac{\mathrm{dt}}{8t^2+2} = \frac{1}{8}\int \frac{\mathrm{dt}}{t^2+\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}(2t) + \mathcal{C} = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}) + \mathcal{C}$.

13. a) Folosind $t = \operatorname{tg} x$, obţinem $\int \frac{\mathrm{dx}}{\sin x\cos x+2} = \int \frac{1}{\frac{t}{t^2+1}+2}\frac{\mathrm{dt}}{t^2+1} = \int \frac{\mathrm{dt}}{2t^2+t+2} = \cdots$.
c) $\int \frac{\mathrm{dx}}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x} = \int \frac{\mathrm{dt}}{a^2t^2+b^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{dt}}{t^2+\frac{b^2}{a^2}} = \frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{at}{b} + \mathcal{C} = \frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{a\operatorname{tg} x}{b} + \mathcal{C}$.

14. a) Folosind $t = \sin x$, rezultă $\int \frac{\mathrm{dx}}{\cos x} = \int \frac{\cos x\,\mathrm{dx}}{\cos^2 x} = \int \frac{\mathrm{dt}}{1-t^2} = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + \mathcal{C} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x} + \mathcal{C}$.
b) Folosind $t = \sin x$, rezultă $\int \cos^3 x\sin^4 x\,\mathrm{dx} = \int (1-t^2)t^4\,\mathrm{dt} = \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \mathcal{C} = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + \mathcal{C}$

15. a) Folosind $t = \cos x$, rezultă $\int \frac{\mathrm{dx}}{\sin x} = \int \frac{-\sin x\,\mathrm{dx}}{-\sin^2 x} = \int \frac{\mathrm{dt}}{t^2-1} = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + \mathcal{C}$.
    b) Folosind $t = \cos x$, rezultă $\int \cos^4 x \sin^5 x\,\mathrm{dx} = -\int t^4(1-t^2)^2\,\mathrm{dt} = \int(-t^8 + 2t^6 - t^4)\,\mathrm{dt}$.
16. a) Folosind $t = \operatorname{th}\frac{x}{2}$, rezultă $\int \frac{\mathrm{dx}}{2\operatorname{sh} x + 3\operatorname{ch} x} = \int \frac{2\,\mathrm{dt}}{4t+3(1+t^2)} = \cdots$.
    b) Folosind $t = \operatorname{th} x$, rezultă $\int \frac{\mathrm{dx}}{\operatorname{ch}^4 x} = \int(1-t^2)\,\mathrm{dt} = t - \frac{t^3}{3} + \mathcal{C} = \operatorname{th} x - \frac{\operatorname{th}^3 x}{3} + \mathcal{C}$.
    c) Folosind $t = \operatorname{sh} x$, rezultă $\int \frac{\mathrm{dx}}{\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch} x} = \int \frac{\mathrm{dt}}{t^2(1+t^2)} = \cdots$.
    d) Folosind $t = \operatorname{ch} x$, rezultă $\int \frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh} x}\,\mathrm{dx} = \int \frac{t^2}{t^2-1}\,\mathrm{dt} = \cdots$.
17. b) Folosind $t = \sqrt{x+2}$, i.e. $x = t^2 - 2$, rezultă $\int \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}+1}\,\mathrm{dx} = \int \frac{2t^2}{t+1}\,\mathrm{dt} = \int\left(2t - 1 + \frac{2}{t+1}\right)\mathrm{dt} = t^2 - t + 2\ln(t+1) = x + 2 - \sqrt{x+2} + 2\ln(\sqrt{x+2}+1) + \mathcal{C}$
18. a) Folosind $t = x + \sqrt{x^2 - x + 1}$, obţinem $x = \frac{t^2-1}{2t-1}$ şi deci $\int \frac{\mathrm{dx}}{x+\sqrt{x^2-x+1}} = \int \frac{1}{t}\left(\frac{t^2-1}{2t-1}\right)'\mathrm{dt}$.
    c) Folosind $tx = \sqrt{-x^2+x+1} + 1$, obţinem $x = \frac{1+2t}{t^2+1}$ şi deci $\int \frac{\mathrm{dx}}{x\sqrt{-x^2+x+1}} =$
    $= \int \frac{(t^2+1)^2}{(1+2t)(t^2+t-1)}\left(\frac{1+2t}{t^2+1}\right)'\mathrm{dt} = \int \frac{2-2t-2t^2}{(1+2t)(t^2+t-1)}\,\mathrm{dt} = -\int \frac{2}{2t+1}\,\mathrm{dt} = -\ln(2t+1) + \mathcal{C}$
    f) Ecuaţia $-x^2 + 3x - 2 = 0$ are rădăcinile $x_1 = 1$ şi $x_2 = 2$.
    Folosim $t(x-1) = \sqrt{-x^2+3x-2}$, de unde $t(x-1) = 2 - x$, adică $x = \frac{t+2}{t+1}$.
    Rezultă $\int x\sqrt{3x - x^2 - 2}\,\mathrm{dx} = \int \frac{t+2}{t+1}\cdot\frac{t}{t+1}\cdot\frac{-1}{(t+1)^2}\,\mathrm{dt} = -\int \frac{t^2+2t}{(t+1)^4}\,\mathrm{dt}$.
19. a) Avem $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{2}{3}$ şi $\gamma = 2 \in \mathbb{Z}$. Folosim $t = x^6$ şi obţinem:
    $\int \sqrt{x}(\sqrt[3]{x^2}+1)^2\,\mathrm{dx} = \int t^3(t^4+1)^2 6t^5\,\mathrm{dt}$.
    c) Avem $\alpha = 1$, $\beta = 2$ şi $\gamma = \frac{1}{3}$. Cum $\frac{\alpha+1}{\beta} = 1 \in \mathbb{Z}$ iar numitorul lui γ este 3, folosim $t^3 = x^2 + 1$ şi obţinem $\int x\sqrt[3]{x^2+1}\,\mathrm{dx} = \frac{3}{2}\int t^3\,\mathrm{dt} = \frac{3t^4}{8} = \frac{3(x^2+1)^{\frac{4}{3}}}{8} + \mathcal{C}$.
    e) Avem $\alpha = 1$, $\beta = 3$ şi $\gamma = \frac{1}{3}$. Cum $\frac{\alpha+1}{\beta} + \gamma = 1 \in \mathbb{Z}$ iar numitorul lui γ este 3, folosim $t^3x^3 = x^3 + 1$ şi obţinem $\int x\sqrt[3]{x^3+1}\,\mathrm{dx} = -\int \frac{t^3}{(t^3-1)^2}\,\mathrm{dt}$.
20. Folosind $\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{dx} = Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $\operatorname{grad}(Q) = \operatorname{grad}(P) - 1$:
    b) Avem $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+x-1}}\,\mathrm{dx} = (ax+b)\sqrt{x^2+x-1} + \lambda\int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{x^2+x-1}}$, de unde rezultă $a\sqrt{x^2+x-1} + \frac{(ax+b)(2x+1)}{2\sqrt{x^2+x-1}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+x-1}} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+x-1}}$. Înmulţind cu $\sqrt{x^2+x-1}$ obţinem
    $a(x^2+x-1) + (ax+b)(x+\frac{1}{2}) + \lambda = x^2$, de unde se determină a, b, λ.
21. a) Folosind $t = \frac{1}{x-1}$, obţinem $\int \frac{\mathrm{dx}}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}} = -\int \frac{\mathrm{dt}}{\sqrt{4t^2+t+1}}$.
22. a) Folosind $t = x - 1$, obţinem $\int \sqrt{3 - 2x - x^2}\,\mathrm{dx} = \int \sqrt{4 - t^2}\,\mathrm{dt}$.

Pagina 126

1. a) $\int_1^2 (x^2 - \frac{2}{x^3} + 2\sqrt[3]{x^2})\,\mathrm{dx} = \int_1^2 x^2\,\mathrm{dx} - 2\int_1^2 \frac{1}{x^3}\,\mathrm{dx} + 2\int_1^2 x^{\frac{2}{3}}\,\mathrm{dx} = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 + \frac{1}{x^2}\Big|_1^2 +$
$+2\,\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}\Big|_1^2 = \frac{7}{3} + \frac{1}{4} - 1 + \frac{6}{5}(2\sqrt[3]{4} - 1) = \frac{73}{60} + \frac{12\sqrt[3]{4}}{5}.$

b) $\int_{-3}^{-1} (\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} - 3^x)\,\mathrm{dx} = \left(-\frac{1}{x} + 2\ln|x| - \frac{3^x}{\ln 3}\right)\Big|_{-3}^{-1} = \frac{2}{3} - 2\ln 3 - \frac{8}{27\ln 3}$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos(2x) + \frac{1}{\cos^2 x})\,\mathrm{dx} = \left(\frac{\sin(2x)}{2} + \mathrm{tg}\,x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \sqrt{3} = \frac{5\sqrt{3}}{4}$

d) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} (\cos^2 x + \sin x\cos x)\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} (1 + \cos(2x) + \sin(2x))\,\mathrm{dx} = \cdots.$

e) $\int_0^2 \frac{\mathrm{dx}}{x^2+4} = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2}\Big|_0^2 = \frac{1}{2}(\mathrm{arctg}\,1 - \mathrm{arctg}\,0) = \frac{\pi}{8}.$

f) $\int_1^2 \frac{\mathrm{dx}}{9x^2-4} = \frac{1}{9}\int_1^2 \frac{\mathrm{dx}}{x^2-\frac{4}{9}} = \frac{1}{9}\cdot\frac{3}{4}\ln\left|\frac{x-\frac{2}{3}}{x+\frac{2}{3}}\right|\Big|_1^2 = \frac{1}{12}\left|\ln\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)\right|_1^2 = \frac{1}{12}(\ln\frac{1}{5} -$ $\ln\frac{7}{11}).$

g) $\int_0^1 \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{x^2+3}} = \ln(x + \sqrt{x^2+3})|_0^1 = \ln(1+\sqrt{4}) - \ln(\sqrt{3}) = \ln 3 - \frac{1}{2}\ln 3 = \frac{1}{2}\ln 3.$

h) $\int_0^1 \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^1 = \arcsin\frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6}.$

i) $\int_2^3 \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{x^2-1}} = \ln|x + \sqrt{x^2-1}||_2^3 = \ln(3+\sqrt{8}) - \ln(2+\sqrt{3}).$

j) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\mathrm{tg}\,x + \mathrm{ctg}\,x)\,\mathrm{dx} = (-\ln|\cos x| + \ln|\sin x|)|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = (-\ln\frac{1}{2} + \ln\frac{\sqrt{3}}{2}) - (-\ln\frac{\sqrt{3}}{2} +$ $\ln\frac{1}{2}) = \ln 3.$

2. a) $\int_1^2 x\ln^2 x\,\mathrm{dx} = \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln^2 x\,\mathrm{dx} = \frac{x^2}{2}\ln^2 x\Big|_1^2 - \int_1^2 x\ln x\,\mathrm{dx} = 2\ln^2 2 -$
$\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^2 + \frac{1}{2}\int_1^2 \mathrm{dx} = 2\ln^2 2 - 2\ln 2 + \frac{1}{2}$

b) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} x^2\cos x\,\mathrm{dx} = x^2\sin x|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} + 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} x\sin x\,\mathrm{dx}.$

c) Căutăm $a, b, c \in \mathbb{R}$, astfel încât $\int (x^2 + x - 1)e^{2x}\,\mathrm{dx} = (ax^2 + bx + c)e^{2x} + \mathcal{C}$, apoi aplicăm formula Leibniz-Newton.

d) $\int_0^{\sqrt{3}} x^2\,\mathrm{arctg}\,x\,\mathrm{dx} = \frac{x^3}{3}\,\mathrm{arctg}\,x\Big|_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3}{1+x^2}\,\mathrm{dx} = \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{3} -$
$-\frac{1}{3}\int_0^{\sqrt{3}} \left(x - \frac{x}{x^2+1}\right)\mathrm{dx} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \frac{x^2}{6}\Big|_0^{\sqrt{3}} + \frac{1}{6}\ln(x^2+1)\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\ln 2.$

e) $\int_0^{\frac{1}{2}} x\arcsin x\,\mathrm{dx} = \frac{x^2}{2}\arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{dx} = \frac{\pi}{48} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} x(\sqrt{1-x^2})'\,\mathrm{dx} =$
$= \frac{\pi}{48} + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{dx}.$ Vezi g).

f) $\int_0^1 \sqrt{x^2+4}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+4} + 4\ln(x + \sqrt{x^2+4}))\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 4\ln(1+\sqrt{5}) -$ $4\ln 2).$

g) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{dx} = 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{dx} = (x\sqrt{1-x^2} + 4\ln(x + \sqrt{x^2+4^2}))\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}.$

h) $\int_1^2 \sqrt{4x^2-3}\,\mathrm{dx} = 2\int_1^2 \sqrt{x^2 - \frac{3}{4}}\,\mathrm{dx} = \left(x\sqrt{x^2 - \frac{3}{4}} + \frac{3}{4}\ln\left|x + \sqrt{x^2 - \frac{3}{4}}\right|\right)\Big|_1^2.$

3. a) Folosim schimbarea de variabilă $u = 2x + 3$. Rezultă $\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\,\mathrm{du}$. Dacă $x = 1$, atunci $u = 5$. Dacă $x = 3$, atunci $u = 9$. Prin urmare $\int_1^3 (2x+3)^5\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int_5^9 u^5\,\mathrm{du} = \frac{u^6}{12}\Big|_5^9 = \frac{9^6-5^9}{12}$.

   b) $u = x^2+x-1$, $\mathrm{du} = (2x+1)\,\mathrm{dx}$, deci $\int_0^2 (2x+1)(x^2+x-1)^5\,\mathrm{dx} = \int_{-1}^5 u^5\,\mathrm{du} = \frac{1}{6}(5^6-(-1)^6)$.

   c) $u = x^2-9$, $\mathrm{du} = 2x\,\mathrm{dx}$, deci $\int_1^2 \frac{x}{x^2-9}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int_{-8}^{-5}\frac{1}{u}\,\mathrm{du} = \frac{1}{2}\ln|u|\Big|_{-8}^{-5} = \frac{1}{2}(\ln 5 - \ln 8)$.

   d) $\int_0^1 \frac{x}{x^2+2x+3}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x+1-1}{x^2+2x+3}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+2x+3}\,\mathrm{dx} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{dx}}{x^2+2x+3} =$ $= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{dx}}{(x+1)^2+2} = \frac{1}{2}(\ln 6 - \ln 3) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+1)|_0^1 = \frac{1}{2}(\ln 2 - \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 1)$.

   e) $u = x^2$, $\mathrm{du} = 2x\,\mathrm{dx}$, $\int_0^1 \frac{x}{x^4+1}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{du} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} u\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0) = \frac{\pi}{8}$.

   f) $u = \cos x$, $\mathrm{du} = -\sin x\,\mathrm{dx}$, deci $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{dx} = -\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\mathrm{du}}{1+u^2} = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\mathrm{du}}{1+u^2} = \operatorname{arctg} u|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1$.

   g) $u = e^x$, $\mathrm{du} = e^x\,\mathrm{dx}$, deci $\int_1^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,\mathrm{dx} = \int_e^2 \frac{u}{1+u}\,\mathrm{du} = \int_e^2 \left(1 - \frac{1}{1+u}\right)\mathrm{du} = (u - \ln(1+u))|_e^2$.

   h) $u = \ln x$, deci $\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{4\ln^2 x+1}}\,\mathrm{dx} = \int_0^1 \frac{\mathrm{du}}{\sqrt{4u^2+1}} = \frac{1}{2}\ln(u+\sqrt{u^2+\frac{1}{4}})\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5})$.

   i) $x = t^2$, $t = \sqrt{x}$, $\mathrm{dx} = 2\,\mathrm{dt}$, deci $\int_0^2 \frac{\sqrt{x}}{x+4}\,\mathrm{dx} = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2t^2}{t^2+4}\,\mathrm{dt} = 2\int_0^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{4}{t^2+4}\right)\mathrm{dt}$.

4. a) $\int_0^1 \frac{x}{x^2+x+1}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x+1-1}{x^2+x+1}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{dx} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{dx}}{x^2+x+1} =$ $= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{dx}}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big|_1^2 =$ $= \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{5}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$.

   b) Scriem $\frac{1}{x^3+8} = \frac{1}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{a}{x+2} + \frac{bx+c}{x^2-2x+4}$, deci $a(x^2-2x+4)+(bx+c)(x+2) = 1$. Identificând coeficienţii, rezultă $a+b=0$, $-2a+2b+c=0$ şi $4a+2c=1$. De unde $a = \frac{1}{12}$, $b = -\frac{1}{12}$ şi $c = \frac{1}{3}$. Prin urmare, $\int_{-1}^0 \frac{\mathrm{dx}}{x^3+8} = \frac{1}{12}\int_{-1}^0 \frac{\mathrm{dx}}{x+2} + \frac{1}{12}\int_{-1}^0 \frac{-x+4}{x^2-2x+4}\,\mathrm{dx}$.

   c) $\int_0^1 \frac{\mathrm{dx}}{(x^2+2)^2} = \left(\frac{1}{2(\sqrt{2})^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{x}{2(\sqrt{2})^2(x^2+2)}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{12}$.

   d) $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $\mathrm{dx} = \frac{2\,\mathrm{dt}}{t^2+1}$. Dacă $x = -\frac{\pi}{2}$, atunci $t = -1$. Dacă $x = \frac{\pi}{4}$, atunci $t = \operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}-1$. Prin urmare, $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{dx}}{1+2\cos x} = \int_{-1}^{\sqrt{2}-1} \frac{2\,\mathrm{dt}}{1+2(1-t^2)}$.

   e) $t = \operatorname{tg} x$, $\mathrm{dx} = \frac{\mathrm{dt}}{t^2+1}$. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{dx}}{1+\sin x\cos x} = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{dt}}{1+t+t^2}$.

   f) $t = \cos x$, $\mathrm{dt} = -\sin x\,\mathrm{dx}$. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} \sin^3 x\cos^4 x\,\mathrm{dx} = -\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{-1} (1-t^2)t^4\,\mathrm{dt}$.

   g) $t = \cos x$. $\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin x\sqrt{1+\cos x}\,\mathrm{dx} = -\int_1^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+t}\,\mathrm{dt}$.

h) $t = \sqrt{x+2}$, $x = t^2 - 2$, $\mathrm{dx} = 2t\,\mathrm{dt}$. $\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{x+2}}{1+x+\sqrt{x+2}}\,\mathrm{dx} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2t^2}{t^2+t-1}\,\mathrm{dt}$.

i) $t^3x^3 = x^3 + 1$, deci $t = \frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x}$. $\int_1^2 x\sqrt[3]{x^3+1}\,\mathrm{dx} = \int_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{9}} \frac{t^3}{(t^3-1)^2}\,\mathrm{dt}$.

j) $t = \sqrt{\frac{2x-1}{2x+1}}$, $x = \frac{t^2+1}{2-2t^2}$. $\int_1^2 \sqrt{\frac{2x-1}{2x+1}}\,\mathrm{dx} = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}} t\left(\frac{t^2+1}{2-2t^2}\right)'\mathrm{dt}$.

k) $t = x + \sqrt{x^2+4}$, $x = \frac{t}{2} + \frac{2}{t}$. $\int_0^2 \frac{\mathrm{dx}}{x+\sqrt{x^2+4}} = \int_2^{2+2\sqrt{2}} \frac{1}{t}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{t^2}\right)\mathrm{dt}$.

l) Folosim $t = \frac{1}{2x+3}$.

m) $t = \sin x$, $\mathrm{dt} = \cos \mathrm{dx}$. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\cos x}\,\mathrm{dx} = \int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{1-t^2}\,\mathrm{dt}$.

5. $t = \ln x$. $I_0 = \int_1^2 \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}\,\mathrm{dx} = \int_0^{\ln 2} \frac{\mathrm{dt}}{1+t^2} = \mathrm{arctg}(\ln 2)$. $I_1 = \int_1^2 \frac{\ln x}{x(1+\ln^2 x)}\,\mathrm{dx} = \int_0^{\ln 2} \frac{t\,\mathrm{dt}}{1+t^2} = \frac{1}{2}\ln(1+\ln^2 2)$. Pentru $x \in [1,2]$, avem $0 \le \frac{\ln^n x}{x(1+\ln^2 x)} \le \ln^n x \le (\ln 2)^n$, de unde rezultă $0 \le I_n \le \int_1^2 (\ln 2)^n\,\mathrm{dx} = (\ln 2)^n$. Din criteriul cleştelui, rezultă $\lim_n I_n = 0$.

6. Similar cu 6.

7. a) Avem $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$. Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Fie $\Delta_n = (0 = x_0 < x_1 = \frac{1}{n} < \cdots < x_n = 1)$, i.e. $x_i = \frac{i}{n}$, şi $\xi_i^n = \frac{i}{n}$, $1 \le i \le n$. Atunci $\sigma_{\Delta_n}(f, \xi^n) = a_n$. Cum $||\Delta_n|| = \frac{1}{n}$ şi $\lim_n \frac{1}{n} = 0$, rezultă că $\lim_n a_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{dx} = \ln 2$.

b) În mod similar, se obţine $\lim_n a_n = \int_0^1 e^x\,\mathrm{dx}$

c) În mod similar, se obţine $\lim_n a_n = \pi \int_0^\pi \sin x\,\mathrm{dx}$.

d) $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$. Se obţine $\lim_n a_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{dx}}{1+x^2}$.

e) $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{n^2-k^2}}{n^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$. Se obţine $\lim_n a_n = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{dx}$.

f) $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{\sqrt{n^4+k^4}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n}}{\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^4}}$. Se obţine $\lim_n a_n = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}\,\mathrm{dx}$.

g) $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{(n+k)^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+\frac{k}{n})^2}$. Se obţine $\lim_n a_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\,\mathrm{dx}$.

8. a) Avem $f(x) = x^2 + x + 1$, $f'(x) = 2x + 1$, $x \in [0,1]$. Lungimea curbei este $L = \int_0^1 \sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathrm{dx} = \int_0^1 \sqrt{1+(2x+1)^2}\,\mathrm{dx}$. Folosind $t = 2x+1$, rezultă $L = \frac{1}{2}\int_1^3 \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{dt} = \frac{1}{4}(t\sqrt{1+t^2} + \ln(t+\sqrt{1+t^2})|_1^3$.

b) $f(x) = \mathrm{ch}\, x$, $f'(x) = \mathrm{sh}\, x$, $x \in [0,1]$. $L = \int_0^1 \sqrt{1+\mathrm{sh}^2 x}\,\mathrm{dx} = \int_0^1 \mathrm{ch}\, x\,\mathrm{dx} = \mathrm{sh}\, x|_0^1 = \mathrm{sh}\, 1 - \mathrm{sh}\, 0 = \frac{e-e^{-1}}{2}$.

c) $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$, $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$, $x \in [0,2]$. $L = \int_0^1 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,\mathrm{dx}$.

d) $f(x) = \ln\cos x$, $f'(x) = -\,\mathrm{tg}\, x$, $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$. $L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\mathrm{tg}^2 x}\,\mathrm{dx} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{dx}}{\cos x}$.

e) Fie $f : [-r,r] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{r^2-x^2}$. Avem $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{x^2-r^2}}$. Lungimea cercului este $L = 2\int_{-r}^r \sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathrm{dx} = 4\int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}} = 4\,r \arcsin \frac{x}{r}\Big|_0^r = 4r\arcsin 1 = 2\pi r$.

9. a) Dacă $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, atunci $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. Fie $f,g:[-a,a]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, $g(x)=-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. Aria domeniului este $A(D)=\int_{-a}^{a}\frac{2b}{a}\sqrt{a^2-x^2}=\frac{4b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{dx}$. Din $x=a\sin t$, obţinem $A(D)=\frac{4b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t\,\mathrm{dt}=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{dt}=\pi ab$.

   b) Dreapta $y=x$ şi curba $y=\frac{1}{x^2}$ se intersectează în punctul $(1,1)$. Fie $f,g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$, $g(x)=\frac{1}{x^2}$. Atunci $A(D)=\int_1^2\left(x-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{dx}=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}\right)\Big|_1^2=1$.

   c) Dreapta $y=x$ şi parabola $y=\frac{x^2+3x-2}{4}$ se intersectează în punctele $(-1,-1)$ şi $(2,2)$. Cum parabola e convexă, rezultă că aria domeniului e $A(D)=\int_{-1}^2\left(x-\frac{x^2+3x-2}{4}\right)\mathrm{dx}$.

   d) Ecuaţia $\ln x=\ln^2 x$ are soluţiile $x_1=1$ şi $x_2=e$. $A(D)=\int_1^e(\ln x-\ln^2 x)\,\mathrm{dx}$.

   e) Observăm că $x\in[0,1]$. Dacă $\sqrt{x}=\sqrt{1-x^2}$, atunci $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Aria domeniului este $A(D)=\int_0^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\sqrt{x}\,\mathrm{dx}+\int_{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{dx}$.

10. a) $f(x)=\frac{x^3}{3}$, $f'(x)=x^2$, $x\in[0,1]$. $\mathrm{Aria}(S_f)=2\pi\int_0^1\frac{x^3}{3}\sqrt{1+x^4}\,\mathrm{dx}=\frac{\pi}{6}\int_0^1 4x^3\sqrt{1+x^4}\,\mathrm{dx}$. Folosind $t=1+x^4$, rezultă $\mathrm{Aria}(S_f)=\frac{\pi}{6}\int_1^2\sqrt{t}\,\mathrm{dt}=\frac{\pi}{9}\,t^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2=\frac{\pi}{9}(2\sqrt{2}-1)$.

    b) $\mathrm{Aria}(S_f)=2\pi\int_{-1}^1\operatorname{ch}x\sqrt{1+\operatorname{sh}x^2}\,\mathrm{dx}=2\pi\int_{-1}^1\operatorname{ch}^2 x\,\mathrm{dx}=\pi\int_0^1(e^x+e^{-x})^2\,\mathrm{dx}$.

    c) $\mathrm{Aria}(S_f)=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(2x)\sqrt{1+4\sin^2(2x)}\,\mathrm{dx}$. Din $t=\sin(2x)$, $\mathrm{Aria}(S_f)=2\pi\int_0^1\sqrt{1+4t^2}\,\mathrm{dt}$.

11. Fie un con cu înălţimea h, raza cercului mic r şi raza cercului mare R. Fie $f:[0,h]\to\mathbb{R}$, $f(x)=r+\frac{R-r}{h}x$. Atunci conul este suprafaţa de rotaţie S_f.

12. Sfera de rază r este suprafaţa de rotaţie a funcţiei $f:[-r,r]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$. Rezultă că aria sferei este:

    $\mathrm{Aria}(S_f)=2\pi\int_{-r}^r\sqrt{r^2-x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{r^2}{r^2-x^2}}\,\mathrm{dx}=4\pi\int_0^r r\,\mathrm{dx}=4\pi r^2$.

13. a) $\mathrm{Vol}(C_f)=\pi\int_0^\pi\sin^2 x\,\mathrm{dx}=\pi\int_0^\pi\frac{1-\cos(2x)}{2}\,\mathrm{dx}=\frac{\pi^2}{4}$.

    b) $\mathrm{Vol}(C_f)=\pi\int_0^1 x^2(1-x)\,\mathrm{dx}=\frac{\pi}{12}$.

    c) $\mathrm{Vol}(C_f)=\pi\int_{-1}^2 e^{-2x}\,\mathrm{dx}=\frac{\pi(e^2-e^{-4})}{2}$.

    f) $\mathrm{Vol}(C_f)=\pi\int_{-a}^a b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{dx}=\frac{4\pi ab^2}{3}$.

14. Fie $f:[0,h]\to\mathbb{R}$, $f(x)=r+\frac{R-r}{h}x$. Volumul conului este:

    $\mathrm{Vol}(C_f)=\pi\int_0^h\left(r+\frac{R-r}{h}x\right)^2\mathrm{dx}$.

15. Fie $f:[-r,r]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$. Volumul bilei este:

    $\mathrm{Vol}(C_f)=\pi\int_{-r}^r(r^2-x^2)\,\mathrm{dx}=\frac{4\pi r^3}{3}$.

16. a) $\text{Aria}(D) = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,\mathrm{dx} = \frac{1}{3}$. Avem $\int_0^1 x(\sqrt{x} - x^2)\,\mathrm{dx} = \frac{3}{20}$ şi $\frac{1}{2}\int_0^1 (x - x^4)\,\mathrm{dx} = \frac{3}{20}$. Rezultă $x_G = \frac{3}{20} \cdot \frac{3}{1} = \frac{9}{20}$ şi $y_G = \frac{9}{20}$. b), c) Se rezolvă similar.

17. D este domeniul mărginit de $f(x) = 0$ şi $g(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in [0, R]$. $\text{Aria}(D) = \frac{\pi R^2}{4}$. $\int_0^R x\sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{dx} = -\frac{1}{3}(R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^R = \frac{R^3}{3}$, $\frac{1}{2}\int_0^R (R^2 - x^2)\,\mathrm{dx} = \frac{R^3}{3}$. $x_G = \frac{4R}{3\pi}$, $y_G = \frac{4R}{3\pi}$.

18. $L = \int_0^{10} ma(t)\,\mathrm{dt} = 2\int_0^{10} (2t + 1)\,\mathrm{dt} = 220(\text{jouli})$.

19. a) $L = 0$, b) $L = P_1(V_2 - V_1) = 100(\text{jouli})$, c) $PV = \nu RT$, deci $P = \frac{\nu RT}{V}$. Pe de altă parte $\nu RT = P_1V_1 = 10(\text{jouli})$. Deci $L = P_1V_1 \ln\frac{V_2}{V_1} = 10\ln 2$ (jouli), d) $PV^\gamma = k$, deci $k = P_1V_1^{\frac{3}{2}} = 5$. Cum $P_2V_2^{\frac{3}{2}} = 5$, rezultă $V_2^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}$, deci $V_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ (m^3). $L = \int_{V^1}^{V_2} \frac{k}{V^\gamma} dV$.

20. Folosind metoda dreptunghiurilor şi metoda trapezelor, estimaţi integralele:

    a) Pentru $n = 2$, avem diviziunea $\Delta_2 = (0 < \frac{1}{2} < 1)$, $\xi_1 = \frac{1}{2}$, $\xi_2 = 1$. Metoda dreptunghiurilor: $\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{dx} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}+1} + \frac{1}{1+1}\right) = \frac{7}{12} = 0,58(3)$. Pe de altă parte $\xi_1' = 0$ şi $\xi_2' = \frac{1}{2}$. Metoda trapezelor: $\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{dx} \approx \frac{1}{4}\left(\frac{1}{0+1} + \frac{2}{\frac{1}{2}+1} + \frac{1}{1+1}\right) = \frac{17}{24} = 0,708(3)$. Observaţie: $\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{dx} = \ln 2 \approx 0,693$ (metoda trapezelor dă aproximări mai bune).

21. Avem $L_0(x) = -\frac{10}{3}x + 1 - \frac{10}{6}x + 1 - x + 1 = -5x + 3$, $L_1(x) = -\frac{10}{7}x + \frac{24}{7}$, $L_2(x) = \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}$ şi $L_3(x) = \frac{69}{14}x - \frac{27}{14}$. Polinomul de interpolare este $P(x) = f(0)L_0(x) + f(0.3)L_1(x) + f(0.6)L_2(x) + f(1)L_3(x)$ şi $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = \int_0^1 \frac{\mathrm{dx}}{x^2+1} \approx \int_0^1 P(x)\,\mathrm{dx}$.

Pagina 134

1. a) $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$, $x \in [0, 2)$. Fie $\alpha = 2 \geq 1$. Cum $\lim_{x\nearrow 2}(2 - x)^\alpha f(x) = 1 > 0$, rezultă că $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{dx}$ e divergentă.

    b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$, $x \in (1, 2]$. Fie $\alpha = \frac{1}{2} < 1$. Cum $\lim_{x\searrow 1}(x-1)^\alpha f(x) = 1 < \infty$, rezultă că $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{dx}$ e convergentă.

    c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$, $x \in [0, \infty)$. Fie $\alpha = 2 > 1$. Cum $\lim_{x\to\infty} x^\alpha f(x) = 1 < \infty$, rezultă că $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{dx}$ e convergentă.

    d) Integrala e convergentă.

    e) Integrala e convergentă pentru $\alpha > 1$ şi divergentă pentru $\alpha \geq 1$.

    f) Integrala e divergentă: Pentru $\alpha = 1$, avem $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 1 > 0$.

    g) Scriem $I = I_1 + I + 2$, unde $I_1 = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{dx}$ şi $I_2 = \int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{dx}$. Cum I_1 şi I_2 sunt convergente, rezultă că I este convergentă.

    h) Integrala e convergentă, i) Integrala e divergentă, j) Integrala a convergentă.

k) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, deci $\int_0^a \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{dx}$ e convergentă pentru orice $a > 0$. Avem $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$. Pe de altă parte $\left|\int_0^u \sin x\,\mathrm{dx}\right| = |1-\cos u| = 1-\cos u \le 2$, pentru orice $u > 0$. Din teorema Abel, rezultă că $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{dx}$ e convergentă.

2. a) $I = \int_0^\infty e^{-ax}\cos(bx)\,\mathrm{dx} = \frac{1}{b}\int_0^\infty e^{-ax}(\sin(bx))'\,\mathrm{dx} = \frac{1}{b}e^{-ax}\sin(bx)|_0^\infty +$ $+\frac{a}{b}\int_0^\infty e^{-ax}\sin(bx)\,\mathrm{dx} = -\frac{a}{b^2}\int_0^\infty e^{-ax}(\cos(bx))'\,\mathrm{dx} = -\frac{a}{b^2}e^{-ax}\cos(bx)|_0^\infty -$ $-\frac{a^2}{b^2}\int_0^\infty e^{-ax}\cos(bx)\,\mathrm{dx} = \frac{a}{b^2} - \frac{a^2}{b^2}I$, de unde $I = \frac{a}{a^2+b^2}$, b) Similar, $I = \frac{b}{a^2+b^2}$.
   c) Din $u = x^2$, $I = \int_0^\infty \frac{xdx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{du}}{1+u^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} u|_0^\infty = \frac{1}{2}(\lim_{u\to\infty}\operatorname{arctg} u - \operatorname{arctg} 0) = \frac{\pi}{4}$.
   d) $I = \int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x^2+1}\,\mathrm{dx} = \left.\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2}\right|_1^\infty = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{32} = \frac{3\pi^2}{32}$.
   e) $I = \int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x^2}\,\mathrm{dx} = -\int_1^\infty \left(\frac{1}{x}\right)'\operatorname{arctg} x = -\left(\frac{1}{x}\operatorname{arctg} x\right)\Big|_1^\infty + \int_1^\infty \frac{\mathrm{dx}}{x(x^2+1)} = \frac{\pi}{4} + \int_1^\infty \frac{\mathrm{dx}}{x(x^2+1)}$.
   Pe de altă parte, $\int_1^\infty \frac{\mathrm{dx}}{x(x^2+1)} = \int_1^\infty \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)\mathrm{dx} = \left(\ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right)\Big|_1^\infty = \ln \left.\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right|_1^\infty = \ln 1 - \ln\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\ln 2$. Deci $I = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$.

Pagina 138

1. Pentru $y > 0$, avem $F'(y) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{-yx}\frac{\sin x}{x}\right)\mathrm{dx} = -\int_0^\infty e^{-yx}\sin x\,\mathrm{dx} = -\frac{1}{1+y^2}$. Rezultă că $F(y) = C - \operatorname{arctg} y$, pentru $y > 0$, unde $C \in \mathbb{R}$ este o constantă care urmează să fie determinată. Cum F e uniform convergentă pe $[0,\infty)$, rezultă că F e continuă pe $[0,\infty)$. Pe de altă parte, $\left|e^{-yx}\frac{\sin x}{x}\right| \le e^{-yx}$, $\forall y > 0$. Deci $|F(y)| \le \int_0^\infty e^{-yx} = \frac{1}{y}$, $\forall y > 0$. Rezultă că $\lim_{y\to\infty} F(y) = C - \frac{\pi}{2} = 0$, deci $C = \frac{\pi}{2}$. Prin urmare $F(y) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} y$, $\forall y \ge 0$. În particular, $F(0) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$.

2. Folosind $t = \operatorname{tg} x$, $x = \operatorname{arctg} t$. Pentru $x = 0$, $t = 0$. Pentru $x \nearrow \frac{\pi}{2}$, $t \to \infty$. Rezultă că $F(y) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(ty)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{dt}$, deci $F'(y) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\operatorname{arctg}(ty)}{t(1+t^2)}\right)\mathrm{dt} = \int_0^\infty \frac{\mathrm{dt}}{(1+t^2)(1+t^2y^2)}\,\mathrm{dt}$, $y > 0$.
   Pentru $y \ne 1$, $F'(y) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-y^2}\frac{1}{1+t^2} - \frac{y^2}{1-y^2}\cdot\frac{1}{1+t^2y^2}\right)\mathrm{dt} = \frac{1}{1-y^2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{dt}}{1+t^2} - \frac{y^2}{1-y^2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{dt}}{1+t^2y^2} =$
   $= \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{1-y^2} - \frac{y}{1-y^2}\right) = \frac{\pi}{2(1+y)}$. Cum F' e continuă, rezultă că $F'(y) = \frac{\pi}{2(1+y)}$, $\forall y > 0$. Prin urmare, $F(y) = \frac{\pi}{2}\ln(1+y) + C$. Pe de altă parte, $F(0) = \int_0^\infty 0\,\mathrm{dt} = 0$, deci $C = 0$. Rezultă că $F(y) = \frac{\pi}{2}\ln(1+y)$, $\forall y \ge 0$. În particular, $F(1) = \int_0^{\pi/2} \frac{x}{\operatorname{tg} x}dx = \frac{\pi}{2}\ln 2$.

3. Similar cu 2.

4. Avem $F'(y) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\operatorname{arctg}(xy)}{x\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{dx} = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{dx}$. Folosind $x = \sin t$, obţinem $F'(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{dt}}{1+y^2\sin^2 t}$. Folosind $u = \operatorname{tg} u$, $F'(y) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{du}}{1+y^2+u^2} =$

$\frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}}$. Rezultă $F(y) = \frac{\pi}{2}\ln(y + \sqrt{1+y^2}) + C$. Cum $F(0) = \int_0^1 0\,\mathrm{dx} = 0$, avem $C = 0$.

5. Avem $F'(y) = \int_0^\infty \frac{-2y}{x^2} e^{-x^2-\frac{y^2}{x^2}}\,\mathrm{dx}$. Folosind $u = \frac{y}{x}$, obţinem:

   $F'(y) = \int_\infty^0 (-2y)\frac{u^2}{y^2} e^{-\frac{y^2}{u^2}-u^2}\left(-\frac{y}{u^2}\right)\mathrm{du} = -2\int_0^\infty e^{-\frac{y^2}{u^2}-u^2}\,\mathrm{du} = -2F(y)$. Cum $F'(y) = -2F(y)$, rezultă că $F(y) = Ce^{-2y}$. Pe de altă parte, $C = F(0) = \int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{dx} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

6. Avem $F'(y) = \int_0^\infty \frac{2y}{(1+x^2y^2)(1+x^2)}dx = \frac{y\pi}{y+1}$, de unde $F(y) = \pi(y - \ln(y+1)) + C$. Cum $F(0) = 0$, rezultă $C = 0$.

7. $\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,\mathrm{dx} = \int_0^\infty \left(\int_a^b e^{-xy}\,\mathrm{dy}\right)\mathrm{dx} = \int_a^b \left(\int_0^\infty e^{-xy}\,\mathrm{dx}\right)\mathrm{dy} = \int_a^b \frac{\mathrm{dy}}{y} = \ln\frac{b}{a}$.

   Sau, din formula lui Froullani aplicată funţiei $f(x) = e^{-x}$, obţinem de asemenea că $\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,\mathrm{dx} = f(0)\ln\frac{b}{a} = \ln\frac{b}{a}$.

   Similar $\int_0^\infty \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x^2}\,\mathrm{dx} = \int_0^\infty \left(\int_a^b \frac{\sin(xy)}{x}\,\mathrm{dy}\right)\mathrm{dx} = \int_a^b \left(\int_0^\infty \frac{\sin(xy)}{x}\,\mathrm{dx}\right)\mathrm{dy} = \frac{\pi}{2}(b-a)$.

8. $I(a,b) = \int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\sqrt{-\ln x}}\,\mathrm{dx} = -\int_0^1 \left(\int_a^b x^y\sqrt{-\ln x}\,\mathrm{dy}\right)\mathrm{dx} = -\int_a^b \left(\int_0^1 x^y\sqrt{-\ln x}\,\mathrm{dx}\right)\mathrm{dy}$.

   Folosim $t = -\ln x$ ($x = e^{-t}$), şi obţinem $I(a,b) = -\int_a^b \left(\int_0^\infty e^{-t(y+1)}\sqrt{t}\,\mathrm{dt}\right)\mathrm{dy} = -\Gamma(\frac{3}{2})\int_a^b \frac{1}{(y+1)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{dy}$.

9. Avem $f(x,t) = \frac{\sin(tx)}{x}$, $\varphi(t) = t$, $\psi(t) = t^2$. Rezultă

   $F'(t) = \int_t^{t^2} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\sin(tx)}{x}\right)\mathrm{dx} + f(\psi(t),t)\psi'(t) - f(\varphi(t),t)\varphi'(t) =$

   $= \int_t^{t^2} \cos(tx)\,\mathrm{dx} + 2tf(t^2,t) - f(t,t) = \left.\frac{\sin(tx)}{t}\right|_t^{t^2} + \frac{2\sin t^3}{t} - \frac{\sin t^2}{t} = \frac{3\sin t^3 - 2\sin t^2}{t}$.

10. Similar cu 9.

11. a) $I = \int_0^\infty x^4 e^{-x}\,\mathrm{dx} = \Gamma(5) = 4! = 24$.

    b) Folosind $t = x^2$, $I = \int_0^\infty x^2 e^{-x^2}\,\mathrm{dx} = \int_0^\infty te^{-t}\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{dt} = \frac{1}{2}\int_0^\infty t^{\frac{1}{2}}e^{-t}\,\mathrm{dt} = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$.

    c) Folosind $t = x^2$, $I = \int_0^\infty e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{dx} = \int_0^\infty e^{-t}\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{dt} = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

    d) Se foloseşte $t = \frac{x^2}{2}$, e) Se foloseşte $t = \frac{x}{k}$.

    f) Folosind $t = -\ln x$, $I = \int_0^1 (\ln x)^4\,\mathrm{dx} = -\int_\infty^0 t^4 e^{-t}\,\mathrm{dt} = \Gamma(5) = 24$.

12. a) Folosind $t = x^2$, avem $I = \int_0^1 x^4\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int_0^1 t^2\sqrt{1-t}\cdot t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{dt} =$

    $= \int_0^1 t^{\frac{3}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{dt} = B(\frac{5}{2},\frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(3)} = \frac{1}{2!}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})^2 = \frac{3\pi}{8}$.

    b) $I = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}}\,\mathrm{dx} = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{dx} = B(\frac{1}{2},\frac{3}{2}) = \frac{\pi}{2}$.

    c) Folosind $x = 2t$, $I = \int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}\,\mathrm{dx} = \int_0^1 4t^2(2-2t)^{-\frac{1}{2}}2\,\mathrm{dt} =$

    $= 4\sqrt{2}\int_0^1 t^2(1-t)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{dt} = 4B(3,\frac{1}{2}) = 4\frac{\Gamma(3)\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{7}{2})} = \frac{32}{15}$.

d) Avem $2x^3-3x^2+1=(2x+1)(x-1)^2$. Folosim $t=\frac{2x+1}{3}$.

e) $I=\int_0^{\pi/2}\sin^6 t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\cdot 2\int_0^{\pi/2}\sin^6 t\cos^0 t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}B(\frac{7}{2},\frac{1}{2})=\frac{5\pi}{32}$.

f) $I=\int_0^{\pi/2}\cos^4 t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}B(\frac{1}{2},\frac{5}{2})=\frac{\pi}{16}$.

g) $I=\int_0^{\pi/2}\sin^4 t\cos^5 t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}B(\frac{5}{2},3)$.

h) Folosind $t=x^4$, $I=\int_0^{\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\,\mathrm{dx}=\frac{1}{4}\int_0^{\infty}\frac{t^{\frac{1}{2}}}{1+t}\cdot t^{-\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int_0^{\infty}\frac{t^{-\frac{1}{4}}}{1+t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4}B(\frac{3}{4},\frac{1}{4})=\frac{1}{4}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

i) $I=\int_0^{\infty}\frac{x^4}{(1+x)^6}\,\mathrm{dx}=B(5,1)=\frac{1}{5}$, j) Folosim $t=x^2$.

Pagina 145

1. $\int_{\Delta ABC}(x+2y)\,\mathrm{ds}=\int_{AB}+\int_{BC}+\int_{CA}$. Folosim parametrizările:
$AB:\begin{cases}x=t\\y=1-t\end{cases}$, $BC:\begin{cases}x=1\\y=t\end{cases}$, $t\in[0,1]$, $CA:\begin{cases}x=1-t\\y=1\end{cases}$, $t\in[0,1]$.
$\int_{AB}=\int_0^1(t+2(1-t))\sqrt{1^2+(-1)^2}\,\mathrm{d}t=\sqrt{2}\int_0^1(2-t)\,\mathrm{d}t=\sqrt{2}\left(2t-\frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^1=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.
$\int_{BC}=\int_0^1(1+2t)\sqrt{0^2+1^2}\,\mathrm{d}t=(t+t^2)|_0^1=2$.
$\int_{CA}=\int_0^1(1-t+2)\sqrt{(-1)^2+0^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^1(3-t)\,\mathrm{d}t=\left(3t-\frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^1=\frac{5}{2}$.
Rezultă că $\int_{\Delta ABC}(x+2y)\,\mathrm{ds}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

2. $\int_\gamma(x+2y)\,\mathrm{ds}=\int_{OA}+\int_{\widehat{AB}}+\int_{BO}$. Folosim parametrizările:
$OA:\begin{cases}x=t\\y=0\end{cases}$, $BO:\begin{cases}x=0\\y=1-t\end{cases}$, $t\in[0,1]$. $\widehat{AB}:\begin{cases}x=\cos t\\y=\sin t\end{cases}$, $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$,
$\int_{OA}=\int_0^1 t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}$, $\int_{\widehat{AB}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t+2\sin t)\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2}\,\mathrm{d}t=(\sin t-2\cos t)|_0^{\frac{\pi}{2}}=3$, $\int_{BO}=\int_0^1(2-2t)\,\mathrm{d}t=1$. Rezultă că $\int_\gamma(x+2y)\,\mathrm{ds}=\frac{9}{2}$.

3. Folosim parametrizarea $\gamma:\begin{cases}x=\frac{t^2}{2}\\y=t\end{cases}$, $t\in[0,2]$. Avem $\mathrm{ds}=\sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t$, deci
$\ell(\gamma)=\int_0^2\sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(t\sqrt{t^2+1}+\ln(t+\sqrt{t^2+1}))|_0^2=\frac{1}{2}(2\sqrt{5}+\ln(2+\sqrt{5}))$.

4. $x^2-2x+y^2=0\Leftrightarrow(x-1)^2+y^2=1$. Folosim parametrizarea $x=1+\cos t$, $y=\sin t$, $t\in[0,2\pi]$, deci $\mathrm{ds}=\mathrm{dt}$. Rezultă că $\int_\gamma\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{ds}=\int_\gamma\sqrt{2x}\,\mathrm{ds}=\int_0^{2\pi}\sqrt{1+2\cos t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\sqrt{2\cos^2\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}|\cos\frac{t}{2}|\,\mathrm{d}t=2\sqrt{2}\int_0^{\pi}|\cos u|\,\mathrm{d}u=2\sqrt{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos u\,\mathrm{d}u-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos u\,\mathrm{d}u\right)=4\sqrt{2}$.

5. $\int_\gamma(xy-z)\,\mathrm{ds}=\int_0^1(t\cdot t^2-\frac{2}{3}t^3)\sqrt{1+4t^2+4t^4}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\int_0^1 t^3(1+2t^2)\,\mathrm{d}t$.

6. $\mathrm{ds}=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t=|a|\sqrt{2-2\cos t}\,\mathrm{d}t=\sqrt{2}|a|\cdot|\sin\frac{t}{2}|\,\mathrm{d}t$. Lungimea lui γ este $\ell(\gamma)=\sqrt{2}|a|\int_0^{2\pi}|\sin\frac{t}{2}|\,\mathrm{d}t=4\sqrt{2}|a|$.

7. $\int_\gamma \frac{\mathrm{ds}}{x^2+y^2+z^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}\,\mathrm{dt}}{1+t^2} = \sqrt{2}\operatorname{arctg} t|_0^{2\pi} = \sqrt{2}\operatorname{arctg}(2\pi)$.
8. Similar cu 5.
9. $\int_{\Delta ABC}(x-y)\,\mathrm{dx} + y\,\mathrm{dy} = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CA}$. Folosim parametrizările:
$AB : \begin{cases} x = t \\ y = 1-t \end{cases}, \ BC : \begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases}, \ CA : \begin{cases} x = 1-t \\ y = 1 \end{cases}, t \in [0,1].$
$\int_{AB} = \int_0^1 [(t-(1-t)) + (1-t)(-1)]\,\mathrm{dt} = \int_0^1 (3t-2)\,\mathrm{dt} = -\frac{1}{2}$.
$\int_{BC} = \int_0^1 [(1-t)\cdot 0 + t]\,\mathrm{dt} = \frac{1}{2}$, $\int_{CA} = \int_0^1 [(1-t-1)(-1) + y \cdot 0]\,\mathrm{dt} = \frac{1}{2}$,
deci $\int_{\Delta ABC}(x-y)\,\mathrm{dx} + y\,\mathrm{dy} = \frac{1}{2}$.
10. Avem $\int_\gamma \mathrm{dx} + xy\,\mathrm{dy} = \int_{OA} + \int_{\widehat{AB}} + \int_{BO}$. Folosim parametrizările:
$OA : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}, \ BO : \begin{cases} x = 0 \\ y = 1-t \end{cases}, t \in [0,1], \ \widehat{AB} : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, t \in [0, \frac{\pi}{2}].$
$\int_{OA} = \int_0^1 \mathrm{dt} = 1$, $\int_{\widehat{AB}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin t \cos^2 t)\,\mathrm{dt} = \left(t - \frac{\cos^3 t}{3}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}$,
$\int_{BO} = \int_0^1 0\,\mathrm{dt} = 0$. Rezultă că $\int_\gamma \mathrm{dx} + xy\,\mathrm{dy} = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{3}$.
11. Folosim $\mathcal{C}(O,2) : \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}, t \in [0,2\pi]$, $x' = -2\sin t$, $y' = 2\cos t$. Rezultă că:
$\int_{\mathcal{C}(O,2)} y^2\,\mathrm{dx} + x\,\mathrm{dy} = \int_0^{2\pi} [4\sin^2 t \cdot (-2\sin t) + 2\cos t \cdot (2\cos t)]\,\mathrm{dt} = -8\int_0^{2\pi}(1 - \cos^2 t)\sin t\,\mathrm{dt} +$
$+ \int_0^{2\pi} (2 + 2\cos 2t)\,\mathrm{dt} = -8\left(\cos t + \frac{\cos^3 t}{3}\right)\Big|_0^{2\pi} + (2t + \sin 2t)|_0^{2\pi} = 0 + 4\pi = 4\pi$.
12. Folosim $\mathcal{C}(O,2) : \begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}, t \in [0,2\pi]$, $x' = -r\sin t$, $y' = r\cos t$. Rezultă că:
$\int_{\mathcal{C}(O,r)} \frac{x-y}{x^2+y^2}\,\mathrm{dx} + \frac{x+y}{x^2+y^2}\,\mathrm{dy} = \int_0^{2\pi} \frac{(r\cos t - r\sin t)(-r\sin t)}{r^2} + \frac{(r\cos t + r\sin t)(r\cos t)}{r^2}\,\mathrm{dt} = \int_0^{2\pi} \mathrm{dt} = 2\pi$.
13. $x^2 - 2x + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$. Folosim $\gamma : \begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, t \in [0,2\pi]$.
Rezultă că $\int_\gamma \overrightarrow{V} \cdot d\vec{r} = \int_\gamma x^2\,\mathrm{dx} + y^2\,\mathrm{dy} = \int_0^{2\pi} ((1+\cos t)^2(-\sin t) + \sin^2 t \cos t)\,\mathrm{dt}$.
14. Fie $F(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$. Observăm că $\omega = x\,\mathrm{dx} + y\,\mathrm{dy} + z\,\mathrm{dz} = dF$, deci ω e o formă exactă. Prin urmare, $\int_{AB} x\,\mathrm{dx} + y\,\mathrm{dy} + z\,\mathrm{dz} = F(B) - F(A) = F(0,1,2) - F(1,0,1) = \frac{3}{2}$.
15. $\int_\gamma xy\,\mathrm{dx} + z\,\mathrm{dy} - x^2\,\mathrm{dz} = \int_0^1 (t \cdot t^2 \cdot 1 + \frac{2}{3}t^3 \cdot 2t - t^2 \cdot 2t^2)\,\mathrm{dt} = \int_0^1 (t^3 - \frac{2}{3}t^4)\,\mathrm{dt} = \frac{7}{60}$.
16. Din $z = 1$ şi $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, rezultă $x^2 + y^2 = 1$. Deci γ e un cerc de rază 1 situat în planul $z = 1$. Avem parametrizarea: $\gamma : \{x = \cos t, y = \sin t, z = 1,$ $t \in [0,2\pi]$. Rezultă că $\int_\gamma y^2\,\mathrm{dx} + z^2\,\mathrm{dy} + x^2\,\mathrm{dz} = \int_0^{2\pi} (-\sin^3 t + \cos t)\,\mathrm{dt}$.

Pagina 153

1. $\iint_D xe^{xy}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_0^1 \mathrm{dx} \int_0^2 xe^{xy}\,\mathrm{dy} = \int_0^1 e^{xy}|_0^2\,\mathrm{dx} = \int_0^1 (e^{2x}-1)\,\mathrm{dx} =$
$= \left(\frac{e^{2x}}{2} - x\right)\Big|_0^1 = \frac{e^2-3}{2}.$

2. Avem scrierea $D = \{(x,y) \mid x \in [-2,2],\ y \in [0, \sqrt{4-x^2}\}$. Rezultă că:
$\iint_D y\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_{-2}^2 \mathrm{dx} \int_0^{\sqrt{4-x^2}} y\,\mathrm{dy} = \frac{1}{2}\int_{-2}^2 y^2|_0^{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{dx} = \int_0^2 (4-x^2)\,\mathrm{dx} = \frac{8}{3}.$

3. Ecuaţia dreptei AB este $x+2y=2$, deci $D = \{(x,y) \mid x \in [0,2],\ y \in [0, \frac{2-x}{2}]\}$. Deci:
$\iint_D xy\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_0^2 \mathrm{dx} \int_0^{\frac{2-x}{2}} xy\,\mathrm{dy} = \int_0^2 \frac{xy^2}{2}\Big|_0^{\frac{2-x}{2}}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{8}\int_0^2 x(2-x)^2\,\mathrm{dx} = \frac{1}{6}.$

4. Dreapta $y=x$ şi parabola $y = \frac{1}{4}(x^2+2x-3)$ se intersectează în punctele $(-1,-1)$ şi $(2,2)$, deci $D = \{(x,y) \mid x \in [-1,2],\ y \in [\frac{1}{4}(x^2+2x-3), x]\}$. Rezultă că Aria$(D) = \iint_D \mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_{-1}^2 \left(x - \frac{1}{4}(x^2+2x-3)\right)\mathrm{dx}$.

5. Cercul $x^2+y^2=16$ şi parabola $y^2=6x$ se intersectează în punctele $(2, 2\sqrt{3})$ şi $(2,-2\sqrt{3})$. Atunci $D = \{(x,y) \mid y \in [-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}],\ x \in [\frac{y^2}{6}, \sqrt{16-y^2}]\}$, deci Aria$(D) = \iint_D \mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \left(\sqrt{16-y^2} - \frac{y^2}{6}\right)\mathrm{dy}$.

6. Similar cu 4. şi 5.

7. D este un sfert de disc de rază R, deci Aria$(D) = \frac{\pi R^2}{4}$. Folosind coordonate polare $\begin{cases} x = \rho\cos\theta, & \rho \in [0,R] \\ y = \rho\sin\theta, & \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$, obţinem $\iint_D x\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R \rho^2\cos\theta d\rho =$
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta \cdot \int_0^R \rho^2 d\rho$
$= \sin\theta|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^R = \frac{R^3}{3}$. Rezultă că $x_G = \frac{\iint_D x\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}}{\text{Aria}(D)} = \frac{4R}{3\pi}$. Similar $y_G = \frac{4R}{3\pi}$, deci centrul de greutate are coordonatele $G(\frac{4R}{3\pi}, \frac{4R}{3\pi})$. În mod similar, se determină şi momentele de inerţie.

8. Folosind $\begin{cases} x = \rho\cos\theta, & \rho \in [0,1] \\ y = \rho\sin\theta, & \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$, $\iint_D e^{x^2+y^2}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho e^\rho d\rho = 2\pi.$

9. a) Folosim coordonate polare $\{x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta$. Din $x^2+y^2 = \rho^2 \leq 2x = 2\rho\cos\theta$, rezultă $0 \leq \rho \leq 2\cos\theta$ şi $\cos\theta \geq 0$, deci $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Rezultă că $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} == \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho^2 d\rho = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{8\cos^3\theta}{3} d\theta = \frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta =$
$\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\theta)\cos\theta d\theta = \frac{32}{9}.$
b) Folosim coordonate polare $\{x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta,\ \rho \in [0,2],\ x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

10. a) Folosim coordonate polare $\{x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta,\ \rho \in [0,2],\ x \in [-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.
b) Folosind $\begin{cases} x = \rho\cos\theta, & \rho \in [1,3] \\ y = \rho\sin\theta, & \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$, $\iint_D x\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta \int_1^3 \rho^2 d\rho = 0.$

11. Folosind $\begin{cases} x = \rho\cos\theta, & \rho \in [1,2] \\ y = \rho\sin\theta, & \theta \in [0, \pi] \end{cases}$, $\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_0^\pi d\theta \int_1^2 \frac{\rho}{\rho^2} d\rho = \pi\ln 2.$

12. Din $\begin{cases} x = \rho\cos\theta, & \rho \in [0,\infty) \\ y = \rho\sin\theta, & \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$, $I := \iint_D e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\infty} \rho e^{-\rho^2} d\rho$.
Folosind $u = \rho^2$, rezultă că $I = \frac{\pi}{4}\int_0^{\infty} e^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{4}$. Pe de altă parte,
$I = \iint_D e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \int_0^{\infty} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2$, deci
$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{I} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Pagina 160

1. S este un triunghi echilateral (plin) cu vârfurile $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ şi $C(0,0,1)$. Avem $AB = AC = BC = \sqrt{2}$. Cum $x+y+z = 3$ pe S, rezultă că $\int_S \frac{d\sigma}{x+y+z} = \frac{1}{3}\,\mathrm{Aria}(S) = \frac{\sqrt{6}}{12}$.

2. Din $x^2+y^2+z^2 = a^2$ şi $z \geq 0$, rezultă că $z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$. Pe de altă parte, $0 \leq x^2+y^2 = a^2 - z^2 \leq a^2$. Fie $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq a^2\}$. Avem $S = \{(x,y,z) \mid z = \sqrt{a^2-x^2-y^2},\ (x,y) \in D\}$. $p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$, $q = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$ şi $d\sigma = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Rezultă că $I = \int_S (x+y+z)d\sigma = \iint_D (x+y+\sqrt{a^2-x^2-y^2})\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Folosind coordonate polare, obţinem $I = a\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \left(\frac{\rho(\cos\theta+\sin\theta)}{\sqrt{a^2-\rho^2}} + 1\right)\rho d\rho$.

3. Avem $z = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$, unde $(x,y) \in D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 4\}$. Rezultă că $p = x$, $q = y$ şi $d\sigma = \sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, deci $\mathrm{Aria}(S) = \int_S d\sigma = \iint_D \sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Folosind coordonate polare, obţinem
$\mathrm{Aria}(S) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho\sqrt{1+\rho^2}d\rho$.

4. Avem $S = \{(x,y,z) \mid z = \sqrt{x^2+y^2},\ (x,y) \in D\}$, unde $D = \{(x,y) \mid 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$. $p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $q = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ şi $d\sigma = \sqrt{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Rezultă $\mathrm{Aria}(S) = \int_S d\sigma = \iint_D \sqrt{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sqrt{2}\,\mathrm{Aria}(D) = \sqrt{2}(4\pi - \pi) = 3\pi\sqrt{2}$.

5. Fie $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq Ry\}$. $S = \{(x,y,z) \mid z = \sqrt{R^2-x^2-y^2},\ (x,y) \in D\}$. Rezultă că $\mathrm{Aria}(S) = \int_S d\sigma = \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

6. a) Triunghiul (plin) S este conţinut în planul $(P) : x+y+z = 3$. Normala la (P) este $\overrightarrow{N} = (1,1,1)$, deci $\vec{n} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. Fie $D = \{(x,y) \mid x+y \leq 3\}$.
Atunci $S = \{(x,y,z) \mid z = 3-x-y,\ (x,y) \in D\}$. De asemenea, $d\sigma = \sqrt{3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Rezultă că $\mathrm{Flux}_S(\overrightarrow{V}) = \int_S \overrightarrow{V}\cdot\vec{n}d\sigma = \iint_D (15-5x-4y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.
b) Avem $z = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$ şi $(x,y) \in D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq R^2\}$. De asemenea, $\vec{n} = \left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \frac{z}{R}\right)$. De asemenea, $d\sigma = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Rezultă că $\mathrm{Flux}_S(\overrightarrow{V}) = \int_S \overrightarrow{V}\cdot\vec{n}d\sigma = \iint_D \frac{x^2+y^2+(R^2-x^2-y^2)}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, c) Similar cu b)

d) Fie $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$. Câmpul vectorial $\overrightarrow{N} = (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}) = (2x, 2y, -1)$ este normal la S. Fie $\vec{n} = \frac{1}{||\overrightarrow{N}||}\overrightarrow{N} = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\overrightarrow{N}$. Pe de altă parte, $S = \{(x,y,z) \mid z = x^2+y^2,\ (x,y) \in D\}$, unde $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$. Deci $d\sigma = \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$. Rezultă că $\mathrm{Flux}_S(\overrightarrow{V}) = \int_S \overrightarrow{V} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_D [2x^3 + 2y^3 - (x^2+y^2)^2]\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$.

e) Avem $\overrightarrow{N} = (2x, 2y, -2z)$ şi $\vec{n} = (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{-z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}})$. Avem: $D = \{(x,y) \mid 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$, $S = \{(x,y,z) \mid z = \sqrt{x^2+y^2},\ (x,y) \in D\}$, $d\sigma = \sqrt{2}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$.

$\overrightarrow{V} \cdot \vec{n} = \frac{(y-z)x+(z-x)y+(x-y)(-z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{2(y-x)z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Pentru $(x,y,z) \in S$, rezultă că $\overrightarrow{V} \cdot \vec{n} = \frac{2(y-x)\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2(x^2+y^2)}} = \sqrt{2}(y-x)$, deci $\mathrm{Flux}_S(\overrightarrow{V}) = \int_S \overrightarrow{V} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_D 2(y-x)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = 0$.

f) Avem $\vec{n} = (\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, 0)$, deci $\mathrm{Flux}_S(\overrightarrow{V}) = \frac{1}{a}\int_S (x^2 - xy + xz) d\sigma$. Folosim parametrizarea $x = a\cos\theta$, $y = a\sin\theta$, $z = t$, unde $\theta \in [0, 2\pi]$ şi $t \in [-1, 1]$. Fie $\vec{r} = (x,y,z)$. Avem $\vec{r}_\theta = (-a\sin\theta, a\cos\theta, 0)$ şi $\vec{r}_t = (0,0,1)$, deci $d\sigma = ||\vec{r}_\theta \times \vec{r}_t|| d\theta\,\mathrm{dt} = a d\theta\,\mathrm{dt}$. Prin urmare, $\mathrm{Flux}_S(\overrightarrow{V}) = \int_{[0,2\pi]\times[-1.1]} (a^2\cos\theta - a^2\cos\theta\sin\theta + at\cos\theta) d\theta dt$.

Pagina 167

1. $\iiint_K xyze^{xz}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz} = \int_0^1 \mathrm{dx} \int_0^2 \mathrm{dy} \int_0^3 xyze^{xz}\,\mathrm{dz} = \int_0^1 \mathrm{dx} \int_0^2 ye^{xz}|_0^3\,\mathrm{dy} =$
   $= \int_0^1 \mathrm{dx} \int_0^2 y(e^{3x}-1)\,\mathrm{dy} = \int_0^1 (e^{3x}-1)\,\mathrm{dx} \int_0^2 y\,\mathrm{dy} = \left(\frac{e^{3x}}{3} - x\right)\Big|_0^1 \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_0^2 = \frac{2e^3-8}{3}$.

2. Fie $D = \{(x,y) \mid x+y \leq 3, x \geq 0, y \geq 0\}$. $K = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D,\ z \in [0, 3-x-y]\}$. Avem $\iiint_K z\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz} = \iint_D \mathrm{dx}\,\mathrm{dy} \int_0^{3-x-y} z\,\mathrm{dz} = \frac{1}{2}\iint_D (3-x-y)^2\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$.

3. Intersecţia paraboloizilor $x^2+y^2 = 3z$ şi $x^2+y^2 = 4-z$ este cercul $x^2+y^2 = 3,\ z = 1$. Fie $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 3\}$. Atunci $K = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D,\ z \in [\frac{x^2+y^2}{3}, 4-x^2-y^2]\}$. $\mathrm{Vol}(K) = \iiint_K \mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz} = \iint_D \left(4 - x^2 - y^2 - \frac{x^2+y^2}{3}\right)\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$.

   Folosind coordonate polare, $\begin{cases} x = \rho\cos\theta, & \rho \in [0, \sqrt{3}] \\ y = \rho\sin\theta, & \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$, obţinem:

   $\mathrm{Vol}(K) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} \left(4 - \frac{4\rho^2}{3}\right)\rho d\rho = 18\pi$.

4. Intersecţia dintre sfera $x^2+y^2+z^2 = 4$ şi paraboloidul $x^2+y^2 = 3z$ este cercul de ecuaţii

   $x^2+y^2 = 3,\ z = 1$. Avem $K = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D,\ z \in [\frac{x^2+y^2}{3}, \sqrt{4-x^2-y^2}]\}$, unde $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 3\}$,prin urmare, obţinem:

   $\mathrm{Vol}(K) = \iiint_K \mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz} = \iint_D \left(\sqrt{4-x^2-y^2} - \frac{x^2+y^2}{3}\right)\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$.

5. Se poate rezolva similar cu exerciţiile anterioare, sau folosind coordonate sferice: $x = \rho \sin\theta \cos\varphi$, $y = \rho \sin\theta \sin\varphi$, $z = \rho \cos\theta$, unde $\rho \in [0, 1]$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$ şi $\varphi \in [0, 2\pi]$.
   (Din $z \geq 0$, rezultă $\cos\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, Pe de altă parte din $x^2 + y^2 \leq z^2$ rezultă $\sin^2\theta \leq \cos^2\theta$, deci $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$). Deci $\mathrm{Vol}(K) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 \rho^2 \sin\theta d\rho = \frac{(2-\sqrt{2})\pi}{2}$.
6. Folosim coordonate cilindrice: $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $z = t$, $\rho \in [0, 2]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $t \in [0, 1]$. Rezultă că $\iiint_K (z^2 + 1)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 d\rho \int_0^1 (t^2 + 1)\rho\,\mathrm{dt} = 2\pi \int_0^2 \rho d\rho \int_0^1 (t^2 + 1)\,\mathrm{dt}$.
7. Se folosesc: $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $z = t$, unde $\rho \in [0, 2]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $t \in [0, \rho]$.
8. Se folosesc: $x = \rho \sin\theta \cos\varphi$, $y = \rho \sin\theta \sin\varphi$, $z = \rho\cos\theta$, unde $\rho \in [0, a]$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ şi $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Pagina 170

1. Avem $P = x$, $Q = xy$, $R = xyz$. Rezultă că $\mathrm{div}(\overrightarrow{V}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1 + x + xy$ şi $\mathrm{rot}(\overrightarrow{V}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & xy & xyz \end{vmatrix} = (xz, -yz, y)$.
2. Avem $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, de unde rezultă că
   $\mathrm{grad}(f) = \left(\frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{-y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{-z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$, unde $r = ||\overrightarrow{r}||$. Pe de altă parte, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right) = -(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} -$
   $-x \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot 2x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} = (2x^2 - y^2 - z^2) \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}$. În mod similar, obţinem $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (2y^2 - x^2 - z^2) \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}$ şi $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = (2z^2 - x^2 - y^2) \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}$. Rezultă că $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$.
3. Avem $\overrightarrow{V} = -\frac{G\vec{r}}{r^3} = -G\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$. Ca în 1., $\mathrm{div}(\overrightarrow{G}) = 0$, deci $\overrightarrow{V}$ este solenoidal. Prin calcule, se arată că $\mathrm{rot}(\overrightarrow{V}) = \overrightarrow{0}$, deci $\overrightarrow{V}$ e irotaţional.
4. Avem $\mathrm{rot}(\overrightarrow{V}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & x^2 + z & y \end{vmatrix} = (1 - 1, 0, 2x - 2x) = \overrightarrow{0}$, deci $\overrightarrow{V}$ e irotaţional. Căutăm f cu $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + z$ şi $\frac{\partial f}{\partial z} = y$. Observăm că $f(x, y, z) = x^2 y + yz$ verifică aceste condiţii.
5. Avem $\mathrm{div}(\overrightarrow{V}) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy) + \frac{\partial}{\partial y}(-y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(1) = 2y - 2y + 0 = 0$, deci $\overrightarrow{V}$ este solenoidal.

Fie $\overrightarrow{W} = (P, Q, R)$ astfel încât $\mathrm{rot}(\overrightarrow{W}) = V$. Putem alege $R = 0$. Rezultă că $\frac{\partial P}{\partial z} = -y^2$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = -2xy$ şi $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x} = 1$. Deci $P = -y^2 z + f(x, y)$, $Q = -2xyz + g(x, y)$ şi $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} = 1$. Alegem $f(x, y) = y$ şi $g(x, y) = 0$, deci $\overrightarrow{W} = (-y^2 z + y, -2xyz, 0)$.

6. Din Riemann-Green, rezultă că $\int_\gamma (x+y)\,\mathrm{d}x - (x-y)\,\mathrm{d}y = \iint_D (\frac{\partial}{\partial x}(-x+y) - \frac{\partial}{\partial y}(x+y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D (-2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x = -2\,\mathrm{Aria}(D) = -2\pi$.

   Similar, $\int_\gamma y^2\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = \iint_D (1-2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \mathrm{Aria}(D) - 2\iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pi - 2\iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

7. Similar cu 6.

8. a) Avem $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-x^2+y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}$. b) $\int_{\mathcal{C}(O,r)} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = 2\pi$ (nu se poate aplica formula Riemann-Green, deoarece P şi Q nu sunt definite în origine $O(0,0)$, care e în interiorul cercului $\mathcal{C}(O,r)$. c) Dacă $O \notin \mathrm{Int}(\gamma)$, atunci, fie $D = \gamma \cup \mathrm{Int}(\gamma)$. Din Riemman-Green, $\int_\gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$. Dacă $O \in \mathrm{Int}(\gamma)$, fie $r > 0$ astfel încât $\mathcal{C}(O,r) \subset \mathrm{Int}(\gamma)$. Considerăm $D =$ domeniul compact, mărginit de curba γ spre exterior şi cercul $\mathcal{C}(O,r)$ spre interior. Atunci $0 = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_\gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y - \int_{\mathcal{C}(O,r)} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$. Rezultă că $\int_\gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int_{\mathcal{C}(O,r)} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = 2\pi$.

9. $\mathrm{Flux}_S(\overrightarrow{V}_1) = 2\left(\iiint_K x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \iiint_K y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \iiint_K z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\right)$. Folosind coordonate sferice, $\iiint_K x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_K y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_K z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0$.

   $\mathrm{Flux}_S(\overrightarrow{V}_2) = \iiint_K (2x - 2x + 3z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 3\iiint_K z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$. Folosind coordonate sferice, obţinem $\mathrm{Flux}_S(\overrightarrow{V}_2) = 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_0^2 \rho^2\cos^2\theta\rho^2\sin\theta d\rho =$
   $= \pi\int_0^\pi 3\cos^2\theta\sin\theta d\theta \int_0^2 \rho^4 d\rho = \pi\left(-\cos^3\theta\right)\Big|_0^\pi \cdot \frac{\rho^5}{5}\Big|_0^2 = \frac{64\pi}{5}$.

10. Fie $K = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le 1,\ z \ge 0\}$. Atunci $\partial K = S \cup S_0$, unde $S_0 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \le 1,\ z = 0\}$. Pe de altă parte, $\mathrm{div}(\overrightarrow{V}) = 2x - 2x + 2z = 2z$. Din Gauss-Ostrogradski, $\iiint_K 2z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \mathrm{Flux}_S(\overrightarrow{V}) + \mathrm{Flux}_{S_0}(\overrightarrow{V})$ $(*)$. Folosind coordonate polare, $\iiint_K 2z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 2\rho^3\cos\theta\sin\theta d\rho = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin(2\theta)d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{2}$.

    Versorul normalei la S_0, înspre exteriorul lui K, este $\vec{n} = -\vec{k} = (0,0,-1)$. Rezultă că $\mathrm{Flux}_{S_0}(\overrightarrow{V}) = \int_{S_0} \overrightarrow{V} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{S_0} (-z^2) d\sigma = \int_{S_0} 0 d\sigma = 0$, prin urmare, din $(*)$, obţinem $\mathrm{Flux}_S(\overrightarrow{V}) = \frac{\pi}{2}$.

11. Din Gauss-Ostrogradski, $\mathrm{Flux}_S(\overrightarrow{V}) = \iiint_K (2x + 2y + 2z)$, integrala care se calculează cu ajutorul coordonatelor cilindrice $x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta,\ z = t$, unde $\rho \in [0, \sqrt{t}]$, $\theta \in [0, 2\pi]$ şi $t \in [0,1]$. Obţinem:

    $\mathrm{Flux}_S(\overrightarrow{V}) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \mathrm{d}t \int_0^{\sqrt{t}} (2\rho\cos\theta + 2\rho\sin\theta + t)\rho d\rho$.

12. Se rezolvă similar cu exerciţiul 10.

13. Fie $K = \{x^2 + y^2 + z^2 \le R^2\}$ bila de rază R. Atunci $S(O,R) = \partial K$, deci, din Gauss-Ostrogradski, $\mathrm{Flux}_{S(O,R)}(\overrightarrow{V}) = \iiint_K (2y - 2y + 3)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz} = 3\,\mathrm{Vol}(K) = 4\pi R^3$.

14. a) Pentru $(x,y,z) \in S(O,R)$, avem $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = R$. Pe de altă parte, $\vec{n} = \frac{1}{R}\vec{r}$ este câmpul normal unitar exterior la sfera $S(O,R)$. Rezultă că $\mathrm{Flux}_{S(O,R)}(\overrightarrow{E}) = \int_{S(O,R)} \overrightarrow{E} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{S(O,R)} \frac{q}{4\pi R^4} \bar{r} \cdot \bar{r} = \frac{q}{4\pi R^4} \int_{S(O,R)} r^2 d\sigma = \frac{q}{4\pi R^2} \int_{S(O,R)} d\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}\,\mathrm{Aria}(S(O,R)) = q$.

    b) Prin calcule, observăm că $\mathrm{div}(\overrightarrow{E}) = 0$. Dacă $O \notin K$, din Gauss-Ostrogradski rezultă $\mathrm{Flux}_\Sigma(\overrightarrow{E}) = \iiint_K \mathrm{div}(\overrightarrow{E})\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz} = 0$. Dacă $O \in K$, atunci există $R > 0$ astfel încât $S(O,R) \subset \mathrm{Int}(\Sigma) = \overset{\circ}{K}$. Fie $K_1 := K \setminus \mathrm{Int}(S(0,R))$. Avem $\partial K_1 = \Sigma \cup S(O,R)$. Cum $S(O,R)$ este în interiorul lui K_1, trebuie să alegem ca versor al normalei la $S(0,R)$ pe $\vec{n}' = -\frac{1}{R}\vec{r}$, atunci când calculăm $\mathrm{Flux}_{\partial K_1}(\overrightarrow{E})$. Prin urmare, $0 = \iiint_{K_1} \mathrm{div}(\overrightarrow{E})\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz} = \mathrm{Flux}_{\partial K_1}(\overrightarrow{E}) = \mathrm{Flux}_\Sigma(\overrightarrow{E}) - \mathrm{Flux}_{S(O,R)}(\overrightarrow{E})$. Rezultă că $\mathrm{Flux}_\Sigma(\overrightarrow{E}) = q$.

15. Pentru calculul direct, se foloseşte parametrizarea $C : \{x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = 1 - \cos t$. Obţinem $I = \int_C (y-z)\,\mathrm{dx} + (z-x)\,\mathrm{dy} + (x-y)\,\mathrm{dz} = \int_0^{2\pi} [(\sin t + \cos t - 1)(-\sin t)] + (1 - 2\cos t)\cos t + (\cos t - \sin t)\sin t]\,\mathrm{dt} = \int_0^{2\pi} (-2 + \sin t + \cos t) = -4\pi$.

    Fie $\overrightarrow{V} = (y - z, z - x, x - y)$. Avem $\mathrm{rot}(\overrightarrow{V}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y - z & z - x & x - y \end{vmatrix} = (-2,-2,-2)$. Versorul normal unitar la S cu orientarea compatibilă cu cea pozitivă a lui γ este $\vec{n} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Rezultă că $I = \int_S \mathrm{rot}(\overrightarrow{V}) \cdot \vec{n} d\sigma = \int_S (-2\sqrt{2}) d\sigma$. Fie $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$. Avem $S = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D,\ z = 1 - x\}$, deci $d\sigma = \sqrt{2}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$. Obţinem $I = \iint_D (-4)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = -4\,\mathrm{Aria}(D) = -4\pi$. (Se putea observa şi că S este o elipsă plină cu semiaxele $\sqrt{2}$ şi 1, de unde $I = (-2\sqrt{2})\,\mathrm{Aria}(S) = (-2\sqrt{2})\sqrt{2}\pi = -4\pi$)

16. γ e frontiera discului $S = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 \le 1,\ z = 1\}$. Apoi se rezolvă similar cu exerciţiul anterior.

17. $C = \partial S$, unde $S = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ x + y + z = a\}$.

18. γ e frontiera discului $S = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 \le 1,\ z = 1\}$.

4.3 Exerciţii din capitolul 3

Pagina 180

1. a) $\Phi : \mathbb{C} \to \{\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, $\Phi(x+yi) = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$, este un izomorfism de corpuri. b) $\Phi\mathbb{R}[X] \to \mathbb{C}$, $\Phi(1) = 1$, $\Phi(X) = i$, este un morfism surjectiv de inele. Observăm că $f \in \mathrm{Ker}(\Phi)$ dacă şi numai dacă $f(i) = f(-i) = 0$, ceea ce e echivalent cu $X^2 + 1|f$.

2. Fie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un automorfism invariant pe $\mathbb{R}$. Atunci $f(x + yi) = x + yf(i)$. Pe de altă parte, $0 = f(0) = f(i^2 + 1) = f(i)^2 + 1$, deci $f(i) = \pm i$. Prin urmare, sunt doă automorfisme cu proprietatea respectivă: identitatea $z \to z$ şi conjugarea $z \to \bar{z}$.

3. Fie $z_k := \cos(\frac{2\pi k}{n}) + i\sin(\frac{2\pi k}{n}, 1 \leq k \leq n-1$. Aplicaţia $f : U_n \to \mathbb{Z}_n$, $f(z_k) = \hat{k}$, este un izomorfism de grupuri.

4. a) $z_{1,2} = -1 \pm 2i$, b) Observăm că $-3 - 4i = (1 - 2i)^2$, deci $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = -1 + 2i$.

   c) $\Delta = -12$, deci $z_{1,2} = \frac{2i \pm 2i\sqrt{3}}{2(1+i)}$.

   d) $t = z^2$, deci $t^2 - t + 1 = 0$, de unde $t_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Din $z^2 = t_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$, rezultă $z_1 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $z_2 = -z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$. Similar, din $z^2 = t_2 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}$, obţinem $z_3 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3}2 + \frac{1}{2}i$ şi $z_4 = -z_3 = \sqrt{3}2 - \frac{1}{2}i$.

   e) Avem $z^6 = -1 = \cos\pi + i\sin\pi$, deci soluţiile sunt $z_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{6} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{6}$, $k = \overline{0,5}$.

   f), g), h) Se rezolvă similar, folosind forma trigonometrică a numerelor complexe.

5. Reprezentaţi grafic mulţimile:

   a) Cerc de rază 2 cu centrul în origine.

   b) Disc deschis de rază 2 cu centrul în $z_0 = 1 - 2i$.

   c) Coroană circulară cu centrul în $z_0 = 2i$.

   d) Semiplan deschis superior.

   e) Al doilea cuadrant (închis).

   f) Notând $z = x + yi$, atunci $|z - 2i| = |2z + 1|$ e echivalentă cu $x^2 + (y - 2)^2 = (2x + 1)^2 + 4y^2$, de unde $3x^2 + 3y^2 + 4x + 4y - 3 = 0$. Obţinem $3(x + \frac{2}{3})^2 + 3(y + \frac{2}{3})^2 - \frac{17}{3} = 0 \Leftrightarrow (x + \frac{2}{3})^2 + (y + \frac{2}{3})^2 = \frac{17}{9}$, adică ecuaţia unui cerc cu centrul în $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ şi raza $\frac{\sqrt{17}}{3}$.

   g) Similar cu f).

   h) Notând $z = x + yi$, $|z-1| + |z+1| = 4 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 4 - \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$. Rezultă $(x + 1)^2 + y^2 = 16 + (x - 1)^2 + y^2 - 8\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$, deci $4 - x = 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$. Obţinem

$16 - 8x + x^2 = 4x^2 - 8x + 4 + 4y^2$, deci $3x^2 + 4y^2 - 8 = 0$, care e ecuaţia unei elipse.

i) Ramura unei hiperbole; Similar cu h).

j) Notând $z = x + yi$, $\mathrm{Re}(z^2) = x^2 - y^2 < 4$, care e un domeniul conex din plan, mărginit de hiperbola $x^2 - y^2 = 4$.

6. a) z_1, z_2, z_3 sunt coliniare dacă şi numai dacă există $\alpha \in \mathbb{R}$ cu $z_3 - z_1 = \alpha(z_2 - z_1)$.

   b) $(z_1, z_2) \perp (z_3, z_4)$ dacă şi numai dacă $z_1\overline{z_3} + z_2\overline{z_4} = 0$.

Pagina 183

1. a) Avem $\lim_n \frac{n+in^2\sin(\frac{1}{n})}{2+ni} = \lim_n \frac{\left(n+in^2\sin(\frac{1}{n})\right)(2-ni)}{4+n^2} = \lim_n \frac{2n+n^3\sin(\frac{1}{n})}{n^2+4} +$ $+ i\lim_n \frac{-n^2+2n^2\sin(\frac{1}{n})}{n^2+4} = \lim_n \frac{n^2\left(\frac{2}{n}+n\sin(\frac{1}{n})\right)}{n^2+4} + i\lim_n \frac{n^2\left(-1+2\sin(\frac{1}{n})\right)}{n^2+4} = 1 - i$. (Observaţie: $\lim_n n\sin(\frac{1}{n}) = 1$)

   b) $\lim_n[(\frac{2n}{2n+1})^n + (2^{\frac{1}{n}} - 1)ni] = \lim_n \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^n + i\lim_n \frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = e^{-\frac{1}{2}} + i\ln 2$.

2. Studiaţi absolut convergenţa şi convergenţa seriilor:

   a) Fie $z_n = \left(\frac{2}{1+2i}\right)^n$. Avem $|z_n| = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n$, deci seria $\sum_n z_n$ e AC.

   b) Fie $z_n = \frac{1}{n^2} + (-1)^n \sin\frac{1}{\sqrt{n}} i$. Cum seriile $\sum_n \frac{1}{n^2}$ (armonică) şi $\sum_n (-1)^n \sin\frac{1}{\sqrt{n}}$ (Leibniz) sunt convergente, rezultă că $\sum_n z_n$ e convergentă. Pe de altă parte $|z_n| \geq \sin\frac{1}{\sqrt{n}}$ şi $\sum_n \sin\frac{1}{\sqrt{n}}$ e divergentă, deci $\sum_n z_n$ nu este AC.

   c) Seria este divergentă.

   d) $z_n = \frac{n(2+i)^n}{3^n}$, deci $|z_n| = n \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^n$. Din criteriul raportului, rezultă $\sum_n |z_n|$ e convergentă, deci seria $\sum_n z_n$ este AC.

   e) Seria este divergentă, f) Seria este AC.

   g) Avem $z_n = \frac{\sqrt{1+n^2}}{n^2 - i(-1)^n n^3} = \frac{\sqrt{1+n^2}}{n^2+n^4} + \frac{(-1)^n}{n+n^3} i$. Dar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1+n^2}}{n^2+n^4}$ e divergentă, deci $\sum_n z_n$ e divergentă.

   h) Pentru $|z| < 1$, seria este AC. Pentru $|z| > 1$, seria este divergentă. Dacă $|z| = 1$, seria nu este AC. Pentru $z = 1$, este divergentă. Dacă $|z| = 1$ şi $z \neq 1$, atunci şirul $S_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$, $n \geq 0$, este mărginit pentru că $|S_n| \leq \frac{2}{|1-z|}$. Cum $\lim_n \frac{1}{n} = 0$, din criteriul Abel, rezultă că seria $\sum_n \frac{z^n}{n}$ e convergentă.

Pagina 187

1. $\sin z = 0 \Leftrightarrow z \in \pi\mathbb{Z}$, deci tg este definită pe $\mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

   $\cos z = 0 \Leftrightarrow z \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, deci tg este definită pe $\mathbb{C} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$.

   $\mathrm{sh}\, z = -i\sin(iz)$. Prin urmare sh este definită pe $\mathbb{C} \setminus i\pi\mathbb{Z}$.

   $\mathrm{ch}\, z = \cos(iz)$. Prin urmare sh este definită pe $\mathbb{C} \setminus i(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$.

2. Cum $z = x+yi$, $f(z) = (x+yi)^2 + i(x-yi) - 1 = x^2 + 2xyi - y^2 + xi + y - 1 = (x^2-y^2+y-1)+(2xy+x)i$, deci $\mathrm{Re}(f(z)) = x^2-y^2+y-1$ şi $\mathrm{Im}(f(z)) = 2xy+x$. $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(z^2 + i\bar{z} - 1) = \frac{\partial}{\partial z}(z^2) + \frac{\partial}{\partial z}(i\bar{z} - 1) = 2z + 0 = 2z$. Similar $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = i$.

3. Avem $f(z) = u(x,y) + v(x,y)i$, unde $u(x,y) = x^2 + axy + by^2$ şi $v(x,y) = cx^2 + dxy + y^2$. Din relaţiile Cauchy-Riemann, f este olomorfă dacă şi numai dacă $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ şi $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, de unde rezultă $2x+ay = dx+2y$ şi $ax+2by = -2cx-dy$. Cum x, y pot lua orice valoare reală, rezultă că $d = 2$, $a = 2$, $c = -1$ şi $b = -1$. Prin urmare, $f(z) = (x^2 + 2xy - y^2) + (-x^2 + 2xy + y^2)i = (1-i)z^2$.

4. Avem $f(z) = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Privită ca funcţie reală, f e de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, f nu are derivate parţiale în $(0,0)$, şi $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \equiv \mathbb{C}^*$. Prin urmare, $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}i\right) = \frac{x-iy}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\bar{z}}{2|z|}$ şi $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}i\right) = \frac{x+iy}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{z}{2|z|}$. Cum $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \neq 0$ pe $\mathbb{C}^*$, rezultă că f nu e $\mathbb{C}$-derivabilă pe $\mathbb{C}$.

5. $f(z) = |z|^2 = z\bar{z}$, de unde $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = z = 0 \Leftrightarrow z = 0$. Prin urmare f este $\mathbb{C}$-derivabilă doar în 0.

6. $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = z - 2\bar{z} - 1 = 0$ implică $z = \frac{i}{3}$. Prin urmare f este $\mathbb{C}$-derivabilă doar în $\frac{i}{3}$.

7. a) Avem $f(z) = (x+iy)^2 - i(x+iy) + 1 = (x^2 - y^2 + y + 1) + (2xy - x)i$, deci $u(x,y) = x^2 - y^2 + y + 1$ şi $v(x,y) = 2xy - x$. Atunci $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}$ şi $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y + 1 = -\frac{\partial v}{\partial x}$, deci f este olomorfă. b), c) Se rezolvă similar.

8. Avem $\frac{\partial u}{\partial x} = 2e^{2x}\cos(2y) + y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -2e^{2x}\sin(2y) + x$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4e^{2x}\cos(2y)$ şi $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -4e^{2x}\cos(2y)$. Prin urmare $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, deci u este armonică pe $\mathbb{R}^2$.

   Metoda 1: Căutăm $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ astfel încât $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2e^{2x}\sin(2y) - x$ şi $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2e^{2x}\cos(2y) + y$. Din $\frac{\partial v}{\partial x} = 2e^{2x}\sin(2y) - x$, rezultă că $v(x,y) = e^{2x}\sin 2y - \frac{x^2}{2} + \varphi(y)$, deci $\frac{\partial v}{\partial y} = 2e^{2x}\cos(2y) + \varphi'(y) = 2e^{2x}\cos(2y) + y$, de unde $\varphi(y) = \frac{y^2}{2} + c$, unde $c \in \mathbb{R}$. Prin urmare, $f(z) = e^{2x}\cos(2y) + xy + (e^{2x}\sin 2y - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + c)i = e^{2x}(\cos(2y) + i\sin(2y)) - \frac{i}{2}(x^2 + 2xyi - y^2) + ci = e^{2z} - \frac{i}{2}z^2 + ci$. Cum $f(0) = 1 + i$, rezultă $c = 1$, deci $f(z) = e^{2z} - \frac{i}{2}z^2 + i$.

   Metoda 2: f olomorfă, rezultă $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = 2e^{2x}\cos(2y) + y - i(-2e^{2x}\sin(2y) + x) = 2e^{2x}(\cos(2y) + i\sin(2y)) - i(x+iy) = 2e^{2z} - iz$. Rezultă că $f(z) = e^{2z} - \frac{i}{2}z^2 + c$. Din condiţia $f(0) = 1 + i$, rezultă $c = i$.

9. Cum $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}i = -6xy + (3x^2 - 3y^2)i = 3i(x^2 + 2xyi - y^2) = 3iz^2$, rezultă $f(z) = iz^3 + c$. Cum $f(1) = i$, obţinem $c = 0$, deci $f(z) = iz^3$.

10. Similar cu exerciţiile anterioare, obţinem $f(z) = ie^{-iz} + z^2$.

11. Se arată că $\Delta v = 0$, dacă şi numai dacă $v(x,y) = a(x^2 - y^2) + b$ pentru $a, b \in \mathbb{R}$. Rezultă că $f(z) = aiz^2 + bi + c$, unde $c \in \mathbb{R}$. Din $f(0) = 1$, obţinem $b = 0$ şi $c = 1$. Din $f(1) = 1 + i$, rezultă $a = 1$. Deci $f(z) = iz^2 + 1$.

12. $f(z) = \frac{1}{z} + 1$.

13. Avem $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2} + 2$ şi $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2} - 1$. Din $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ şi $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$ rezultă $v(x,y) = 2\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + x + 2y + c$, unde $c \in \mathbb{R}$, deci $f(z) = \ln(x^2+y^2) + 2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}i + 2x - y + 2yi + xi + ci = 2(\ln\sqrt{x^2+y^2} + i\operatorname{arctg}\frac{y}{x}) + (2+i)(x+yi) + ci = 2\ln z + (2+i)z + ci$. Cum $f(1) = 2\ln 1 + 2 + i + ci = 2$, rezultă $c = -1$, deci $f(z) = 2\ln z + (2+i)z - i$.

14. $f(z) = i(\ln z + 1)$.

15. $f(z) = e^z + \frac{i}{z}$.

16. $f(z) = ze^z$.

17. $f(z) = z + \frac{1}{z}$.

18. $f(z) = -iz^2 + \frac{2}{z}$.

19. a) $\sin(1+i) = \sin 1 \operatorname{ch} 1 + i\cos 1 \operatorname{sh} 1$.

    b) $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - 2i) = \frac{\sin(\frac{\pi}{4}-2i)}{\cos(\frac{\pi}{4}-2i)} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}\operatorname{ch}(-2)+i\cos\frac{\pi}{4}\operatorname{sh}(-2)}{\cos\frac{\pi}{4}\operatorname{ch}(-2)-i\sin\frac{\pi}{4}\operatorname{sh}(-2)} = \frac{\operatorname{ch}(-2)+i\operatorname{sh}(-2)}{\operatorname{ch}(-2)-i\operatorname{sh}(-2)}$

    c) $i^i = e^{i\operatorname{Ln} i} = e^{i(\ln|i|+i\operatorname{Arg}(i))} = e^{-\operatorname{Arg}(i)} = \{e^{-\frac{\pi}{2}+2k\pi} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

    d) $\ln(-2) = \ln|-2| + i\arg(-2) = \ln 2 + i\pi$.

    e) Avem $\operatorname{sh}(\ln(2)+\frac{\pi i}{3}) = \frac{1}{2i}(e^{-\frac{\pi}{3}+i\ln 2} - e^{\frac{\pi}{3}-i\ln 2}) = \frac{1}{2i}(e^{-\frac{\pi}{3}}(\cos\ln 2 + i\sin\ln 2) - e^{\frac{\pi}{3}}(\cos(\ln 2) - i\sin(\ln 2)))$. Similar, $\operatorname{ch}(\ln(2) + \frac{\pi i}{3})$ şi $\operatorname{th}(\ln(2) + \frac{\pi i}{3})$.

    f) $\ln(1+3i) = \ln|10| + i\arg(1+3i)$.

    g) $\operatorname{sh}(1-i) = \frac{(e^{1+i}-e^{-1-i})}{2i} = \frac{e(\cos 1+i\sin 1)-e^{-1}(\cos 1-i\sin 1)}{2i} = -i(\cos 1\operatorname{sh} 1 + \sin 1\operatorname{ch} 1)$.

    h) $\operatorname{Arccos}(i) = -i\operatorname{Ln}(i\pm\sqrt{i^2-1}) = -i\operatorname{Ln}((1\pm\sqrt{3})i) = -i\ln|1\pm\sqrt{3}| + \operatorname{Arg}((1\pm\sqrt{3})i))$, de unde $\operatorname{Arccos}(i) = -i\ln|1\pm\sqrt{3}| \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$.

20. a) $e^z = -2i + 1 \Leftrightarrow z \in \operatorname{Ln}(-2i+1) = \ln|5| + i\operatorname{Arg}(-2i+1)$.

    b) $\cos(z) = -2 \Leftrightarrow z \in \operatorname{Arccos}(-2) = -i\operatorname{Ln}(i\pm\sqrt{3}) = -i\ln 2 + \operatorname{Arg}(\pm\sqrt{3}+i)$. Rezultă $z \in -i\ln 2 + \frac{\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}$ sau $z \in -i\ln 2 + \frac{5\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}$.

    c) $\sin(z) = i\sqrt{3} \Leftrightarrow z \in \operatorname{Arcsin}(i\sqrt{3}) = -i\operatorname{Ln}(-\sqrt{3}\pm 2)$.

    d) $\operatorname{ch}(z) = 1 + i \Leftrightarrow z \in \operatorname{Arcch}(1+i) = \operatorname{Ln}(1+i+\sqrt{(1+i)^2-1})$.

21. Căutăm $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ cu $f(-1) = -1$, $f(1) = 1$ şi $f(0) = i$. Rezultă $b-a = d-c$, $b+a = d+c$ şi $b = di$, de unde obţinem $a = 1, b = i, c = i, d = 1$, deci $f(z) = \frac{z+i}{iz+1}$. Observaţie: $f(-i) = 0$ şi $f(i) = \infty$.

Pagina 191

1. Avem $z^3 - 6z^2 + 11z - 6 = (z-1)(z-2)(z-3)$, deci $f(z) = \frac{a}{z-1} + \frac{b}{z-2} + \frac{c}{z-3}$, de unde $a(z^2-5z+6) + b(z^2-4z+3) + c(z^2-3z+2) = 1$. Identificând coeficienţii, obţinem sistemul $\begin{cases} a+b+c=0 \\ -5a-4b-3c=0 \\ 6a+3b+2c=1 \end{cases}$, de unde $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$,

$c = \frac{1}{2}$. $\frac{1}{z-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $|z| < 1$, $\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n$, $|z| < 2$ şi $\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} z^n$, $|z| < 3$.

$f(z) = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2\cdot 3^{n+1}}\right) z^n$, $|z| < 1$.

a) Avem $\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{1-(z-1)} = -\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n$, $|z-1| < 1$.

De asemenea, $\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{2-(z-1)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-1}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{2^n}$, $|z-1| < 2$.

Prin urmare, $f(z) = \frac{\frac{1}{2}}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)(z-1)^n$, $|z-1| < 2$.

b) Pentru $|z| > 1$, $\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}$. Pentru $|z| > 2$, $\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n}$.

Pentru $|z| > 3$, $\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{3}{z}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{z^n}$. Prin urmare pe $1 < |z| < 2$, avem

$f(z) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}z^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\cdot 3^{n+1}}z^n$.

c) Pe $2 < |z| < 3$, avem $f(z) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\cdot 3^{n+1}}z^n$.

d) Pe $|z| > 3$, avem $f(z) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{z^n}$.

2. Scriem $f(z) = \frac{a}{z-1} + \frac{b}{z-2i} + \frac{c}{z+2i}$; se rezolvă similar cu exerciţiul anterior. $\mathrm{Rez}(f,\infty) =$ coeficientul lui $\frac{1}{z}$ din dezvoltarea lui f pe $|z| > 2$.

3. Avem $f(z) = \sin(\frac{z}{1-z}) = -\sin(1 + \frac{1}{z-1}) = -\sin 1\cos\frac{1}{z-1} - \cos 1\sin\frac{1}{z-1} =$
$= -\sin 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!(z-1)^{2n}} - \cos 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}}$. $\mathrm{Rez}(f,1) =$ coeficientul lui $\frac{1}{z-1}$ în dezvoltarea lui f, deci $\mathrm{Rez}(f,1) = -\cos 1$.

4. $f(z) = ze^{-\frac{1}{z^2}} = z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!z^{2n}} = z + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!z^{2n-1}}$, deci $\mathrm{Rez}(f,0) = -1$.

5. Avem $\lim_{z\to 0} zf(z) = \infty$ şi $\lim_{z\to 0} z^2 f(z) = 1$, deci 0 e pol de ordin 2. Rezultă că $\mathrm{Rez}(f,0) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\left(z^2 f(z)\right)' = \lim_{z\to 0}\left(\frac{z}{\sin z}\right)' = \lim_{z\to 0}\frac{\sin z - z\cos z}{\sin^2 z} = \lim_{z\to 0}\frac{(\sin z - z\cos z)'}{(\sin^2 z)'} = \lim_{z\to 0}\frac{z\sin z}{2\sin z\cos z} = \lim_{z\to 0}\frac{z}{2\cos z} = 0$.

6. $z_1 = i$ şi $z_2 = -i$ sunt poli de ordin n. $\mathrm{Rez}(f,i) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to i}\left(\frac{1}{(z+i)^n}\right)^{(n-1)} = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to i}(-1)^{n-1}n(n+1)\cdots(2n-2)(z+i)^{-2n+1} = \frac{(-1)^{n-1}n(n+1)\cdots(2n-2)}{(2i)^{2n-1}(n-1)!}$.
Similar, $\mathrm{Rez}(f,-i) = \frac{(-1)^{n-1}n(n+1)\cdots(2n-2)}{(-2i)^{2n-1}(n-1)!} = -\mathrm{Rez}(f,i)$.

7. $\mathrm{Rez}(f,0) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\left(\frac{z}{e^z-1}\right)' = \lim_{z\to 0}\frac{e^z-1-ze^z}{(e^z-1)^2} = \lim_{z\to 0}\frac{-ze^z}{2(e^z-1)e^z} = -\frac{1}{2}$.

8. Avem $\mathrm{Rez}(f,\infty) = -\mathrm{Rez}\left(\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)\right) = -\mathrm{Rez}\left(\frac{1}{z(1-3z)(1-z^n)}, 0\right) = -1$.

Pagina 195

1. Funcţia $f(z) = z^2$ este olomorfă şi are primitiva $F(z) = \frac{z^3}{3}$. Rezultă că $\int_\gamma z^2 \,\mathrm{dz} = F(i) - F(1) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}i$.

2. $\int_\gamma (z^2 + \bar{z}) \,\mathrm{dz} = \int_\gamma z^2 \,\mathrm{dz} + \int_\gamma \bar{z} \,\mathrm{dz}$. γ e un drum închis, şi $f(z) = z^2$ este olomorfă pe $\mathbb{C}$, deci $\int_\gamma z^2 \,\mathrm{dz} = 0$, din teorema Cauchy. Pe de altă parte, $\int_\gamma \bar{z} \,\mathrm{dz} = \int_\gamma (x - iy)(\mathrm{dx} + i\,\mathrm{dy}) = \int_\gamma x \,\mathrm{dx} + y \,\mathrm{dy} + i \int_\gamma -y \,\mathrm{dx} + x \,\mathrm{dy}$. Avem $D = \{|z| \leq 4, \mathrm{Im}(z) \geq 0\} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4,\ y \geq 0\}$, un semidisc cu raza 2. Folosind formula Riemann-Green, obţinem: $\int_\gamma x \,\mathrm{dx} + y \,\mathrm{dy} = \iint_D 0 \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = 0$ şi $\int_\gamma -y \,\mathrm{dx} + x \,\mathrm{dy} = \iint_D 2 \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = 2\,\mathrm{Aria}(D) = 4\pi$. Prin urmare, $\int_\gamma (z^2 + \bar{z}) \,\mathrm{dz} = 2\pi i$.

3. a) Funcţia $f(z) = \frac{z}{(z^2+4)^2} = \frac{z}{(z-2i)^2(z+2i)^2}$ are doi poli de ordin 2, $z_{1,2} = \pm 2i$. Avem $|z_1 - i + 1| = |2i - i + 1| = \sqrt{2} < 2$ şi $|z_2 - i + 1| = |-2i - i + 1| = \sqrt{10} > 2$, deci $\int_{|z-i+1|=2} \frac{z}{(z^2+4)^2} \,\mathrm{dz} = 2\pi i \,\mathrm{Rez}(f, 2i) = 2\pi i \frac{1}{1!} \left(\frac{z}{(z+2i)^2} \right)' \Big|_{z=2i} = 2\pi i \left(\frac{(z+2i) - 2z}{(z+2i)^3} \right)' \Big|_{z=2i} = 0$.

   b) Funcţia $f(z) = \frac{\cos \frac{\pi z}{2}}{(z+i)^4}$ are un pol de ordin 4, $z_1 = -i$. Cum $|-i + 2i| = 1 < 2$, rezultă
   $\int_{|z+2i|=2} \frac{\cos \frac{\pi z}{2}}{(z+i)^4} = 2\pi i \,\mathrm{Rez}(f, -i) = \frac{2\pi i}{3!} \left(\cos \frac{\pi z}{2} \right)''' |_{z=-i} = \frac{\pi i}{3} \cdot \frac{\pi^3}{8} \sin\left(-\frac{\pi i}{2}\right) = \frac{\pi^4}{24} \,\mathrm{sh}\, \frac{\pi}{2}$. (Am folosit identitatea $\sin(iz) = i \,\mathrm{sh}\, z$)

   c) Funcţia $f(z) = \mathrm{ctg}(\pi z) = \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$ are polii simpli $z_k = k$, $k \in \mathbb{Z}$. În discul deschis $|z| < \sqrt{2}$, f are polii $z_{-1} = -1, z_0 = 0$ şi $z_1 = 1$. Fie $g(z) = \cos(\pi z)$, $h(z) = \sin(\pi z)$ şi $h'(z) = \pi \cos(\pi z)$. Avem $\mathrm{Rez}(f, -1) = \frac{g(-1)}{h'(-1)} = \frac{\cos(-\pi)}{\pi \cos(-\pi)} = \frac{1}{\pi}$. Similar, $\mathrm{Rez}(f, 0) = \mathrm{Rez}(f, 1) = \frac{1}{\pi}$. Deci $\int_{|z|=\sqrt{2}} \mathrm{ctg}(\pi z) \,\mathrm{dz} = 2\pi i \frac{3}{\pi} = 6i$.

   d) Avem $\int_{|z|=2} \frac{e^z \sin z}{(1-z)^3} \,\mathrm{dz} = 2\pi i \,\mathrm{Rez}(\frac{e^z \sin z}{(1-z)^3}, 1) = \frac{2\pi i}{2!} \left(-e^z \sin z \right)'' \Big|_{z=1} =$
   $= \pi i (-2e^z \cos z)|_{z=1} = -2\pi e i \cos 1$.

   e) $\int_{|z|=2} \frac{\mathrm{tg}\, z}{z^2} = 2\pi i \,\mathrm{Rez}(\frac{\mathrm{tg}\, z}{z^2}, 0) = 2\pi i \lim_{z \to 0} \frac{\mathrm{tg}\, z}{z} = 2\pi i$.

   f) $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z} = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n! z^n} \cdot \sum_{n=0}^\infty z^n$. Prin urmare, $\mathrm{Rez}(f, 0) =$ coeficientul lui $\frac{1}{z}$ din dezvoltarea anterioară $= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n!} = e - 1$. Pe de altă parte, $\mathrm{Rez}(f, 1) = (z-1) f(z)|_{z=1} = -e$. Obţinem $\int_{|z|=2} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z} = 2\pi i (\mathrm{Rez}(f, 0) + \mathrm{Rez}(f, 1)) = -2\pi i$.

   Sau: $\int_{|z|=2} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z} = -2\pi i \,\mathrm{Rez}(f, \infty) = 2\pi i \,\mathrm{Rez}\left(\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0 \right) = 2\pi i \,\mathrm{Rez}(\frac{e^z}{z(z-1)}) = -2\pi i$.

   g) $\int_{|z-3|=1} \frac{e^{iz} - \sin z}{(z-\pi)^3} \,\mathrm{dz} = 2\pi i \,\mathrm{Rez}(\frac{e^{iz} - \sin z}{(z-\pi)^3}, \pi) = \pi i (e^{iz} - \sin z)''|_{z=\pi} = \pi i$.

   h) $\int_{|z|=4} \frac{1}{z \sin z} \,\mathrm{dz} = 2\pi i \left(\mathrm{Rez}(\frac{1}{z \sin z}, -\pi) + \mathrm{Rez}(\frac{1}{z \sin z}, 0) + \mathrm{Rez}(\frac{1}{z \sin z}, \pi) \right) = 0$.

   i) $\int_{|z+i|=\sqrt{6}} \frac{iz}{z^3 - 6z^2 + 11z - 6} \,\mathrm{dz} = \int_{|z+i|=\sqrt{6}} \frac{iz}{(z-1)(z-2)(z-3)} \,\mathrm{dz} =$
   $= 2\pi i \,\mathrm{Rez}\left(\frac{iz}{(z-1)(z-2)(z-3)}, 1 \right) + 2\pi i \,\mathrm{Rez}\left(\frac{iz}{(z-1)(z-2)(z-3)}, 2 \right) = 3\pi$,

   j) $\int_{|z|=r} \frac{e^{iz}}{(z-i)(z+2)} \,\mathrm{dz} = 2\pi i \left(\mathrm{Rez}\left(\frac{e^{iz}}{(z-i)(z+2)}, -2 \right) + \mathrm{Rez}\left(\frac{e^{iz}}{(z-i)(z+2)}, i \right) \right) =$

$= 2\pi i \cdot \frac{-e^{-2i}+e^{-1}}{2+i}$.

k) $f(z) = \frac{\operatorname{sh} z\, \mathrm{dz}}{(z^2+4)^2(z-2)}$ are un pol simplu $z_1 = 2$ şi doi poli dubli $z_{2,3} = \pm 2i$. Dacă $r \in (0,2)$, atunci $\int_{|z|=r} f(z)\, \mathrm{dz} = 0$. Dacă $r > 2$, atunci $\int_{|z|=r} f(z)\, \mathrm{dz} = 2\pi i(\operatorname{Rez}(f,2) + \operatorname{Rez}(f,2i) + \operatorname{Rez}(f,-2i))$.

l) $f(z) = \frac{z^n}{(z-3)(z^n-1)}$ are polii $z_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$, $k = \overline{0, n-1}$, situaţi pe cercul $|z| = 1$ şi polul $z_{n+1} = 3$. Rezultă că: $\int_{|z|=2} \frac{z^n}{(z-3)(z^n-1)}\, \mathrm{dz} = -2\pi i(\operatorname{Rez}(f,\infty) + \operatorname{Rez}(f,3)) = \frac{-2\pi i}{3^n-1}$.

4. a) $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{dt}}{5+3\sin t} = \int_{|z|=1} \frac{1}{5+3\cdot\frac{z^2-1}{2iz}} \cdot \frac{1}{iz}\, \mathrm{dz} = \int_{|z|=1} \frac{2}{10iz+3(z^2-1)}\, \mathrm{dz} =$

$= \int_{|z|=1} \frac{2}{(3z+i)(z+3i)}\, \mathrm{dz} = 2\pi i \operatorname{Rez}\left(\frac{2}{(3z+i)(z+3i)}, -\frac{i}{3}\right) = \frac{6\pi}{5}$.

b) $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{dt}}{5-3\cos t} = \int_{|z|=1} \frac{1}{5-3\cdot\frac{z^2+1}{2z}} \cdot \frac{1}{iz}\, \mathrm{dz} = \int_{|z|=1} \frac{2i}{3z^2-10z-3}\, \mathrm{dz} =$

$= 2i\int_{|z|=1} \frac{1}{(3z+1)(z+3)}\, \mathrm{dz} = -4\pi \operatorname{Rez}\left(\frac{1}{(3z+1)(z+3)}, -\frac{1}{3}\right) = -\frac{3\pi}{2}$.

c) $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{dt}}{(2+\cos t)^2} = \int_{|z|=1} \frac{1}{\left(2+\frac{z^2+1}{2z}\right)^2} \cdot \frac{\mathrm{dz}}{iz} = \int_{|z|=1} \frac{-4iz}{(z^2+4z+1)^2}\, \mathrm{dz} =$

$= 8\pi \operatorname{Rez}\left(\frac{z}{(z^2+4z+1)^2}, -2+\sqrt{3}\right) = 8\pi \operatorname{Rez}\left(\frac{z}{(z+2+\sqrt{3})^2(z+2-\sqrt{3})^2}, -2+\sqrt{3}\right) =$

$= 8\pi \left(\frac{z}{(z+2+\sqrt{3})^2}\right)'\Bigg|_{z=-2+\sqrt{3}} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$.

d) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos 3t}{5+3\cos t}\, \mathrm{dt} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(3u-3\pi)}{5+3\cos(u-\pi)}\, \mathrm{du} = \int_0^{2\pi} \frac{-\cos(3u)}{5-3\cos u}\, \mathrm{du} =$

$= \int_0^{2\pi} \frac{3\sin^2 u\cos u - \cos^3 u}{5-3\cos u}\, \mathrm{du} = \int_{|z|=1} \frac{3\frac{(z^2-1)^2(z^2+1)}{-8z^3} - \frac{(z^2+1)^3}{8z^3}}{5-3\cdot\frac{z^2+1}{2z}} \frac{\mathrm{dz}}{iz} =$

$= \frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{(z^4-z^2+1)\, \mathrm{dz}}{z^3(3z^2-10z+3)} = \frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{(z^4-z^2+1)\, \mathrm{dz}}{z^3(3z-1)(z-3)}$.

e) $\int_0^{2\pi} \frac{1+\sin t}{2+\cos t}\, \mathrm{dt} = \int_{|z|=1} \frac{1+\frac{z^2-1}{2iz}}{2+\frac{z^2+1}{2z}} \frac{\mathrm{dz}}{iz} = -\int_{|z|=1} \frac{z^2+2iz-1}{z(z^2+4z+1)}\, \mathrm{dz}$.

f) Folosind $u = 2t$, obţinem $\int_0^{\pi} \frac{\cos^2 t}{2+\sin(2t)}\, \mathrm{dt} = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos u}{2+\sin u}\, \mathrm{du}$.

5. a) Funcţia $R(z) = \frac{z^2}{(1+z^2)^3}$ are polii tripli $z_1 = i$ şi $z_2 = -i$. Cum $\operatorname{Im}(z_1) > 0$ şi $\operatorname{Im}(z_2) < 0$, rezultă că $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^3}\, \mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^3}\, \mathrm{dx} = \pi i \operatorname{Rez}(R(z), i) = \frac{\pi i}{2!}\left(\frac{z^2}{(z+i)^3}\right)''\Bigg|_{z=i} = \frac{\pi i}{2}\left(\frac{2z^2-8iz-2}{(z+i)^5}\right)\Bigg|_{z=i} = \frac{\pi}{16}$.

b) Funcţia $R(z) = \frac{1}{z^6+1}$ are polii simpli $z_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{6} + i\sin\frac{(2k+1)k}{6}$, $k = \overline{0,5}$. $\operatorname{Im}(z_k) > 0$ pentru $k = 0,1,2$ şi $\operatorname{Im}(z_k) < 0$ pentru $k = 3,4,5$. Prin urmare, $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^6+1}\, \mathrm{dx} = \pi i\sum_{k=0}^{2} \operatorname{Rez}\left(\frac{1}{z^6+1}, z_k\right)$. Pe de altă parte, $\operatorname{Rez}\left(\frac{1}{z^6+1}, z_k\right) = \frac{1}{6z_k^5} = -\frac{z_k}{6}$, $k = 0,1,2$. Rezultă că $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^6+1}\, \mathrm{dx} = -\frac{\pi i}{6}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + i - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{\pi}{3}$.

c) Ecuaţia $z^4 + 1 = z^4 + 2z^2 + 1 - 2z^2 = (z^2 - \sqrt{2}z + 1)(z^2 + \sqrt{2}z + 1) = 0$ are soluţiile $z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$, $z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$, $z_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$, $z_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$. Prin urmare, $\int_0^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\, \mathrm{dx} = \pi i\left(\operatorname{Rez}\left(\frac{z^2+1}{z^4+1}, \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) + \operatorname{Rez}\left(\frac{z^2+1}{z^4+1}, -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\right)$.

d) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{dx}}{(x^2+4x+5)^2} = 2\pi i \operatorname{Rez}(\frac{1}{(z^2+4z+5)^2}, -2+i) = \left.\frac{-4\pi i}{(z+2+i)^3}\right|_{z=-2+i} = \frac{\pi}{2}$.

e) Similar cu c), f) Similar cu b)

6. a) Avem $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,\mathrm{dx}$. Pe de altă parte,

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+1)(x^2+4)}\,\mathrm{dx} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,\mathrm{dx} + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,\mathrm{dx}$.

Dar $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,\mathrm{dx} = 0$, deci

$\int_0^{\infty} \frac{\cos x\,\mathrm{dx}}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}\,\mathrm{dx}}{(x^2+1)(x^2+4)} = \pi i \left(\operatorname{Rez}\left(\frac{e^{iz}}{(z^2+1)(z^2+4)}, i\right) + \right.$

$\left. + \operatorname{Rez}\left(\frac{e^{iz}}{(z^2+1)(z^2+4)}, 2i\right)\right) = \pi i \left(\frac{e^{-1}}{6i} + \frac{e^{-2}}{-12i}\right) = \frac{\pi}{6e} - \frac{\pi}{12e^2}$.

b) Similar, obţinem $\int_0^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+3}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2i}\int_0^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2+3}\,\mathrm{dx} = \pi \operatorname{Rez}\left(\frac{ze^{iz}}{z^2+3}, i\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{2e^{\sqrt{3}}}$.

c) $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+4)}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+4)}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2+4)}\,\mathrm{dx} = \pi \operatorname{Rez}\left(\frac{e^{iz}}{z(z^2+4)}, 2i\right) +$

$+\frac{\pi}{2} \operatorname{Rez}\left(\frac{e^{iz}}{z(z^2+4)}, 0\right) = \frac{\pi(2-e^{-2})}{8}$.

d) $\int_0^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x}\,\mathrm{dx} = \frac{\pi}{2} \operatorname{Rez}\left(\frac{e^{iax}}{x}, 0\right) = \frac{\pi}{2}$.

Pagina 199

1. Funcţia $f(t) = t$ e impară pe $(-\pi, \pi)$, deci $S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt)$, unde $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin(nt)\,\mathrm{dt}$, $n \geq 1$. Avem $b_n = -\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} t(\cos(nt))'\,\mathrm{dt} = -\frac{2}{n\pi} t\cos(nt)|_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} \cos(nt)\,\mathrm{dt} = -\frac{2}{n\pi}\pi\cos(n\pi) = \frac{2(-1)^{n-1}}{n}$. Deci $S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n}\sin(nt)$. În particular, obţinem:

   $S(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = (n = 2k+1) = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{3k}}{2k+1}$, deci $\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$. (Această identitate se poate obţine şi punând $x = 1$ în $\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$)

   Din identitatea Parseval, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\,\mathrm{dt} = \frac{2\pi^2}{3}$, de unde $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

2. Cum $f(t) = |t|$ e pară, $S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)$, $a_n = \frac{2}{2}\int_0^2 t\cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)\mathrm{dt}$, $n \geq 0$. Avem $a_0 = \int_0^2 t\,\mathrm{dt} = 2$. Pentru $n \geq 1$, $a_n = \int_0^2 t\cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)\mathrm{dt} = \frac{2}{n\pi} t\sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right)\Big|_0^2 -$

   $-\frac{2}{n\pi}\int_0^2 \sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right)\mathrm{dt} = \frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi t}{2}\Big|_0^2 = \frac{4((-1)^n-1)}{n^2\pi^2}$. Prin urmare $S(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4((-1)^n-1)}{n^2\pi^2} =$

   $= 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{(2k+1)^2\pi^2}$. Cum $S(0) = 0$, rezultă că $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

3. $b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \sin\left(\frac{n\pi t}{\ell}\right)\mathrm{dt} = \frac{2((-1)^n-1)}{n\pi}$, $n \geq 1$ şi $S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^n-1)}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi t}{\ell}\right)$. Avem $S(0) = \frac{f(0+0)+f(0-0)}{2} = 0$.

4. Similar cu 2).

5. $a_0 = \int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{dt} = \int_{-1}^{0}(2-t)\,\mathrm{dt} + \int_0^1 t\,\mathrm{dt} = 3$. Pentru $n \geq 1$, avem:
$a_n = \int_{-1}^{1} f(t)\cos(n\pi t)\,\mathrm{dt} = \int_{-1}^{0}(2-t)\cos(n\pi t)\,\mathrm{dt} + \int_0^1 t\cos(n\pi t)\,\mathrm{dt} = \frac{2((-1)^n-1)}{n^2\pi^2}$ şi
$b_n = \int_{-1}^{1} f(t)\sin(n\pi t)\,\mathrm{dt} = \int_{-1}^{0}(2-t)\sin(n\pi t)\,\mathrm{dt} + \int_0^1 t\sin(n\pi t)\,\mathrm{dt} = \frac{2((-1)^n-1)}{n\pi}$. Deci
$S(t) = \frac{3}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2((-1)^n-1)}{n^2\pi^2}\cos(n\pi t) + \frac{2((-1)^n-1)}{n\pi}\sin(n\pi t)\right)$, de unde $S(0) = \frac{f(0+0)+f(0-0)}{2} = 1$.

6. Dezvoltarea lui $f_1(t) = \sin(2t)$ este $S_1(t) = \sin(2t)$! Altfel spus, $a_n = 0$, $(\forall) n \geq 0$, $b_1 = 0, b_2 = 1$ şi $b_n = 0$, $(\forall) n \geq 2$. Similar, $f_2(t) = S_2(t) = \cos(2t)$, adică $a_n = \delta_{n2}$, $n \geq 0$, şi $b_n = 0$, $n \geq 1$. Funcţia $f_3(t) = e^{2|t|}$ este pară, deci $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{2t}\,\mathrm{dt} = \frac{e^{2\pi}-1}{\pi}$, $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{2t}\cos(nt)\,\mathrm{dt}$ pentru $n \geq 1$, şi $S(t) = \frac{e^{2\pi}-1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nt)$.

7. Dezvoltarea în sin a lui f e $S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right)$, $b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 f(t)\sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right)\mathrm{dt}$
$= \int_0^1 \sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right)\mathrm{dt} - \int_1^2 \sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right)\mathrm{dt} = \frac{2}{n\pi}\left(1 - 2\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \cos(n\pi)\right)$.
Dezvoltarea în cos a lui f este $S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)$, unde $a_0 = 0$ şi
$a_n = \int_0^1 \cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)\mathrm{dt} - \int_1^2 \cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)\mathrm{dt} = \frac{4}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.
Din identitatea Parseval pentru dezvoltarea în cos, obţinem $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

8. f este o funcţie pară, deci $S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)$, unde $a_0 = 1$ şi pentru $n \geq 1$, $a_n = \int_1^2 \cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)\mathrm{dt} = -\frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.

9. $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - t)\,\mathrm{dt} = \pi$, $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - t)\cos(nt)\,\mathrm{dt}$, $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-t)\sin(nt)\,\mathrm{dt}$, $n \geq 1$. Dezvoltarea în cos: $S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nt)$. Dezvoltarea în sin: $S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt)$.

10. Se rezolvă similar.

11. Se rezolvă similar.

12. Dezvoltarea în sin pentru $f_1(t) = \cos(kt)$ este $S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(nt)$, unde $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(kt)\sin(nt)\,\mathrm{dt} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\sin((n+k)t) + \sin((n-k)t))\,\mathrm{dt}$. Dacă $n = k$, atunci $b_a = 0$. Dacă $n \neq k$, atunci $b_n = \frac{1-(-1)^{n+k}}{\pi(n+k)} + \frac{1-(-1)^{a-n}}{\pi(n-k)}$. Dezvoltarea în cos pentru $f(t) = \cos(kt)$ este $S(t) = \cos(kt)$, adică $a_0 = \cdots = a_{k-1}$, $a_k = 1$, $a_n = 0$, $n \geq k+1$. Similar pentru $f_2(t) = \sin(kt)$ şi $f_3(t) = e^{at}$.

Pagina 201

1. a) $F(\omega) := \mathcal{F}[e^{-|t|}](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|}e^{-i\omega t}\,\mathrm{dt} = \int_{-\infty}^{0} e^{(1-i\omega)t}\,\mathrm{dt} + \int_0^{\infty} e^{(-1-i\omega)t}\,\mathrm{dt}$
$= \frac{e^{(1-i\omega)t}}{1-i\omega}\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{e^{(-1-i\omega)t}}{-1-i\omega}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{1-i\omega} + \frac{1}{1+i\omega} = \frac{2}{\omega^2+1}$. Rezultă că $\mathcal{F}[e^{-a|t|}](\omega) = \frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right) = \frac{2a}{\omega^2+a^2}$.
b) Din a), rezultă $F(\omega) := \mathcal{F}[e^{-7|t|}](\omega) = \frac{14}{\omega^2+49}$. Deci $\mathcal{F}[e^{-7|t+4|}](\omega) = F(\omega)e^{4i\omega} = \frac{14e^{4i\omega}}{\omega^2+49}$.

c) $F(\omega) = 2\int_0^\infty e^{-t^2}\cos(\omega t)\,\mathrm{dt}$, deci $F'(\omega) = -2\int_0^\infty e^{-t^2} t\sin(\omega t)\,\mathrm{dt} =$
$= \int_0^\infty (e^{-t^2})'\sin(\omega t)\,\mathrm{dt} = e^{-t^2}\sin(\omega t)|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-t^2}\omega\cos(\omega t)\,\mathrm{dt} = -\frac{\omega}{2}F(\omega)$.
Din $F'(\omega) = -\frac{\omega}{2}F(\omega)$ rezultă $F(\omega) = Ce^{-\frac{\omega^2}{4}}$, $C = F(0) = 2\int_0^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{dt} = \sqrt{\pi}$.
d) Din c), rezultă $G(\omega) = \mathcal{F}[e^{-at^2}](\omega) = \mathcal{F}[e^{-(\sqrt{a}t)^2}](\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$. Deci:
$\mathcal{F}[f(t)](\omega) = iG'(\omega) = -\frac{i\sqrt{\pi}\omega}{2a^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$.
e) Cum $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ e pară, avem $\mathcal{F}[f(t)](\omega) = 2\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\cos(\omega t)\,\mathrm{dt} =$
$= \int_0^\infty \frac{\sin((1+\omega)t)+\sin((1-\omega)t)}{t}\,\mathrm{dt} = \frac{\pi}{2}(\mathrm{sgn}(1+\omega)+\mathrm{sgn}(1-\omega))$, folosind identitatea $\int_0^\infty \frac{\sin(at)}{t}\,\mathrm{dt} = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn}(a)$.
f) Funcţia $q_T(t)$ este pară, deci $\mathcal{F}[q_T(t)](\omega) = 2\int_0^T \left(1 - \frac{|t|}{T}\right)\cos(\omega t)\,\mathrm{dt} =$
$= 2\int_0^T \frac{\sin(\omega t)}{T\omega}\,\mathrm{dt} = \frac{2}{T\omega}\int_0^T \sin(\omega t)\,\mathrm{dt} = \frac{2(1-\cos(\omega T))}{T\omega^2}$.

2. $\mathcal{F}[f(t)](\omega) = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^\infty (\mathrm{sgn}(t+t_0) - \mathrm{sgn}(t-t_0))e^{-i\omega t}\,\mathrm{dt} = \frac{1}{4}\int_{-t_0}^{t_0} 2e^{-i\omega t}\,\mathrm{dt} =$
$= \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\Big|_{-t_0}^{t_0} = \frac{e^{i\omega t_0} - e^{-i\omega t_0}}{2i\omega} = \frac{\sin(\omega t_0)}{\omega}$.

3. a) Funcţia f e pară, deci $\mathcal{F}[f(t)](\omega) = 2\int_0^\pi \cos\frac{t}{2}\cos(\omega t)\,\mathrm{dt} = \int_0^\pi \Big(\cos\frac{(2\omega+1)t}{2} +$
$+ \cos\frac{(2\omega-1)t}{2}\Big)\,\mathrm{dt} = \frac{2}{2\omega+1}\sin\frac{(2\omega+1)\pi}{2} + \frac{2}{2\omega-1}\sin\frac{(2\omega-1)\pi}{2}$.
b) Funcţia f e pară, deci $\mathcal{F}[f(t)](\omega) = 2\int_0^\pi t\cos(\omega t)\,\mathrm{dt}$.
c) Funcţia f e pară, deci $\mathcal{F}[f(t)](\omega) = -2i\int_0^\pi e^{-t}\sin(\omega t)\,\mathrm{dt}$.
d) Scriem $f(t) = 2f_1(t) - f_2(t)$, unde $f_1(t) = \frac{t}{t^2+1}$ şi $f_2(t) = \frac{1}{t^2+1}$. Avem $F(\omega) = 2F_1(\omega) - F_2(\omega)$, unde $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega)$, $F_i(\omega) = \mathcal{F}[f_k(t)](\omega)$, $k = 1, 2$.
Pentru $\omega > 0$, $F_1(-\omega) = \int_{-\infty}^\infty \frac{2t}{t^2+1}e^{i\omega t}\,\mathrm{dt} = 2\pi i\,\mathrm{Rez}\left(\frac{2z}{z^2+1}e^{i\omega z}, i\right) = 2\pi i e^{-\omega}$
Cum F_1 e impară, rezultă $F_1(\omega) = -F_1(-\omega) = -2\pi i e^{-\omega}$. Deci:

$$F_1(\omega) = \begin{cases} 2\pi i e^{\omega}, & \omega < 0 \\ 0, & \omega = 0, . \\ -2\pi i e^{-\omega}, & \omega > 0 \end{cases}$$

Similar, pentru $\omega > 0$, avem $F_2(-\omega) = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{t^2+1}e^{i\omega t}\,\mathrm{dt} = 2\pi i\,\mathrm{Rez}\left(\frac{1}{z^2+1}e^{i\omega z}, i\right) =$
$\pi e^{-\omega}$. Cum F_2 e pară, rezultă că $F_2(\omega) = \pi e^{-|\omega|}$, $\forall \omega \in \mathbb{R}$.

4. Avem $F(\omega) = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(t^2+1)^2}e^{-i\omega t}\,\mathrm{dt}$. Folosind schimbarea de variabilă $x = -\omega t$, pentru $\omega > 0$ obţinem $F(\omega) = \int_\infty^{-\infty} \frac{-\omega^3}{(x^2+\omega^2)^2}e^{ix}\,\mathrm{dx} = \int_{-\infty}^\infty \frac{\omega^3}{(x^2+\omega^2)^2}e^{ix}\,\mathrm{dx} =$
$2\pi i\omega^3\,\mathrm{Rez}\left(\frac{1}{(z^2+\omega^2)^2}e^{iz}, \omega i\right) = \frac{2\pi i\omega^3}{(2\omega i)^2}e^{-\omega} = \frac{-\pi i\omega e^{-\omega}}{2}$. Cum F e pară, pentru $\omega < 0$, avem $F(\omega) = F(-\omega) = \frac{\pi i\omega e^{\omega}}{2}$. De asemenea, $F(0) = \frac{F(0+0)+F(0-0)}{2} = 0$.
Din formula de inversare Fourier, obţinem reprezentarea:
$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty F(\omega)e^{i\omega t}d\omega = -\frac{i}{4}\int_{-\infty}^\infty \omega e^{(-1+it)\omega}d\omega$.

5. a) Transformata prin sin a lui $f(t)$ este $F_s(\omega) = -2i\int_0^\infty f(t)\sin(\omega t)\,\mathrm{dt} = -2i\int_0^a t\sin(\omega t)\,\mathrm{dt} = \frac{2ia\omega\cos(a\omega)-2i\sin(a\omega)}{\omega^2}$. Din formula de inversare, avem $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{2ia\omega\cos(a\omega)-2i\sin(a\omega)}{\omega^2}e^{i\omega t}d\omega$. Transformata prin cos a lui $f(t)$ este $F_c(\omega) = 2\int_0^\infty f(t)\cos(\omega t)\,\mathrm{dt} = 2\int_0^a t\cos(\omega t)\,\mathrm{dt} = \frac{2a\omega\sin(a\omega)+2\cos(\omega a)-2}{\omega^2}$.
   Din formula de inversare, $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{2a\omega\sin(a\omega)+2\cos(\omega a)-2}{\omega^2}e^{i\omega t}d\omega$.
   b),c) Se rezolvă în mod similar.

6. a) Prelungim $y(t)$ prin paritate pe $\mathbb{R}$, deci $\int_0^\infty y(t)\cos(\omega t)\,\mathrm{du} = \frac{1}{2}\int_0^\infty y(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{dt}$, deci $Y(\omega) = \mathcal{F}[y(t)](\omega) = \frac{2}{\omega^2+1}$. Din formula de inversare, pentru $t > 0$, $y(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\omega^2+1}e^{i\omega t}d\omega = 2i\,\mathrm{Rez}\left(\frac{1}{z^2+1}e^{itz}, i\right) = e^{-t}$. Cum $y(t)$ e pară, $y(0) = e^{-0} = 1$, deci $y(t) = e^{-t}$, $(\forall)t \geq 0$.
   b) Putem presupune că F e pară, deci $\int_{-\infty}^\infty F(\omega)\cos(\omega t)d\omega = \int_{-\infty}^\infty F(\omega)e^{i\omega t}\,\mathrm{dt} = \varphi(t)$. Din formula de inversare, pentru $\omega > 0$ avem $F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[\varphi(t)](\omega) = \frac{1}{\pi}\int_0^1(1-t)\cos(\omega t)\,\mathrm{dt} = \frac{1-\cos\omega}{\pi\omega^2}$. De asemenea, $F(0) = \lim_{\omega\searrow 0}\frac{1-\cos\omega}{\pi\omega^2} = \frac{1}{2\pi}$ (Sau $F(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^1(1-t)\,\mathrm{dt} = \frac{1}{2\pi}$).

Pagina 204

1. a) $\mathcal{L}[f(t)](s) = \mathcal{L}[e^{3t}u(t)](s) - \mathcal{L}[\sin t u(t)](s) + 2\mathcal{L}[tu(t)](s) - 3\mathcal{L}[u(t)](s) = \frac{1}{s-3} - \frac{1}{s^2+1} + \frac{2}{s^2} - \frac{3}{s}$.
   b) $\mathcal{L}[(e^t-1)u(t)](s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}$, deci $[\frac{e^t-1}{t}u(t)](s) = \int_s^\infty\left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u}\right)\mathrm{du} = \ln\left(\frac{u-1}{u}\right)\Big|_s^\infty = \ln\frac{s}{s-1}$.
   c) $\mathcal{L}((t^2+bt+c)u(t))(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{b}{s^2} + \frac{c}{s}$, deci $\mathcal{L}[e^{at}(t^2+bt+c)u(t)] = \frac{2}{(s-a)^3} + \frac{b}{(s-a)^2} + \frac{c}{s-a}$.
   d) $\mathcal{L}(e^t\sin t u(t)) = \frac{1}{(s-1)^2+1}$, deci $\mathcal{L}[e^{t-1}\sin(t-1)u(t-1)] = \frac{e^{-s}}{(s-1)^2+1}$.
   e) $f(t) = \cos^2(7t)u(t) = \frac{1}{2}(1+\cos(14t))u(t)$, deci $\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{1}{2s} + \frac{s}{2(s^2+14^2)}$.
   f) Avem $f(t) = \sin(at)\sin(bt)u(t) = \cos((a-b)t)u(t) - \cos((a+b)t)u(t)$.
   g) $\mathcal{L}[(\cos(3t)-\cos t)u(t)](s) = \frac{s}{s^2+9} - \frac{s}{s^2+1}$, deci $\mathcal{L}[\frac{\cos(3t)-\cos t}{t}u(t)](s) =$
   $= \int_s^\infty\left(\frac{u}{u^2+9} - \frac{u}{u^2+1}\right)\mathrm{du} = \frac{1}{2}\ln\frac{u^2+9}{u^2+1}\Big|_s^\infty = \frac{1}{2}\ln\frac{s^2+1}{s^2+9}$.
   h) $\mathcal{L}[\cos(\omega t)u(t)](s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$, deci $\mathcal{L}[t\cos(\omega t)u(t)](s) = -\left(\frac{s}{s^2+\omega^2}\right)' = \frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$,
   i) Similar cu h)
   j) $f = g * h$ cu $g(t) = t^2u(t)$ şi $h(t) = \cos(2t)u(t)$. $\mathcal{L}[f(t)](s) = \mathcal{L}[g(t)](s)\cdot\mathcal{L}[h(t)](s) = \frac{2}{s^3(s^2+4)}$.

2. a) Metoda 1: $F(s) = \frac{s+3}{s^2(s+4)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s^2} + \frac{c}{s+4}$, de unde $f(t) = a + bt + ce^{-4t}$. Din descompunerea anterioară, rezultă $a(s^2+4s) + b(s+4) + cs^2 = s+3$, deci $a+c=0$, $4a+b=1$, $4b=3$, de unde $b = \frac{3}{4}$, $a = \frac{1}{16}$, $c = -\frac{1}{16}$. În concluzie, $f(t) = \frac{1}{16} + \frac{3}{4}t - \frac{1}{16}e^{-4t}$.

Metoda 2: F are poli în $s_1 = 0$ şi $s_2 = -4$, deci $f(t) = \text{Rez}(F(s)e^{st}, 0)u(t) + \text{Rez}(F(s)e^{st}, -4)u(t) = \left(\frac{(s+3)e^{st}}{s+4}\right)'\Big|_{s=0} u(t) + \frac{(s+3)e^{st}}{s^2}\Big|_{s=-4} u(t) =$
$= \left(\frac{t(s+3)e^{st}}{s+4} + \frac{e^{st}}{(s+4)^2}\right)\Big|_{s=0} u(t) - \frac{1}{16}e^{-4t}u(t) = (\frac{1}{16} + \frac{3}{4}t - \frac{1}{16}e^{-4t})u(t)$.
b,c,d) Se rezolvă în mod similar cu a) (folosind metoda 1 sau 2).
e) $F(s) = \frac{5s+1}{s^2+1} = 5 \cdot \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}$, deci $f(5) = 5\cos t + \sin t$, f,g) Similare.
h) $F(s) = \frac{2s-7}{s^2+2s+6} = \frac{2s-7}{(s+1)^2+5} = \frac{2(s+1)-9}{(s+1)^2+5} = 2\frac{s+1}{(s+1)^2+5} - \frac{9}{\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5}}{(s+1)^2+5}$, de unde rezultă
$f(t) = 2e^{-t}\cos(\sqrt{5}t)u(t) - \frac{9}{\sqrt{5}}e^{-t}\sin(\sqrt{5}t)u(t)$, i) Similar.
j) Cum $F(s) = \frac{e^{-s}}{s^2+1}$ şi $\mathcal{L}[\sin tu(t)](s) = \frac{1}{s^2+1}$, rezultă $f(t) = \sin(t-1)u(t-1)$.
k) $f(t) = 4\sin(2t-6) - 3\,\text{ch}(2t-4)u(t)$, l-p) Similare.

3. a) Fie $X(s) = \mathcal{L}[x(t)](s)$. Din $x'' + 6x' + 9x = 9e^{3t}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, rezultă $s^2X(s) + 6sX(s) + 9X(s) = \frac{9}{s-3}$, deci $X(s) = \frac{9}{(s+3)^2(s-3)}$. Prin urmare avem:
$x(t) = 9\,\text{Rez}(\frac{e^{st}}{(s+3)^2(s-3)}, -3) + 9\,\text{Rez}(\frac{e^{st}}{(s+3)^2(s-3)}, 3) = \left(\frac{9}{2}t - \frac{1}{4}\right)e^{-3t} + \frac{1}{4}e^{3t}$.
b) Fie $X(s) = \mathcal{L}[x(t)](s)$. Din $x'' - 3x + 2x = 4e^t$, $x(0) = -3$, $x'(0) = 5$, rezultă $s^2X(s) + 3s - 5 - 3(sX(s) + 3) + 2X(s) = \frac{4}{s-1}$, de unde $(s^2 - 3s + 2)X(s) = -3s + 14 + \frac{4}{s-1}$, deci $X(s) = \frac{-3s+14}{(s-1)(s-2)} + \frac{4}{(s-1)^2(s-2)}$. Prin urmare, $x(t) = \text{Rez}\left(\frac{(-3s+14)e^{st}}{(s-1)(s-2)}, 1\right) + \text{Rez}\left(\frac{(-3s+14)e^{st}}{(s-1)(s-2)}, 2\right) + \text{Rez}\left(\frac{4e^{st}}{(s-1)^2(s-2)}, 1\right) +$
$+ \text{Rez}\left(\frac{4e^{st}}{(s-1)^2(s-2)}, 2\right) = (-15 - 4t)e^t + 12e^{2t}$.
c) Notăm $X(s) = \mathcal{L}[x(t)](s)$ şi $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$. Aplicând $\mathcal{L}$ în sistem, rezultă:
$\begin{cases} sX(s) - X(s) + 2Y(s) = 0 \\ s^2X(s) + 2sY(s) = \frac{2}{s^2} - \frac{s}{s^2+4} \end{cases}$. Din prima ecuaţie, $2Y(s) = (1-s)X(s)$.
Înlocuind în a doua ecuaţie, obţinem $sX(s) = \frac{2}{s^2} - \frac{s}{s^2+4}$, deci $X(s) = \frac{2}{s^3} - \frac{1}{s^2+4} = 2 \cdot \frac{1}{s^2} - \frac{1}{2}\frac{2}{s^2+4}$. Rezultă $x(t) = t^2 - \frac{1}{2}\sin(2t)$. Prin urmare $y(t) = \frac{1}{2}(x(t) - x'(t)) = -t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{1}{2}\cos(2t)$.
d) Se revolvă în mod similar cu c)
e) Notăm $X(s) = \mathcal{L}[x(t)](s)$. Din $x(t) - 2\int_0^t x(\tau)d\tau = \frac{1}{9}(1 - \cos(3t))$, rezultă $X(s) - 2\frac{X(s)}{s} = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+9}\right)$, de unde $X(s) = \frac{1}{9}\frac{1}{s-2} - \frac{1}{9}\frac{1}{(s-2)(s^2+9)}$, deci $x(t) = \text{Rez}(X(s)e^{st}, 2) + \text{Rez}(X(s)e^{st}, 3i) + \text{Rez}(X(s)e^{st}, -3i)$.
f) Notăm $X(s) = \mathcal{L}[x(t)](s)$. Din $x(t) = t + 4\int_0^t (t-\tau)x(\tau)d\tau$, rezultă $X(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{4}{s^2}X(s)$, deci $X(s) = \frac{1}{s^2-4}$. În concluzie $x(t) = \frac{1}{2}\text{sh}(2t)$, g), h) Se rezolvă similar cu f)

4. Fie $I(t) = \int_0^\infty \frac{\sin^3(tx)}{x}\,\text{dx}$. Atunci $\mathcal{L}[I(t)](s) = \int_0^\infty e^{-st}\left(\frac{\sin^3(tx)}{x}\,\text{dx}\right)\text{dt} =$
$= \int_0^\infty \left(\frac{1}{x^2}\int_0^\infty e^{-st}\sin^3(tx)\,\text{dt}\right)\text{dx} = \int_0^\infty \left(\frac{1}{x^2}\mathcal{L}[\sin^3(tx)](s)\right)\text{dx}$. Pe de altă parte, $\sin^3 a = \frac{3}{4}\sin a - \frac{1}{4}\sin(3a)$, deci $\mathcal{L}[I(t)](s) = \frac{3}{4}\int_0^\infty \left(\frac{1}{x(x^2+s^2)} - \frac{1}{x(9x^2+s^2)}\right)\text{dx} = \frac{3\ln 3}{4} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{3\ln 3}{4}\mathcal{L}[t](s)$. Prin urmare, $I(t) = \frac{e\ln 3}{4}t$, deci $I = I(1) = \frac{3}{4}\ln 3$.

5. Fie $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$. Aplicând transformata Laplace în relaţia $y(t)-y(t-1) = t$, obţinem $Y(s) - e^{-s}Y(s) = \frac{1}{s^2}$, deci $Y(s) = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{1-e^{-2s}} = \frac{1}{s^2}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-ns} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-ns}}{s^2}$. Rezultă $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(t-n)u(t-n)$. (Observaţie: Pentru fiecare $t \in \mathbb{R}$, suma este finită!).

Pagina 208

1. a) Metoda 1: Scriem $X(z) = \frac{2z+3}{z^2-5z+6} = \frac{a}{z-2} + \frac{b}{z-3}$, de unde $a(z-3) + b(z-2) = 2z+3$, deci $a = -7, b = 9$. Rezultă $X(z) = \frac{-7}{z-3} + \frac{9}{z-2} = \frac{-7}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{z}} + \frac{9}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = -7\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-1}z^{-n} + 9\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}z^{-n}$, de unde $a_n = \begin{cases} -7\cdot 3^{n-1} + 9\cdot 2^{n-1}, & n \geq 1 \\ 0, & n \leq 0 \end{cases}$.

Metoda 2: Funcţia $X(z)$ are polii simpli $z_1 = 2$ şi $z_2 = 3$. Prin urmare, pentru $n \geq 1$, $x_n = \text{Rez}\left(\frac{2z^n+3z^{n-1}}{z^2-5z+6}, 2\right) + \text{Rez}\left(\frac{2z^n+3z^{n-1}}{z^2-5z+6}, 3\right) = -7\cdot 3^{n-1} + 9\cdot 2^{n-1}$. Pe de altă parte, $x_0 = \text{Rez}\left(\frac{2z+3}{z(z-2)(z-3)}, 0\right) + \text{Rez}\left(\frac{2z+3}{z(z-2)(z-3)}, 2\right) + \text{Rez}\left(\frac{2z+3}{z(z-2)(z-3)}, 3\right) = \frac{1}{2} - \frac{7}{2} + 3 = 0$.

b) $X(z) = \frac{z^2+1}{z^2-z+1} = 1 - \frac{z}{z^2-z+1}$. Pentru $n \geq 1$, $x_n = -\text{Rez}\left(\frac{z^{n-1}}{z^2-z+1}, \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) - \text{Rez}\left(\frac{z^{n-1}}{z^2-z+1}, \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{i}{\sqrt{3}} - \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{i}{\sqrt{3}}$. Pentru $n = 0$, avem

$x_0 = \text{Rez}\left(\frac{1}{z}, 0\right) - \text{Rez}\left(\frac{1}{z^2-z+1}, \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) - \text{Rez}\left(\frac{1}{z^2-z+1}, \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right) = 1.$

c) Pentru $n \geq 0$, $x_n = \text{Rez}\left(\frac{z^n}{(z-1)(z^2+1)}, 1\right) + \text{Rez}\left(\frac{z^n}{(z-1)(z^2+1)}, i\right) +$

$+\text{Rez}\left(\frac{z^n}{(z-1)(z^2+1)}, -i\right) = \frac{1}{2} + \frac{i^n}{(-1+i)(2i)} + \frac{(-i)^n}{(-1-i)(-2i)} =$

$= \frac{1}{4}(2 - i^n - (-i)^n + i^{n+1} + (-i)^{n+1}) = \begin{cases} 0, & n = 4k, 4k+1 \\ 1, & n = 4k+2, 4k+3 \end{cases}$.

d)$x_n = \text{Rez}\left(\frac{z^n}{(z-1)^2(z^2+z-6)}, 1\right) + \text{Rez}\left(\frac{z^n}{(z-1)^2(z^2+z-6)}, 2\right) +$

$+\text{Rez}\left(\frac{z^n}{(z-1)^2(z^2+z-6)}, -3\right) = \cdots$, $n \geq 0$.

e) $x_n = \text{Rez}\left(\frac{z^n}{z^2+2az+2a^2}, -a+ai\right) + \text{Rez}\left(\frac{z^n}{z^2+2az+2a^2}, -a-ai\right) = 2^{\frac{n}{2}}a^{n-1}\sin\frac{3n\pi}{4}$.

2. Notăm $u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$. Rezolvaţi ecuaţia $y * a = x$, unde:

a) Relaţia $y * a = x$ se scrie $y_{n+2} + 3y_{n+1} + 2y_n = 5\cdot 3^n u(n)$, $n \in \mathbb{Z}$. De aici, rezultă că $y_n = 0$, $n \leq -3$. Pentru $n = -2$, obţinem $y_0 = 0$. Pentru $n = -1$, obţinem $y_1 + 3y_0 = 0$, deci $y_1 = 0$. Aplicând transformata Z în relaţia $y * a = x$, obţinem $Y(z)(z^2 + 3z + 2) = \frac{5z}{z-3}$, deci $Y(z) = \frac{5z}{(z+1)(z+2)(z-3)}$. Rezultă că, pentru $n \geq 0$, avem:

$y_n = \text{Rez}\left(\frac{5z^n}{(z+1)(z+2)(z-3)}, -1\right) + \text{Rez}\left(\frac{5z^n}{(z+1)(z+2)(z-3)}, -2\right) +$

$+\operatorname{Rez}\left(\frac{5z^n}{(z+1)(z+2)(z-3)},3\right)=-\frac{5}{4}(-1)^n+(-2)^n+\frac{1}{4}3^n.$

b) Avem $x=t*\delta_{-1}$, unde $t_n=\cos(\pi n)\cdot u(n)=\frac{1}{2}(e^{i\pi n}+e^{-i\pi n})\cdot u(n)$. Rezultă: $X(z)=\frac{z}{2}\left(\frac{z}{z-e^{i\pi}}+\frac{z}{z-e^{-i\pi}}\right)=\frac{z^2}{z+1}$. Din $y*a=x$, avem $Y(z)(z^2-\frac{5}{2}z+1)=\frac{z^2}{z+1}$, deci $Y(z)=\frac{2z^2}{(z+1)(2z^2-5z+2)}=\frac{z^2}{(z+1)(z-\frac{1}{2})(z-2)}$. Rezultă că, pentru $n\geq 0$, avem $y_n=\operatorname{Rez}\left(\frac{z^{n+1}}{(z+1)(z-\frac{1}{2})(z-2)},-1\right)+\operatorname{Rez}\left(\frac{z^{n+1}}{(z+1)(z-\frac{1}{2})(z-2)},\frac{1}{2}\right)+$
$+\operatorname{Rez}\left(\frac{z^{n+1}}{(z+1)(z-\frac{1}{2})(z-2)},2\right)=\frac{2}{9}(-1)^{n+1}-\frac{4}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\frac{2}{9}2^{n+1}$, $n\geq 0$.

c) Din $y*a=x$, rezultă $(z^2-4z+3)Y(z)=\frac{2z}{z-1}$, deci $y_n=\operatorname{Rez}\left(\frac{2z^n}{(z-1)^2(z-3)},1\right)+$ $\operatorname{Rez}\left(\frac{2z^n}{(z-1)^2(z-3)},3\right)=\left(\frac{2z^n}{z-3}\right)'\Big|_{z=1}+\frac{1}{2}3^n=\frac{1}{2}(3^n-2n-1)$, $n\geq 0$.

d) Din $y*a=x$, rezultă $(z-2)Y(z)=\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}-\frac{2z}{(z-1)^2}-\frac{z}{z-1}$, deci $Y(z)=\frac{z(-z^2+z+2)}{(z-1)^3(z-2)}$. Rezultă $y_n=-\operatorname{Rez}\left(\frac{z^{n+1}+z^n}{(z-1)^3},1\right)=-\frac{1}{2!}(z^{n+1}+z^n)''|_{z=1}=-n^2$, $n\geq 0$.

3. a) Avem $x_{n+2}-x_{n+1}-x_n=0$, $n\geq 0$. Scriem această relaţie sub forma $a*x=y$, unde $a=\delta_{-2}-2\delta_{-1}+\delta$. Avem $y_n=0$, $n\geq 0$. De asemenea, $y_{-1}=x_1-x_0-x_{-1}=1$, $y_{-2}=x_0-x_{-1}-x_{-2}=0$ şi $y_{-n}=0$, $n\geq 3$. Deci $y=\delta_{-1}$. Prin urmare, din $a*x=y$, rezultă $(z^2-z-1)X(z)=z$, deci $X(z)=\frac{z}{z^2-z-1}$. Rezultă că:

$x_n=\operatorname{Rez}\left(\frac{z^n}{z^2-z-1},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+\operatorname{Rez}\left(\frac{z^n}{z^2-z-1},\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$, $n\geq 0$.

b) Fie $a=\delta_{-2}-3\delta_{-1}+2\delta$. Avem $a*x=4\delta_{-2}-6\delta_{-1}$, deci $X(z)=\frac{4z^2-6z}{(z-1)(z-2)}$, de unde $x_n=\operatorname{Rez}\left(\frac{2z^n(2z-3)}{(z-1)(z-2)},1\right)+\operatorname{Rez}\left(\frac{2z^n(2z-3)}{(z-1)(z-2)},2\right)=2+2^{n+1}$, $n\geq 0$.

c) Fie $a=\delta_{-2}-4\delta_{-1}+3\delta$. Avem $a*x=\delta_{-1}+2u(n)$, de unde $(z^2-4z+3)X(z)=z+\frac{2z}{z-1}$, deci $X(z)=\frac{z}{(z-1)(z-3)}+\frac{2z}{(z-1)^2(z-3)}$, de unde $x_n=\operatorname{Rez}\left(\frac{z^n}{(z-1)(z-3)}+\frac{2z^n}{(z-1)^2(z-3)},1\right)+\operatorname{Rez}\left(\frac{z^n}{(z-1)(z-3)}+\frac{2z^n}{(z-1)^2(z-3)},3\right)=3^n-n-1$, $n\geq 1$, d) Similar cu c)

e) Fie $a=\delta_{-2}-3\delta_{-1}+2\delta$. Avem $a*x=2^nu(n)$, de unde $(z^2-3z+2)X(z)=\frac{z}{z-2}$, deci $x_n=\operatorname{Rez}\left(\frac{z^n}{(z-1)(z-2)^2},1\right)+\operatorname{Rez}\left(\frac{z^n}{(z-1)(z-2)^2},2\right)$, $n\geq 0$. f) Similar cu e)

4. Seria $\sum_{n=0}^{\infty}2^{n^2}w^n$ are raza de convergenţă $R=\lim_n\frac{1}{\sqrt[n]{2^{n^2}}}=\lim_n\frac{1}{2^n}=0$, deci $\sum_{n=0}^{\infty}2^{n^2}z^{-n}$ e divergentă pentru orice $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Bibliografie

[1] M. J. Ablowitz, A. S. Fokas *Complex variables: Introduction and applications, second edition*, Cambridge University Press, 2003.

[2] M. Andronache, D. Schwarz, R. Gologan, D. Şerbănescu, *Olimpiada de matematică 2008 - 2012*, Editura Sigma, Bucureşti, 2012.

[3] I. Armeanu, D. Blindeanu, N. Cotfas, I. L. Popescu, I. Şandru, *Probleme de analiză complexă*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1995.

[4] Gh. Barbu, D. Breaz, N. Breaz, P. Gaşpar, M. Pîrvan, V. Prepeliţă, N. Suciu, *Transformări integrale şi funcţii complexe cu aplicaţii în tehnică: volumul 1*, Editura StudiIS, Iaşi, 2013.

[5] Gh. Barbu, M. Pîrvan, L. Popa, V. Prepeliţă, D. Roşu, A. Toma, *Transformări integrale şi funcţii complexe cu aplicaţii în tehnică: volumul 2*, Editura StudiIS, Iaşi, 2013.

[6] M. Brandiburu, D. Joiţa, C. Niţă, Năstăsescu, *Culegere de probleme pentru liceu. Algebră clasele IX-XII*, Editura Rotech Pro, Bucureşti, 2004.

[7] V. Brînzănescu, O. Stănăşilă, *Matematici speciale. Teorie, exemple, aplicaţii*, Editura ALL, Bucureşti, 1994.

[8] L. Costache, *Lecţii de matematici speciale*, Editura Politehnica Press, Bucureşti, 2017.

[9] B. P. Demidovici, *Culegere de probleme şi exerciţii de analiză matematică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1956.

[10] P. Flondor, O. Stănăşila, *Lecţii de analiză matematică şi exerciţii rezolvate*, Editura All, Bucureşti, 2004.

[11] M. Ganga, *Elemente de analiză matematică pentru clasa a 11-a*, Editura Mathpress, Ploieşti, 1997.

[12] M. Ganga, *Elemente de analiză matematică pentru clasa a 12-a*, Editura Mathpress, Ploieşti, 1997.

[13] A. Martinov, *Probleme de analiză matematică*, Editura Apimondia, Bucureşti, 1992.

[14] M. Olteanu, *Analiză matematică. Noţiuni teoretice şi probleme rezolvate*, Editura Printech, Bucureşti, 2004.

[15] H. Robbins , *A Remark on Stirling's Formula*, The American Mathematical Monthly, 62 (1) (1955), 26-29.

[16] M. Roşculet, *Analiză matematică*, Editura Didactiă şi Pedagogică, Bucureşti, 1979.

[17] W. Rudin, *Analiză reală şi complexă*, Editura Theta, Bucureşti, 1999.

[18] O. Stănăşila, *Analiză matematică*, Editura Didactiă şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

[19] E. M. Stein, R. Shakarchi, *Complex analysis*, Princeton Lectures in Analysis II, Princeton University Press, 2003.

[20] Ş. Strătilă, *Introducere în analiza complexă*, Editura Theta, Bucureşti, 2013.

[21] C. Volf, I. I. Vrabie, *Logică şi teoria mulţimilor*, Univ. Al.Ioan Cuza, Iaşi, note de curs, 2005.